UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class 510.5 Book MH Volume 64

READING ROOM
MATHEMATICS LIBRARY

My 08-15M

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.
University of Illinois Library

Nov 1 '48
May 6, 1959
9/26/62
5-21-66-
SEP 29 1965
JUN 15 1965
JUN 05 REC'D

M32

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/mathematischeann6419unse

878
35
v.64

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

64. Band.

Mit 30 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt des vierundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bauer, Michael, in Budapest. Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt 325
———— Über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler einer Gattung. . . 573
Bernstein, Felix, in Göttingen. Über das Gaußsche Fehlergesetz 417
Bolza, Oskar, in Chicago. Die Lagrangesche Multiplikatorenregel in der Variationsrechnung für den Fall von gemischten Bedingungen und die zugehörigen Grenzgleichungen bei variabeln Endpunkten. 370
———— Berichtigung zu Math. Ann. Bd. 63, S. 246 ff. 387
Brill, A., in Tübingen. Über algebraische Raumkurven. 289
Busche, E., in Hamburg. Über das Möbiussche Netz. (Mit 1 Figur im Text) 489
Carathéodory, C., in Göttingen. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. (Mit 2 Figuren im Text). 95
Faber, Georg, in Karlsruhe. Über polynomische Entwicklungen II 116
Fejér, Leopold, in Kolozsvár. Über die Fouriersche Reihe. 273
Fleck, Albert, in Berlin. Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen 561
———— Über die Darstellung gewisser ganzer rationalzahliger definiter Funktionen als Summen von vierten resp. sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen 567
Frank, Philipp, in Wien. Über einen Satz von Routh und ein damit zusammenhängendes Problem der Variationsrechnung 239
Hardy, G. H., of Cambridge, England. Some theorems concerning infinite series 77
Hjelmslev, J., in Hellerup bei Kopenhagen. Neue Begründung der ebenen Geometrie. (Mit 7 Figuren im Text). 449
Hurwitz, A., in Zürich. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion. (Mit 1 Figur im Text) 517
Jacobsthal, Ernst, in Berlin. Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen 475
Junker, F., in Stuttgart. Die Differentialgleichungen der Invarianten und Semiinvarianten einer binären (ternären) Form 328
Klein, F., in Göttingen. Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Mit 14 Figuren im Text) 175
Loewy, Alfred, in Freiburg i. Br. Über die Gruppen linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe 264
Loria, Gino, a Genova. Sopra certi inviluppi di cerchi 512
Losehand, O., in Wilhelmshaven. Über Kurven 12. und 10. Ordnung, die in der Enveloppentheorie auftreten. (Mit 2 Figuren im Text) 495

112101

Seite

Meyer, Eugen, in Charlottenburg. Über die Kongruenzaxiome der Geometrie. (Mit 2 Figuren im Text) 197

——— Flächeninhalts- und Volumengleichheit vom projektiven Standpunkte. (Mit 1 Figur im Text) 207

Miller, G. A., of Urbana, U. S. A. The groups which contain less than six cyclic subgroups of the same order 344

Mollerup, Johannes, in Kopenhagen. Die Definition des Mengenbegriffs . . 231

Müller, J. O., in Göttingen. Über die Anziehung eines homogenen Ellipsoids 142

Myller-Lebedeff, Wera, in Bukarest. Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen 388

Perron, Oskar, in München. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus 1

——— Zur Theorie der Matrices 248

Prasad, G., in Benares, Indien. Über eine Klasse von nichtanalytischen Flächen konstanter positiver Gaußscher Krümmung 136

Réthy, Moritz, in Budapest. Bemerkungen zur Note des Herrn Philip E. B. Jourdain über das Prinzip der kleinsten Aktion 156

Schmidt, Erhard, in Bonn. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung, Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung 161

Taber, Henry, of Worcester, U. S. A. Criteria for the irreducibility of groups of linear homogeneous transformations 357

Whittemore, J. K., of Cambridge, Massachusetts. A Note on the Problem of Three Bodies 150

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910 . . 160

Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus.

Von

Oskar Perron in München.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Allgemeines.

Seite

§ 1. Aufstellung des Algorithmus 2
§ 2. Formale Entwicklungen 5
§ 3. Störungen 8
§ 4. Allgemeiner Konvergenzbeweis 12
§ 5. Eindeutigkeit 18
§ 6. Langsame Annäherung 20
§ 7. Ein bemerkenswerter Fall stärkerer Annäherung 24
§ 8. Nachträglicher Beweis eines früher benutzten Satzes 26

II. Abschnitt.

Periodische Kettenbruchalgorithmen.

§ 9. Reinperiodische und gemischtperiodische Algorithmen 27
§ 10. Die charakteristische Gleichung 29
§ 11. Notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung bei einzeiliger Periodizität 33
§ 12. Hilfssätze 39
§ 13. Konvergenz bei k-zeiliger Periodizität 42
§ 14. Der Spezialfall reeller positiver $a_i^{(\nu)}$ 47
§ 15. Die koordinierte Entwicklung 52

III. Abschnitt.

Regelmäßige periodische Entwicklungen.

§ 16. Der algebraische Körper der Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 59
§ 17. Reduzibilität und Irreduzibilität der charakteristischen Gleichung 61
§ 18. Das Näherungsgesetz 63
§ 19. Ein Satz über die Reduktion der ganzzahligen zerlegbaren Formen . . . 69
§ 20. Schluß 73

I. Abschnitt.

Allgemeines.

§ 1.

Aufstellung des Algorithmus.

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von zwei positiven ganzen rationalen Zahlen x, y bedient man sich bekanntlich des Euklidischen Verfahrens, wodurch zugleich auch der Bruch $\frac{y}{x}$ in einen Kettenbruch entwickelt wird. Setzt man $\frac{y}{x} = \alpha$, so erhält man hierbei den formalen Ansatz:

$$\begin{aligned} \alpha &= a + \frac{1}{\alpha'}, \\ \alpha' &= a' + \frac{1}{\alpha''}, \\ &\cdots\cdots \\ \alpha^{(\nu)} &= a^{(\nu)} \quad , \end{aligned}$$

wo die $a, a', \cdots, a^{(\nu)}$ die bez. in $\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(\nu)}$ enthaltenen größten ganzen Zahlen bedeuten. Einmal muß notwendig ein $\alpha^{(\nu)}$ eine ganze Zahl werden, und der Prozeß erreicht damit sein Ende. Genau derselbe Ansatz läßt sich indes auch durchführen, wenn α eine beliebige reelle Zahl bedeutet; jedoch läuft der Prozeß dann ins Unbegrenzte fort, sobald α irrational ist. Man gelangt so dazu, eine beliebige reelle positive Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln.

Um nun zu den allgemeineren kettenbruchähnlichen Algorithmen zu gelangen, gehen wir analog davon aus, zu $n+1$ gegebenen positiven ganzen Zahlen $x_0, x_1, \cdots, x_n$ den größten gemeinsamen Teiler zu bestimmen. Dabei wird man am zweckmäßigsten wohl auf folgende Weise verfahren: Ist etwa x_n die kleinste der $n+1$ Zahlen, so dividiere man die n andern alle durch x_n und bestimme die Divisionsreste. Diese bilden mit x_n zusammen ein neues System von $n+1$ Zahlen, die denselben größten gemeinsamen Teiler haben wie die ursprünglichen. Man wähle daher wiederum die kleinste unter ihnen aus, dividiere durch sie die n andern, und wiederhole dies Verfahren, solange es nötig ist.

Im Verlauf des beschriebenen Prozesses wird bei jedem folgenden Schritt die kleinste der $n+1$ Zahlen im allgemeinen an einer andern Stelle auftreten, als bei den vorhergehenden $n+1$ Zahlen. Um rein formal größere Regelmäßigkeit zu erzielen, wird man daher nicht durch die jeweils kleinste, sondern jedesmal durch diejenige der $n+1$ Zahlen dividieren, die an einer bestimmten Stelle, etwa der ersten, erschienen ist,

wobei man im allgemeinen allerdings etwas langsamer zum Ziel gelangt. Man wird so zu dem folgenden Schema geführt:

$$(\alpha)\quad \begin{array}{l} x_1 = a_1 x_0 + x_0',\ x_2 = a_2 x_0 + x_1',\ \cdots,\ x_n = a_n x_0 + x_{n-1}',\ x_0 = x_n', \\ x_1' = a_1' x_0' + x_0'',\ x_2' = a_2' x_0' + x_1'',\ \cdots,\ x_n' = a_n' x_0' + x_{n-1}'',\ x_0' = x_n'', \\ x_1'' = a_1'' x_0'' + x_0''',\ x_2'' = a_2'' x_0'' + x_1''',\ \cdots,\ x_n'' = a_n'' x_0'' + x_{n-1}''',\ x_0'' = x_n''', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Der allgemeinste derartige Ansatz aber, der zur Bestimmung des größten Teilers von $n+1$ Zahlen $y_0, y_1, \cdots, y_n$ führt, lautet:

$$(\beta)\quad \begin{array}{l} y_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n + y_{n+1}, \\ y_1 = b_1' y_2 + b_2' y_3 + \cdots + b_n' y_{n+1} + y_{n+2}, \\ y_2 = b_1'' y_3 + b_2'' y_4 + \cdots + b_n'' y_{n+2} + y_{n+3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Die beiden zuvor angegebenen Methoden erhält man hieraus durch Spezialisierung, indem man in jeder Zeile sämtliche $b_i^{(\nu)}$ bis auf ein bestimmtes unter ihnen gleich Null setzt. Bei diesem formalen Ansatz liegt es nun aber nahe, die $b_i^{(\nu)}$ in anderer Weise zu wählen, nämlich b_1 als größtes Ganzes von $\frac{y_0}{y_1}$, sodann b_2 als größtes Ganzes von $\frac{y_0 - b_1 y_1}{y_2}$ usw., ebenso b_1' als größtes Ganzes von $\frac{y_1}{y_2}$, b_2' als größtes Ganzes von $\frac{y_1 - b_1' y_2}{y_3}$ usw., wodurch die weitere Wahl der $b_i^{(\nu)}$ genügend ersichtlich sein dürfte.

Ich will nun zeigen, daß das System (β), obwohl es in dieser Form viel allgemeiner erscheint als (α), sich doch durch eine bloße Änderung der Bezeichnung mit letzterem zur Deckung bringen läßt. Zu dem Ende setze man

$$\begin{array}{l} y_0 - b_1 y_1 - b_2 y_2 - \cdots - b_n y_n = x_0, \\ y_1 - b_1' y_2 - \cdots - b_{n-1}' y_n = x_1, \\ y_2 - \cdots - b_{n-2}'' y_n = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{array}$$

und wähle nun $x_0, x_1, \cdots, x_n$ zum Ausgangspunkt an Stelle von $y_0, y_1, \cdots, y_n$. Führt man dann weiter die Abkürzungen ein:

$$\begin{array}{l} y^i - b_1^{(i)} y_{i+1} - b_2^{(i)} y_{i+2} - \cdots - b_n^{(i)} y_{i+n} = x_0^{(i)}, \\ y_{i+1} - b_1^{(i+1)} y_{i+2} - \cdots - b_{n-1}^{(i+1)} y_{i+n} = x_1^{(i)}, \\ y_{i+2} - \cdots - b_{n-2}^{(i+2)} y_{i+n} = x_2^{(i)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{i+n} = x_n^{(i)}, \end{array}$$

so resultiert aus (β) genau das System (α), wenn man nur noch $b_\mu^{(\nu)} = a_{n+1-\mu}^{(\mu+\nu-n-1)}$ setzt. Wählt man die $b_\mu^{(\nu)}$ in der oben angegebenen Weise, so werden dabei die $a_i^{(\nu)}$ genau die in $\frac{x_i^{(\nu)}}{x_0^{(\nu)}}$ enthaltenen größten ganzen Zahlen, wie dies auch bei dem Ansatz (α) der Fall sein sollte.

Die Reihe $x_0, x_0', x_0'', \cdots$ ist eine Folge stets abnehmender positiver ganzer Zahlen; es wird also notwendig einmal die Null zum Vorschein kommen. Alsdann ist derselbe Prozeß mit weniger als $n+1$ Größen weiterzuführen; er wird wieder eine solche Unterbrechung erfahren, usw., bis er schließlich mit zwei Größen fortzusetzen ist, in welchem Fall er mit dem Euklidischen Verfahren identisch wird und so zur Bestimmung des größten Teilers führt.

Wir wiederholen jetzt den Ansatz (α), jedoch ohne die beschränkende Annahme, daß $x_0, x_1, \cdots, x_n$ ganze Zahlen sind; vielmehr sollen irgend welche reellen Werte zugelassen werden. Der Prozeß kann dann zwar auch eine oder mehrere Unterbrechungen (Störungen) erleiden (vergl. darüber § 3), wird aber, wenn von den Verhältnissen $\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}$ wenigstens eines irrational ist, ins Unbegrenzte fortlaufen. Setzt man noch $\frac{x_i^{(\nu)}}{x_0^{(\nu)}} = \alpha_i^{(\nu)}$, so erhält man aus (α) das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_n'}, \quad \alpha_2 = a_2 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_n'}, \cdots, \alpha_n = a_n + \frac{\alpha_{n-1}'}{\alpha_n'}, \\
&\alpha_1' = a_1' + \frac{1}{\alpha_n''}, \quad \alpha_2' = a_2' + \frac{\alpha_1''}{\alpha_n''}, \cdots, \alpha_n' = a_n' + \frac{\alpha_{n-1}''}{\alpha_n'}, \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

welches den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen bildet. Nach den obigen Ausführungen würde man keine größere Allgemeinheit erzielen, wenn man in gleicher Weise den Ansatz (β) modifizieren würde.

Die in (1) auftretenden ganzen Zahlen $a_i^{(\nu)}$ sind nicht ganz beliebige, vielmehr unterliegen sie gewissen Beschränkungen. Für $\nu \geqq 1$ sind nämlich die Zahlen $\frac{1}{\alpha_n^{(\nu)}}, \frac{\alpha_1^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}, \cdots, \frac{\alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}$ zwischen 0 und 1 gelegen (mit Ausschluß von 1), und deshalb gelten die Ungleichungen

$$
a_n^{(\nu)} \geqq 1, \; a_n^{(\nu)} \geqq a_1^{(\nu)} \geqq 0, \cdots, a_n^{(\nu)} \geqq a_{n-1}^{(\nu)} \geqq 0 \qquad (\text{für } \nu = 1, 2, 3, \cdots).
$$

Dazu kommen noch die folgenden Ergänzungsbedingungen: Ist einmal $a_n^{(\nu)} = a_1^{(\nu)}$, so muß, damit doch $\alpha_n^{(\nu)} > \alpha_1^{(\nu)}$ ist, notwendig $\alpha_{n-1}^{(\nu+1)} > 1$, also $a_{n-1}^{(\nu+1)} \geqq 1$ sein. Ist weiter für ein bestimmtes i etwa $a_n^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$, so folgt

aus entsprechenden Gründen, daß $a_{n-1}^{(\nu+1)} \geqq a_{i-1}^{(\nu+1)}$ sein wird; findet auch hierbei wieder Gleichheit statt, so wird außerdem $a_{n-2}^{(\nu+2)} \geqq a_{i-2}^{(\nu+2)}$ sein usw.*) Setzt man die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ als positiv voraus, so muß auch $a_1 \geqq 0, \cdots, a_n \geqq 0$ sein. Diese Annahme wird in der Theorie der Kettenbrüche (d. h. für $n = 1$) meist gemacht; doch ist im folgenden der Fall negativer α_i und somit negativer a_i, der vielfach eine Sonderbetrachtung erfordert, überall mitberücksichtigt.

Für $n = 1$ führen die Gleichungen (1) bez. (α) auf die gewöhnlichen Kettenbrüche; für $n = 2$ sind sie zuerst in einer nachgelassenen Arbeit von Jacobi**) untersucht, weshalb ich sie allgemein als Jacobischen Kettenbruchalgorithmus bezeichnen will. Weitere Abhandlungen über denselben Gegenstand stammen von Fürstenau***) und Paul Bachmann†). Endlich ist eine Untersuchung von Franz Meyer††) zu nennen, der die Gleichungen (β) zum Ausgangspunkt wählt und auch den Fall eines beliebigen n behandelt. Über den wesentlichen Mangel aller dieser Arbeiten vergleiche man den Schluß von § 4.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß in einigen Arbeiten von Pincherle†††) ein entsprechender Algorithmus auch für die Entwicklung analytischer Funktionen Verwendung gefunden hat; doch werde ich darauf nicht mehr eingehen.

§ 2.

Formale Entwicklungen.

Wenn man in die erste Zeile der Gleichungen (1) für $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ die Werte aus der zweiten Zeile substituiert, sodann für $\alpha_1'', \cdots, \alpha_n''$ die Werte aus der dritten Zeile usw., so erhält man, wie leicht durch vollständige Induktion bewiesen wird, die folgenden Gleichungen

*) Daß weitere Einschränkungen nicht stattfinden, sondern innerhalb der angegebenen Bedingungen die $a_i^{(\nu)}$ ganz beliebig sein können, wird in § 5 gezeigt.

**) Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird. Publ. von Heine, Journ. f. d. reine und angew. Math. 69. — Werke Bd. 6.

***) Über Kettenbrüche höherer Ordnung, Jahresbericht des kgl. Realgymnasiums zu Wiesbaden 1874.

†) Zur Theorie von Jacobis Kettenbruchalgoritbmen, Journal f. d. reine und angew. Math. 75. — Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, zehnte Vorlesung.

††) Verhandlungen des ersten internationalen Math.-Kongresses zu Zürich 1898. — Schriften der Königsberger phys.-ökon. Gesellschaft 38, 1897.

†††) Sulla generalisazione delle frazioni continue algebriche, Annali di mat. 19. — Di un' estenzione dell' algoritmo delle frazioni continue, Rendiconti dell' Istituto Lombardo XXII, u. a. m.

$$(2)\qquad \alpha_i = \frac{A_i^{(\nu)} + A_i^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei für $\nu \leqq n$

$$(3)\qquad A_i^{(i)} = 1, \quad A_i^{(\nu)} = 0 \quad \text{falls} \quad \nu \neq i$$

ist, und für größere Indizes die Rekursionsformeln

$$(4)\qquad A_i^{(\nu+n+1)} = A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

zur Berechnung der Größen $A_i^{(\nu)}$ dienen.*)

Hieraus folgt auch leicht die Beziehung

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} \cdots A_0^{(\nu+n)} \\ A_1^{(\nu)} & A_1^{(\nu+1)} \cdots A_1^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots \\ A_n^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} \cdots A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu}.$$

Bedeuten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ irgend welche Unbestimmte, so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & u_0 & u_1 & \cdots u_n \\ A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)} & A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} \cdots A_0^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots \\ A_n^{(\nu)} + A_n^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_n^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)} & A^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} \cdots A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -u_0 - u_1\alpha_1^{(\nu)} - \cdots - u_n\alpha_n^{(\nu)} & u_0 & u_1 & \cdots u_n \\ 0 & A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} \cdots A_0^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & A_n^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} \cdots A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n\nu+1}\left(u_0 + \alpha_1^{(\nu)} u_1 + \cdots + \alpha_n^{(\nu)} u_n\right).$$

Dividiert man durch $A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}$, indem man in der Determinante die erste Kolonne dividiert, so folgt mit Rücksicht auf (2)

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 0 & u_0 & u_1 & \cdots u_n \\ 1 & A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} \cdots A_0^{(\nu+n)} \\ \alpha_1 & A_1^{(\nu)} & A_1^{(\nu+1)} \cdots A_1^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_n & A_n^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} \cdots A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu+1} \frac{u_0 + \alpha_1^{(\nu)} u_1 + \cdots + \alpha_n^{(\nu)} u_n}{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}.$$

*) Behält man an Stelle von (1) die homogenen Gleichungen (α) bei, so ist auch

$$(2^*)\qquad x_i = A_i^{(\nu)} x_0^{(\nu)} + A_i^{(\nu+1)} x_1^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)} x_n^{(\nu)}, \qquad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Diese Gleichung repräsentiert in Wirklichkeit $n+1$ verschiedene Formeln, und die Einführung der Unbestimmten hat lediglich den Zweck, diese bequem als *eine* Gleichung schreiben zu können. Dividiert man beiderseits den Koeffizienten von u_i durch den von u_0, so erhält man für $i = 1, 2, \cdots, n$ ein System von Gleichungen, das die Auflösung des Systems (2) nach $\alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \alpha_n^{(\nu)}$ darstellt.

Vergleicht man in (6) beiderseits die Koeffizienten von u_n miteinander, sodann nach Verminderung des Index ν um eine Einheit die Koeffizienten von u_0, so findet man linkerhand vom Vorzeichen abgesehen beidemal denselben Wert, woraus

$$\alpha_n^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu-1)} + \cdots + A_0^{(\nu+n-1)}\alpha_n^{(\nu-1)}}$$

folgt. Bringt man diese Formel für $\nu = 1, 2, 3, \cdots, \nu$ zur Anwendung und multipliziert, so ergibt sich schließlich

$$\alpha_n' \alpha_n'' \cdots \alpha_n^{(\nu)} = A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}. \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf (2) (für $i = n$) folgt hieraus noch

$$\alpha_n \alpha_n' \cdots \alpha_n^{(\nu)} = A_n^{(\nu)} + A_n^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_n^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}. \tag{8}$$

Nach (3) und (4) ist $A_i^{(\nu)}$ eine ganze rationale Funktion von gewissen Größen $a_k^{(\mu)}$. Wenn man in dieser Funktion die oberen Indizes der a alle um dieselbe Zahl λ vermehrt, so soll der entstehende Ausdruck mit $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Aus den Formeln (2) bis (8) erhält man dann ebenso viele neue, wenn man die obern Indizes der α und a um λ vermehrt, und zugleich den A einen zweiten untern Index λ beifügt. Insbesondere folgt also aus (4)

$$A_{i,\lambda}^{(\nu+n+1)} = A_{i,\lambda}^{(\nu)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+n)}.$$

Von größter Wichtigkeit ist nun die Relation

$$A_i^{(\lambda+\nu)} = A_{0,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda)} + A_{1,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+1)} + \cdots + A_{n,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+n)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n). \tag{9}$$

Der Beweis ergibt sich einfach mittels der vorigen Gleichung durch vollständige Induktion, nachdem die Formel für $\nu = 0, 1, \cdots, n$ ja evident ist.

Als Spezialfall von (4) merke man für $\nu = 0$

$$A_0^{(n+1)} = 1, \quad A_i^{(n+1)} = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

Aus (9) folgt dann speziell für $\lambda = 1$

$$A_0^{(\nu+1)} = A_{n,1}^{(\nu)},$$
$$A_i^{(\nu+1)} = A_{i-1,1}^{(\nu)} + a_i A_{n,1}^{(\nu)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

oder durch Umkehrung und Vermehrung des Index i um 1

$$(11)\qquad \begin{aligned} A_{n,1}^{(\nu)} &= A_0^{(\nu+1)}, \\ A_{i,1}^{(\nu)} &= A_{i+1}^{(\nu+1)} - a_{i+1} A_0^{(\nu+1)} \qquad (i = 0,1,\cdots,n-1). \end{aligned}$$

Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind rein formaler Natur und bestehen auch zurecht, wenn die $a_i^{(\nu)}$ nicht ganze rationale Zahlen sind, die den in § 1 angegebenen Ungleichungen genügen. Vielmehr können es ganz beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein, und späterhin werden wir auch diese allgemeinere Auffassung zulassen.

§ 3.

Störungen.

Der in § 1 definierte Jacobische Algorithmus kann so lange ungestört weitergeführt werden, als für $\alpha_1^{(\nu)}$ keine ganze Zahl zum Vorschein kommt. Sowie aber etwa für $\nu = \nu_1$ einmal $\alpha_1^{(\nu)}$ eine ganze Zahl wird, so ist $\alpha_1^{(\nu_1)} = a_1^{(\nu_1)}$, und es würde $\alpha_n^{(\nu_1+1)} = \infty$ folgen, so daß der Algorithmus nicht in derselben Weise fortgesetzt werden kann. Eine solche Erscheinung soll kurz als *Störung* bezeichnet werden.

Es ist naheliegend, beim Eintritt einer Störung den Prozeß in folgender Weise fortzusetzen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(\nu_1)} &= a_1^{(\nu_1)} + \frac{0}{\alpha_n^{(\nu_1+1)}}, \quad \alpha_2^{(\nu_1)} = a_2^{(\nu_1)} + \frac{1}{\alpha_n^{(\nu_1+1)}}, \quad \alpha_3^{(\nu_1)} = a_3^{(\nu_1)} + \frac{\alpha_2^{(\nu_1+1)}}{\alpha_n^{(\nu_1+1)}}, \cdots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_n^{(\nu_1)} = a_n^{(\nu_1)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(\nu_1+1)}}{\alpha_n^{(\nu_1+1)}}, \\ 1 &= 1 + \frac{0}{\alpha_n^{(\nu_1+2)}}, \quad \alpha_2^{(\nu_1+1)} = a_2^{(\nu_1+1)} + \frac{1}{\alpha_n^{(\nu_1+2)}}, \quad \alpha_3^{(\nu_1+1)} = a_3^{(\nu_1+1)} + \frac{\alpha_2^{(\nu_1+2)}}{\alpha_n^{(\nu_1+2)}}, \cdots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_n^{(\nu_1+1)} = a_n^{(\nu_1+1)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(\nu_1+2)}}{\alpha_n^{(\nu_1+2)}}, \\ 1 &= 1 + \frac{0}{\alpha_n^{(\nu_1+3)}}, \quad \alpha_2^{(\nu_1+2)} = a_2^{(\nu_1+2)} + \frac{1}{\alpha_n^{(\nu_1+3)}}, \quad \alpha_3^{(\nu_1+2)} = a_3^{(\nu_1+2)} + \frac{\alpha_2^{(\nu_1+3)}}{\alpha_n^{(\nu_1+3)}}, \cdots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_n^{(\nu_1+2)} = a_n^{(\nu_1+2)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(\nu_1+3)}}{\alpha_n^{(\nu_1+3)}}. \end{aligned}$$

. . . . . .

Die erste Kolonne ist hierbei überflüssig und nur der Gleichförmigkeit halber zugefügt, während die $n-1$ andern Kolonnen wieder genau

einen Jacobischen Kettenbruchalgorithmus darstellen, nur ist $n-1$ an Stelle von n getreten. Für die Zahlen $a_i^{(\nu_1+\lambda)}$ gelten daher auch ähnliche Ungleichungen wie die in § 1 angegebenen, die anzuschreiben wohl nicht nötig ist. Dazu kommen aber noch die folgenden Zusatzbedingungen:*)

Es darf nicht gleichzeitig

$$a_n^{(\nu_1+1-n)} = 1,\ a_{n-1}^{(\nu_1+2-n)} = 0, \cdots, a_1^{(\nu_1)} = 0$$

sein. Denn hieraus würde rückwärts sukzessiv folgen $\alpha_1^{(\nu_1)} = 0$, $\alpha_2^{(\nu_1-1)} = 0, \cdots, \alpha_n^{(\nu_1+1-n)} = 1$ und somit wäre $a_1^{(\nu_1-n)}$ nicht die größte in $\alpha_1^{(\nu_1-n)}$ enthaltene ganze Zahl, sondern um 1 kleiner. Ebenso kann auch für kein i gleichzeitig

$$a_n^{(\nu_1+1-n)} = a_i^{(\nu_1+1-n)}, \cdots, a_{n-i+1}^{(\nu_1+i-n)} = a_1^{(\nu_1+i-n)},\ a_{n-i}^{(\nu_1+i+1-n)} = 1,$$
$$a_{n-i-1}^{(\nu_1+i+2-n)} = 0, \cdots, a_1^{(\nu_1)} = 0$$

sein, weil sonst analog $\alpha_n^{(\nu_1+1-n)} = \alpha_i^{(\nu_1+1-n)}$ folgen würde, und somit $a_{i+1}^{(\nu_1-n)}$ nicht die größte in $\alpha_{i+1}^{(\nu_1-n)}$ enthaltene ganze Zahl wäre. Weitere Einschränkungen sind jedoch nicht notwendig (vergl. § 5).

Erfährt der Prozeß noch eine weitere Störung, indem für einen gewissen Wert ν_2 auch $\alpha_2^{(\nu_2)}$ eine ganze Zahl wird, so ist ohne weiteres klar, wie der Algorithmus fortzusetzen ist; ebenso wenn etwa gleichzeitig zwei (oder mehr) Störungen eintreten, indem zugleich $\alpha_1^{(\nu)}$ und $\alpha_2^{(\nu)}$ ganze Zahlen werden.

Beim Eintritt von Störungen erleiden auch die Formeln des § 2 eine Modifikation. So ist leicht zu sehen, daß an Stelle von (2), (4) für $\nu > \nu_1$ bez. die Formeln treten**)

$$(2a) \qquad \alpha_i = \frac{A_i^{(\nu+1)} + A_i^{(\nu+2)}\alpha_2^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu+1)} + A_0^{(\nu+2)}\alpha_2^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$(4a) \quad A_i^{(\nu+n+1)} = A_i^{(\nu+1)} + a_2^{(\nu)} A_i^{(\nu+2)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

*) Diese sind das Analogon zu der Forderung, daß bei einem regulären endlichen Kettenbruch der letzte Teilnenner > 1 sein soll.

**) In welcher Weise bei Eintritt einer weiteren Störung auch diese Formeln wieder abzuändern sind, erkennt man ohne Schwierigkeit. Man kann übrigens die Störungen von vornherein mit berücksichtigen, wenn man an Stelle von (1) den allgemeineren formalen Ansatz macht

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{\alpha_0'}{\alpha_n'},\ \alpha_2 = a_2 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_n'}, \cdots, \alpha_n = a_n + \frac{\alpha_{n-1}'}{\alpha_n'},$$
$$\alpha_1' = a_1' + \frac{\alpha_0''}{\alpha_n''},\ \alpha_2' = a_2' + \frac{\alpha_1''}{\alpha_n''}, \cdots, \alpha_n' = a_n' + \frac{\alpha_{n-1}''}{\alpha_n''}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die in (5) und (6) links stehenden Determinanten werden wegen (4a) für $\nu > \nu_1 + 1$ verschwinden. Aus diesem Umstand ergibt sich nun auch die arithmetische Bedeutung der Störungen. Setzt man nämlich in (6) die Koeffizienten der u_i einzeln gleich 0, so folgen $n+1$ Relationen der Form

$$P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0,$$

wo die P_i ganze rationale Zahlen bedeuten. Diese $n+1$ Relationen erweisen sich übrigens als Multipla einer einzigen unter ihnen; jedoch gilt allgemein der folgende

Satz I. *Erleidet der Jacobische Kettenbruchalgorithmus m Störungen, so existieren mindestens m unabhängige Relationen von der Gestalt*

$$P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0,$$

*wo die P_i ganze rationale Zahlen bedeuten.**)

An Stelle von (2) bez. (2a) tritt nämlich nach m Störungen die Formel

$$(2b)\qquad \alpha_i = \frac{A_i^{(\nu+m)} + A_i^{(\nu+m+1)}\alpha_{m+1}^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu+m)} + A_0^{(\nu+m+1)}\alpha_{m+1}^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

woraus die Richtigkeit des Satzes leicht zu schließen ist.

Für $m = n$ folgt hieraus speziell, daß $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ rationale Zahlen sind. Umgekehrt ist schon in § 1 dargetan, daß, wenn $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ rational

---

An Stelle von (2) und (4) treten dann die Formeln

$$(2')\qquad \alpha_i = \frac{A_i^{(\nu)}\alpha_0^{(\nu)} + A_i^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}\alpha_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_1^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)}\alpha_n^{(\nu)}},$$

$$(4')\qquad A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)}A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)}A_i^{(\nu+n)},$$

wo noch der Symmetrie halber $\alpha_0 = 1$, $\alpha_0^{(\nu)} = a_0^{(\nu)}$ gesetzt ist. Ohne Störungen ist dabei durchweg $a_0^{(\nu)} = 1$; beim Eintritt von Störungen aber, wenn $\nu_1, \nu_2, \cdots$ die obige Bedeutung haben

$$a_0^{(\nu)} = 1 \text{ für } \nu \leqq \nu_1,$$

$$a_0^{(\nu)} = 0,\ a_1^{(\nu)} = 1 \text{ für } \nu_1 < \nu \leqq \nu_2,$$

$$a_0^{(\nu)} = 0,\ a_1^{(\nu)} = 0,\ a_2^{(\nu)} = 1 \text{ für } \nu_2 < \nu \leqq \nu_3$$

usw.

*) Nach einer von Kronecker gelegentlich gebrauchten Redeweise kann man auch sagen: Der *Rationalitätsrang* der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{vmatrix}$$

ist höchstens gleich $n - m$.

sind, der Algorithmus auch wirklich n Störungen erfährt und somit nach einer endlichen Anzahl von Operationen überhaupt ein Ende findet*). Die weitere Frage aber, ob sich der Satz I auch für beliebiges m umkehren läßt, d. h. ob auch stets m Störungen stattfinden, wenn zwischen den α_i m unabhängige lineare Relationen bestehen, muß, wie sogleich an einem Beispiel gezeigt werden soll, wenigstens für $n \geqq 3$ in verneinendem Sinn entschieden werden.

Zu dem Ende seien $b_1, b_2, \cdots, b_n$ positive ganze rationale Zahlen, die den Bedingungen genügen:

$$b_n > 1,\ b_n > b_1, \cdots, b_n > b_{n-1},$$
$$1 - b_1 + b_2 - \cdots + (-1)^n b_n = (-1)^{n+1}.$$

Für $n \geqq 3$ sind diese stets gleichzeitig erfüllbar (nicht aber für $n = 2$). Die Gleichung

$$f(x) = x^{n+1} - b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \cdots - b_1 x - 1 = 0$$

hat dann die Wurzel -1 und außerdem nach der Descartesschen Zeichenregel eine und nur eine positive Wurzel, die mit ϱ_0 bezeichnet werden möge. Da leicht zu sehen, daß $f(b_n) < 0$, $f(b_n + 1) > 0$ ist, so liegt ϱ_0 zwischen b_n und $b_n + 1$.

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \varrho_0, \\
\alpha_{n-1} &= \varrho_0^2 - b_n \varrho_0, \\
\alpha_{n-2} &= \varrho_0^3 - b_n \varrho_0^2 - b_{n-1} \varrho_0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_1 &= \varrho_0^n - b_n \varrho_0^{n-1} - b_{n-1} \varrho_0^{n-2} - \cdots - b_2 \varrho_0,
\end{aligned}$$

so findet man ebenso leicht, daß α_i zwischen b_i und $b_i + 1$ gelegen ist (mit Ausschluß der Grenzen). Wendet man daher auf diese Zahlen den Jacobischen Kettenbruchalgorithmus an, so ist zunächst $a_i = b_i$ zu setzen, und man erhält

$$\alpha_1 = b_1 + \frac{1}{\alpha_n'},\ \alpha_2 = b_2 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_n'}, \cdots, \alpha_n = b_n + \frac{\alpha_{n-1}'}{\alpha_n'}.$$

Aus der Definition der α_i folgt aber mit Rücksicht auf die Beziehung $f(\varrho_0) = 0$ auch

$$\alpha_1 = b_1 + \frac{1}{\alpha_n},\ \alpha_2 = b_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \cdots, \alpha_n = b_n + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n};$$

daher ist $\alpha_1' = \alpha_1, \cdots, \alpha_n' = \alpha_n$. Der Algorithmus geht also in derselben Weise (periodisch) weiter, und es ist für jedes ν

$$\alpha_1^{(\nu)} = \alpha_1, \cdots, \alpha_n^{(\nu)} = \alpha_n.$$

*) In allen anderen Fällen ist er unbegrenzt.

Aus diesem Grund kann für keinen Wert von ν jemals $a_1^{(\nu)}$ eine ganze Zahl sein, also erfährt der Algorithmus keine Störungen. Andrerseits ist aber der Grad des aus ϱ_0 entspringenden algebraischen Körpers kleiner als $n+1$, weil ja $f(x)=0$ auch die Wurzel -1 hat, also reduzibel ist. Zwischen irgend $n+1$ Zahlen dieses Körpers existiert sonach eine lineare homogene Relation mit rationalen Koeffizienten; eine solche besteht also auch zwischen den Zahlen $1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$.*)

Für $n \geqq 3$ ist hiernach der Satz I gewiß nicht umkehrbar. Ob auch schon für $n=2$ dasselbe gilt, oder ob dann im Gegenteil die Existenz einer Gleichung $P_0 + P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 = 0$ mit rationalen P_i notwendig eine Störung des Jacobischen Algorithmus nach sich zieht, vermochte ich nicht zu entscheiden.

Bei den Kettenbrüchen ($n=1$) gibt es nur zwei Möglichkeiten; entweder der Kettenbruch ist unendlich, oder es tritt eine Störung ein, er ist endlich. Im ersten Fall ist sein Wert irrational, im zweiten rational. Im Gegensatz dazu schieben sich für $n>1$ zwischen diese extremen Fälle noch $n-1$ Zwischenstufen ein, und wie man sieht, zeigen gerade diese ein besonderes, irreguläres Verhalten.

§ 4.

Allgemeiner Konvergenzbeweis.

Wenn die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ alle rational sind, so erleidet nach obigem der Algorithmus n Störungen, so daß, wie schon bei (2b) bemerkt, an Stelle der Formel (2) für ein gewisses ν die Beziehung tritt

$$\alpha_i = \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

Sowie aber einige oder alle α_i irrational sind, und also der Prozeß (eventuell nach mehreren Störungen) ins Unendliche verläuft, so erhebt sich die Frage, ob diese Relation wenigstens näherungsweise erfüllt ist, in dem Sinne, daß der Fehler für genügend große Werte von ν beliebig klein wird, wie dies bekanntlich bei den Kettenbrüchen der Fall ist.

Die Antwort auf diete Frage vermittelt der

Satz II. *Wenn unendlich viele reelle Größen* $a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \cdots, a_n^{(\nu)}$ $(\nu=0,1,\cdots,\infty)$ *vorliegen, die den Einschränkungen unterworfen sind:*

$$a_0 > 0, \quad 0 < \frac{1}{a_n^{(\nu)}} \leqq C, \quad 0 \leqq \frac{a_i^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \leqq C \quad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

wo C eine von ν unabhängige, im übrigen aber auch beliebig große Zahl

*) Durch eine genauere Rechnung findet man $1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n = 0$.

bedeutet; wenn dann weiter aus den $a_i^{(\nu)}$ *unendlich viele andere Zahlen* $A_i^{(\nu)}$ *vermittelst der rekurrenten Formeln*

$$(3') \qquad A_i^{(i)} = 1, \quad A_i^{(\nu)} = 0 \quad (i, \nu = 0, 1, \cdots, n;\ i \neq \nu),$$

$$(4') \quad A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

hergeleitet werden: so konvergieren die Quotienten $\frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \cdots, \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ *mit wachsendem* ν *gegen bestimmte endliche Grenzwerte, und zwar ist allgemein* $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} > 0$; *nur wenn für jedes* ν *mindestens eine der* $n+1$ *Zahlen* $A_i^{(\nu)}, A_i^{(\nu+1)}, \cdots, A_i^{(\nu+n)}$ *verschwindet, ist* $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = 0$.*)

Sehen wir zunächst zu, was sich hieraus folgern läßt. Die aus dem Jacobischen Kettenbruchalgorithmus entspringenden Zahlen $a_i^{(\nu)}$ genügen für $\nu > 0$ nach § 1 und, falls Störungen eintreten, nach § 3 jedenfalls den Bedingungen dieses Satzes (es kann $C = 1$ gesetzt werden). Wenn zunächst auch für $\nu = 0$ diese Bedingungen erfüllt sind, so konvergieren die Quotienten $\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ mit wachsendem ν gegen feste Grenzen. Daß diese aber auch den Ausgangswerten α_i bez. gleich sind, lehrt dann die Formel (2). Diese läßt sich nämlich in der Gestalt schreiben:

$$\alpha_i = \frac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)} \alpha_n^{(\nu)}} \cdot \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + \frac{A_0^{(\nu+1)} \alpha_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)} \alpha_n^{(\nu)}} \cdot \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \cdots + \frac{A_0^{(\nu+n)} \alpha_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)} + \cdots + A_0^{(\nu+n)} \alpha_n^{(\nu)}} \cdot \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}},$$

oder kürzer

$$\alpha_i = \lambda_0^{(\nu)} \cdot \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + \lambda_1^{(\nu)} \cdot \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} \cdot \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}},$$

wo $\lambda_1^{(\nu)}, \cdots, \lambda_n^{(\nu)}$ positive Zahlen mit der Summe 1 bedeuten, also zwischen 0 und 1 liegen. Hieraus folgt, wenn man zunächst $\lim \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \beta_i$ setzt:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \lambda_0^{(\nu)}(\beta_i - \varepsilon_0) + \lambda_1^{(\nu)}(\beta_i - \varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}(\beta_i - \varepsilon_n) \\ &= \beta_i - (\lambda_0^{(\nu)} \varepsilon_0 + \lambda_1^{(\nu)} \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} \varepsilon_n), \end{aligned}$$

*) Die Bedingung $a_0 > 0$ ist nicht allgemeiner, als $a_0 = 1$, da, wie leicht zu sehen, a_0 nur als Faktor von $A_0^{(\nu)}$ auftritt.

wo die $|\varepsilon|$ mit wachsendem ν unter jede Grenze sinken. Da auch die λ zwischen 0 und 1 liegen, so schließt man $\alpha_i = \beta_i$. Daraus ergibt sich der fundamentale

Satz III. *Die Quotienten*

$$\frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \cdots, \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$$

nähern sich mit wachsendem ν bez. den Grenzwerten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$; oder als Formel geschrieben:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{12}$$

Läßt man jetzt die willkürliche Einschränkung fallen, daß $a_1, \cdots, a_n$ den Bedingungen des Satz II genügen, so sind für $\nu \geqq 1$ die fraglichen Bedingungen doch jedenfalls erfüllt, und daraus folgt, daß wenigstens die Brüche $\frac{A_{i,k}^{(\nu)}}{A_{0,k}^{(\nu)}}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ mit wachsendem ν gegen bestimmte Grenzen konvergieren, und zwar ist analog zu (12)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,k}^{(\nu)}}{A_{0,k}^{(\nu)}} = \alpha_i^{(k)}. \tag{13}$$

Speziell für $k = 1$ folgt hieraus auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}} = \frac{1}{\alpha_n'}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}} = \frac{\alpha_i'}{\alpha_n'},$$

und sodann unter Berücksichtigung der Formeln (11)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_1 + \frac{1}{\alpha_n'} = \alpha_1, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i+1}^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_{i+1} + \frac{\alpha_i^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} = \alpha_{i+1}.$$

Der Satz III gilt sonach allgemein, und wir wollen deshalb die Quotienten $\frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \cdots, \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ als *Näherungsbrüche der Zahlen* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ bezeichnen.

Um jetzt den Satz II zu beweisen, beachte man, daß nach (3′) und (4′)

$$A_0^{(n+1)} = a_0 > 0; \quad A_0^{(n+\nu+1)} \geqq a_n^{(\nu)} A_0^{(n+\nu)} \geqq \frac{1}{C} A_0^{(n+\nu)},$$

also auch

$$A_0^{(\mu+\nu)} \geqq \frac{1}{C^\mu} A_0^{(\nu)}$$

ist. Deshalb sind für $\nu > n$ alle $A_0^{(\nu)} > 0$, und die Quotienten $\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ haben

somit einen Sinn. Es werde daher $\nu > n$ angenommen und dann die kleinste, bez. größte der $n+1$ Zahlen

$$\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}}, \cdots, \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}$$

mit $\beta_i^{(\nu)}$ bez. $B_i^{(\nu)}$ bezeichnet; dies sind dann endliche positive (eventuell verschwindende) Zahlen, und zwar ist $B_i^{(\nu)} \geqq \beta_i^{(\nu)}$. Aus (4') folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{a_i^{(\nu)} A_0^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = \lambda_i^{(\nu)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

gesetzt wird:

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = \lambda_0^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + \lambda_1^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}. \tag{14}$$

Da offenbar $\lambda_i^{(\nu)} \geqq 0$ und (wieder nach (4')) $\lambda_0^{(\nu)} + \lambda_1^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} = 1$ ist, so folgt hieraus

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} \geqq \lambda_0^{(\nu)} \beta_i^{(\nu)} + \lambda_1^{(\nu)} \beta_i^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} \beta_i^{(\nu)} = \beta_i^{(\nu)},$$

und also gewiß auch

$$\beta_i^{(\nu+1)} \geqq \beta_i^{(\nu)}.$$

Ebenso ergibt sich $B_i^{(\nu+1)} \leqq B_i^{(\nu)}$, und folglich

$$0 \leqq \beta_i^{(\nu)} \leqq \beta_i^{(\nu+1)} \leqq B_i^{(\nu+1)} \leqq B_i^{(\nu)}.$$

Nach einem bekannten Satz konvergieren daher die Zahlen $\beta_i^{(\nu)}$, $B_i^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen gewisse Grenzwerte β_i, bez. B_i, und es ist

$$0 \leqq \beta_i^{(\nu)} \leqq \beta_i \leqq B_i \leqq B_i^{(\nu)}.$$

Satz II wird nun bewiesen sein, sowie gezeigt ist, daß gewiß $\beta_i = B_i$ statthat. Nehmen wir also an, es sei $\beta_i < B_i$. Bedeutet dann ε eine beliebig kleine positive Größe, so ist wegen $\lim \beta_i^{(\nu)} = \beta_i$ doch $\beta_i^{(\nu)} = \beta_i - \varepsilon$, sowie nur ν eine gewisse Zahl ν' überschreitet; daher ist auch $\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} > \beta_i - \varepsilon$ für $\nu > \nu'$.

Aus (14) ergibt sich alsdann

$$\begin{aligned}\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} &> \left(\lambda_0^{(\nu)} + \lambda_1^{(\nu)} + \cdots + \lambda_{n-1}^{(\nu)}\right)\left(\beta_i - \varepsilon\right) + \lambda_n^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \\ &= \left(1 - \lambda_n^{(\nu)}\right)\left(\beta_i - \varepsilon\right) + \lambda_n^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}\end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \beta_i > \lambda_n^{(\nu)} \left(\frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} - \beta_i \right) - \varepsilon .$$

Beachtet man jetzt, daß nach unseren Voraussetzungen

$$\frac{\lambda_i^{(\nu)}}{\lambda_n^{(\nu)}} = \frac{a_i^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \frac{A_0^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu+n)}} \leqq C C^{n-i} = C^{n+1-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

ist, so folgt zunächst

$$1 = \lambda_0^{(\nu)} + \lambda_1^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} \leqq \lambda_n^{(\nu)} \left(C^{n+1} + C^n + \cdots + 1 \right),$$

also

$$\lambda_n^{(\nu)} \geqq \frac{1}{1 + C + C^2 + \cdots + C^{n+1}} .$$

Daher bleibt $\lambda_n^{(\nu)}$ *stets über einer von* ν *unabhängigen positiven Zahl;* bezeichnen wir diese zur Abkürzung mit $\frac{1}{M}$, so ergibt sich aus der zuletzt abgeleiteten Ungleichung

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \beta_i > \frac{1}{M} \left(\frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} - \beta_i \right) - \varepsilon .$$

Dies gilt für $\nu > \nu'$. Man kann also ν durch $\nu + 1, \nu + 2, \cdots$ ersetzen und erhält dann leicht die allgemeinere Ungleichung:

$$\frac{A_i^{(\nu+n+k)}}{A_0^{(\nu+n+k)}} - \beta_i > \frac{1}{M^k} \left(\frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} - \beta_i \right) - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} + \cdots + \frac{1}{M^{k-1}} \right).$$

Dazu bemerke man folgendes. Von $n+1$ Quotienten $\frac{A_i^{(\mu)}}{A_0^{(\mu)}}$, wo der Index μ irgend $n+1$ aufeinander folgende Werte durchlaufen soll, ist mindestens einer (nämlich der kleinste) einem $\beta_i^{(\nu)}$ gleich, also $\leqq \beta_i$; ebenso ist auch mindestens einer $\geqq B_i$. Man kann daher auch $\nu\ (> \nu')$ so auswählen, daß $\frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \geqq B_i$, und sodann k unter den Zahlen $1, 2, \cdots, n+1$ derart bestimmen, daß $\frac{A_i^{(\nu+n+k)}}{A_0^{(\nu+n+k)}} \leqq \beta_i$ ist. Alsdann folgt aus der letzten Ungleichung

$$0 > \frac{1}{M^k} (B_i - \beta_i) - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} + \cdots + \frac{1}{M^{k-1}} \right).$$

Dies ist aber, da ε beliebig klein gewählt werden kann, mit der Annahme $B_i - \beta_i > 0$ nicht verträglich, also ist $B_i - \beta_i = 0$, w. z. b. w.

Der Kern des Beweises liegt in dem Umstand, daß man für $\lambda_n^{(\nu)}$ *eine von* ν *unabhängige untere Grenze* angeben kann. In der Tat läßt sich die

Konvergenz mit denselben Mitteln noch in viel allgemeineren Fällen erweisen, in denen die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ geringeren Einschränkungen unterworfen sind; nämlich allemal dann, wenn für $\lambda_n^{(\nu)}$ (oder auch für $\lambda_i^{(\nu)}$) eine solche untere Grenze existiert. Für $n = 1$ führt die Methode zu dem bekannten Satz, daß der Kettenbruch $a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots$ mit lauter positiven a_ν, b_ν konvergirt, wenn $\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu-1} a_\nu}{b_\nu} > 0$. Durch eine leichte Modifikation des Beweisgangs erhält man sogar eine unendliche Folge von neuen sukzessive schärferen Konvergenzkriterien.*)

Durch den Nachweis der Konvergenz, der hiermit zum ersten Mal in voller Strenge geführt ist, wird für die weitere Theorie erst die notwendige Grundlage geschaffen. Bei Jacobi und Fürstenau wird diese fundamentale Frage gar nicht aufgeworfen, wohl aber bisweilen stillschweigend die Konvergenz vorausgesetzt; auch sprechen beide Autoren von Näherungsbrüchen, wozu jedoch ohne Konvergenzbeweis die Berechtigung fehlt. Jacobi stellt zwar Formeln auf**), die über die Annäherung Aufschluß geben sollen, in Wirklichkeit kann aber daraus nichts geschlossen werden. Franz Meyer l. c. suchte durch geometrische Betrachtungen diese Lücke auszufüllen, und auch das Gesetz der Annäherung genauer zu bestimmen. Jedoch auch diese Untersuchungen reichen soweit sie überhaupt richtig sind, nicht aus, um die Konvergenz allgemein erkennen zu lassen. Nur Bachmann hat l. c. für $n = 2$ in einem ganz speziellen Fall die Konvergenz wirklich bewiesen, indem er zugleich das richtige Näherungsgesetz angab. Sein Resultat, das wir später noch auf anderm Weg bestätigen werden, lautet:

Wenn $\alpha_1 = \sqrt[3]{D}$, $\alpha_2 = \sqrt[3]{D^2}$ (D = positiv rational ganz, aber kein Kubus), und wenn zugleich der Algorithmus periodisch ist (vergl. § 9)***), dann gilt die Beziehung

$$\left| \alpha_i - \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{k}{A_0^{(\nu)} \sqrt{A_0^{(\nu)}}},$$

wo k eine von ν unabhängige Zahl bedeutet.

---

*) Vergl. die Arbeit des Verfassers: Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Akademie 35, 1905.

**) Formel (24) der genannten Arbeit.

***) Daß diese zwei Bedingungen gleichzeitig eintreten können, ergibt sich aus Beispielen ($D = 2, 3, 5, \cdots$).

§ 5.

Eindeutigkeit.

Bekanntlich läßt sich eine reelle Zahl nur auf eine einzige Weise in einen regulären Kettenbruch verwandeln, d. h. wenn zwei reguläre Kettenbrüche auch nur in einem einzigen Glied voneinander abweichen, so haben sie verschiedene Werte. Um diesen Satz auch auf den Jacobischen Algorithmus entsprechend auszudehnen, seien irgend welche unendlich viele Zahlen

$$a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)},\ \cdots,\ a_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

vorgelegt, die den in § 1 angegebenen Ungleichungen genügen. Bildet man dann mittels der Formeln (3) und (4) die Zahlen $A_i^{(\nu)}$, so konvergieren nach Satz II die Brüche $\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ mit wachsendem ν gegen bestimmte Grenzwerte, so daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt werden kann.*) Die so definierten Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ entwickle man jetzt nach dem Jacobischen Algorithmus

$$(1') \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 = b_1 + \frac{1}{\beta_n'},\ \alpha_2 = b_2 + \frac{\beta_1'}{\beta_n'},\ \cdots,\ \alpha_n = b_n + \frac{\beta_{n-1}'}{\beta_n'}, \\ &\beta_1' = b_1' + \frac{1}{\beta_n''},\ \beta_2' = b_2' + \frac{\beta_1''}{\beta_n''},\ \cdots,\ \beta_n' = b_n' + \frac{\beta_{n-1}''}{\beta_n''}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Zunächst ist durchaus nicht ersichtlich, daß dabei notwendig $b_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}$ wird, doch soll dies jetzt allgemein bewiesen werden. Zu dem Ende leite man aus $A_i^{(\nu)}$ weitere Zahlen $A_{i,k}^{(\nu)}$ dadurch ab, daß man die oberen Indizes der a sämtlich um k vermehrt, und setze

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,k}^{(\nu)}}{A_{0,k}^{(\nu)}} = \alpha_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, 3, \cdots, \infty).$$

Nach Satz II sind dann die $\alpha_i^{(k)}$ positive, nicht verschwindende**) Größen. Weiter gelten aber nach der hier angegebenen Definition der $A_i^{(\nu)}$, $A_{i,k}^{(\nu)}$ die Formeln (11), also ist

---

*) Im Gegensatz zu (12) dient diese Formel hier zur *Definition* der Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

**) da durchweg $a_0^{(\nu)} = 1$, also $A_i^{(\nu)} > 0$ für $\nu > n + i$ ist.

$$\frac{A_{i+1}^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} = a_{i+1} + \frac{A_{i,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

und wenn man zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht,

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_n'}, \quad \alpha_2 = a_2 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_n'}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = a_n + \frac{\alpha_{n-1}'}{\alpha_n'}.$$

Ebenso folgt allgemeiner

$$(1'') \quad \alpha_1^{(k-1)} = a_1^{(k-1)} + \frac{1}{\alpha_n^{(k)}}, \; \alpha_2^{(k-1)} = a_2^{(k-1)} + \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}}, \cdots, \alpha_n^{(k-1)} = a_n^{(k-1)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}}$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots, \infty),$$

und somit

$$\alpha_i^{(k-1)} > a_i^{(k-1)}.$$

Nach Voraussetzung ist aber für $k \geqq 1$: $a_n^{(k)} \geqq 1$, also auch

$$\alpha_n^{(k)} > 1 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, \infty).$$

Mit Rücksicht hierauf ist

$$\alpha_1^{(k-1)} = a_1^{(k-1)} + \frac{1}{\alpha_n^{(k)}} < a_1^{(k-1)} + 1.$$

Nach Voraussetzung ist weiter $a_n^{(k)} \geqq a_1^{(k)}$. Falls $a_n^{(k)} > a_1^{(k)}$, so folgt demnach

$$\alpha_n^{(k)} > a_n^{(k)} \geqq a_1^{(k)} + 1 > \alpha_1^{(k)}.$$

Falls aber $a_n^{(k)} = a_1^{(k)}$, so ist nach Voraussetzung auch $a_{n-1}^{(k+1)} \geqq 1$; daher

$$\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(k+1)}}{\alpha_n^{(k+1)}} > a_n^{(k)} + \frac{a_{n-1}^{(k+1)}}{\alpha_n^{(k+1)}} \geqq a_n^{(k)} + \frac{1}{\alpha_n^{(k+1)}} = \alpha_1^{(k)}.$$

In beiden Fällen erweist sich also $\alpha_n^{(k)} > \alpha_1^{(k)}$, woraus weiter folgt:

$$\alpha_2^{(k-1)} = a_2^{(k-1)} + \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}} < a_2^{(k-1)} + 1.$$

Es ist klar, wie man sukzessive weiter zu schließen hat, um allgemein die Ungleichung

$$\alpha_i^{(k-1)} < a_i^{(k-1)} + 1$$

zu bestätigen. Da aber andrerseits $\alpha_i^{(k-1)} > a_i^{(k-1)}$ ist, so ist stets $a_i^{(k-1)}$ die größte in $\alpha_i^{(k-1)}$ enthaltene ganze Zahl.

Für $k = 1$ folgt jetzt zunächst, daß a_i die größte in α_i enthaltene ganze Zahl ist, also $a_i = b_i$. Die Vergleichung von (1') mit (1'') liefert dann auch $\alpha_i' = \beta_i'$. Es ist aber wieder a_i' die größte in α_i', also in β_i' enthaltene ganze Zahl, daher $a_i' = b_i'$ usw.

Wir fassen das Resultat dieser Untersuchung zusammen in den

Satz IV. *Wenn zwei unendliche Zahlenmengen* $a_1^{(\nu)}, \cdots, a_n^{(\nu)} (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ *und* $b_1^{(\nu)}, \cdots, b_n^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ *gegeben sind, die beide den in* § 1 *aufgestellten Ungleichungen genügen; wenn ferner aus den* $a_i^{(\nu)}$ *mittels* (3) *und* (4) *die Größen* $A_i^{(\nu)}$ *und aus den* $b_i^{(\nu)}$ *die entsprechenden Größen* $B_i^{(\nu)}$ *gebildet werden, so können die n Gleichungen*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{B_1^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}, \cdots, \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{B_n^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}$$

nur dann zugleich bestehen, wenn durchweg $a_i^{(\nu)} = b_i^{(\nu)}$ *ist.*

Als Nebenresultat ergibt sich hieraus noch, daß für die $a_i^{(\nu)}$ keine weiteren Bedingungen notwendig sind, als die in § 1 angegebenen.

Berücksichtigt man auch das eventuelle Vorkommen von Störungen, so sind die $\alpha_i^{(\nu)}$ nicht durchweg positiv, sie können zum Teil verschwinden. Dadurch wird der Eindeutigkeitsbeweis etwas kompliziert; das Prinzip bleibt aber dasselbe und die angedeuteten Schwierigkeiten lassen sich mit gehöriger Berücksichtigung der in § 3 aufgestellten Zusatzbedingungen für die $a_i^{(\nu)}$ unschwer überwinden. Der Satz IV erfährt dann eine entsprechende Erweiterung.

§ 6.

Langsame Annäherung.

Bekanntlich lassen sich n reelle Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ derart durch n rationale Brüche mit demselben Nenner beliebig nahe annähern, daß zugleich auch

$$\left| \alpha_i - \frac{P_i}{P_0} \right| < \frac{1}{P_0 \sqrt[n]{P_0}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

wird.*) Für $n = 1$ sind die Näherungswerte des zugehörigen Kettenbruchs von dieser Beschaffenheit, und man könnte darnach vermuten, daß auch bei dem Jacobischen Algorithmus

$$\left| \alpha_i - \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{1}{A_0^{(\nu)} \sqrt[n]{A_0^{(\nu)}}},$$

oder wenigstens

$$\left| \alpha_i - \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{k}{A_0^{(\nu)} \sqrt[n]{A_0^{(\nu)}}}$$

ist, wo k eine von ν unabhängige endliche Zahl bedeutet. Diese Vermutung wird noch wesentlich gestützt durch den am Schluß von § 4

*) Vergl. Minkowski: Geometrie der Zahlen pag. 109.

erwähnten Satz von Bachmann. Nach längeren vergeblichen Beweisversuchen gelangte ich indes zu der Erkenntnis, daß gleichwohl dieses Näherungsgesetz für $n > 1$ nicht richtig ist. Vielmehr zeigt sich, daß sogar die weit weniger sagende Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \left(A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} \right) = 0$$

im allgemeinen nicht zutrifft.*)

Um dies zunächst für $n \geqq 3$ einzusehen, betrachten wir wieder das schon in § 3 pag. 11 behandelte Beispiel, wo $\alpha_i^{(\nu)} = \alpha_i$ war, und außerdem zwischen den α_i eine Relation der Form

$$P_0 + P_1 \alpha_1 + \cdots + P_n \alpha_n = 0$$

mit ganzen rationalen P_i stattfand. Wenn dann die obige Formel richtig wäre, so würden die Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(\nu+1)} - \alpha_1 A_0^{(\nu+1)}, & A_1^{(\nu+2)} - \alpha_1 A_0^{(\nu+2)}, \cdots, & A_1^{(\nu+n)} - \alpha_1 A_0^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^{(\nu+1)} - \alpha_n A_0^{(\nu+1)}, & A_n^{(\nu+2)} - \alpha_n A_0^{(\nu+2)}, \cdots, & A_n^{(\nu+n)} - \alpha_n A_0^{(\nu+n)} \end{vmatrix}$$

sämtlich unter eine beliebig kleine Grenze sinken, wenn nur ν hinreichend groß gewählt wird. Nach einem Satz, dessen Beweis ich, um hier die Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, erst in § 8 nachtragen werde, müßte dann die Determinante notwendig verschwinden. Daß dies aber in Wahrheit für keinen endlichen Wert von ν der Fall ist, erkennt man, wenn man sie durch Ränderung auf die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & A_0^{(\nu+1)} & \cdots & A_0^{(\nu+n)} \\ \alpha_1 & A_1^{(\nu+1)} & \cdots & A_1^{(\nu+n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & A_n^{(\nu+1)} & \cdots & A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix}$$

bringt. Denn nach Formel (6) ergibt sich hierfür mit Rücksicht auf $\alpha_i^{(\nu)} = \alpha_i$ der für große ν zwar beliebig kleine, aber nie verschwindende Wert

$$\frac{\pm 1}{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)} \alpha_1 + \cdots + A_0^{(\nu+n)} \alpha_n}.$$

Für $n = 2$ gelten diese Betrachtungen nicht; doch führt hier das folgende Beispiel zum Ziel:

Man wähle

$$a_1^{(2\nu+1)} = 0, \quad a_2^{(2\nu+1)} = 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \infty),$$

*) Selbst $\lim_{\nu=\infty} \left| A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} \right|$ ist im allgemeinen nicht 0; siehe die Fußnote p. 67.

während die a mit geradem obern Index beliebig sein können bis auf die Einschränkung, daß

$$\frac{2+a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}} < \frac{1}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, \infty)$$

ist, und außerdem das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu}\left(1 - \frac{2+a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}}\right)$$

konvergiert. Die in § 1 den $a_i^{(\nu)}$ auferlegten Bedingungen sind damit eo ipso erfüllt, und es ist somit nach § 5 $a_i^{(\nu)}$ stets die größte in $\alpha_i^{(\nu)}$ enthaltene ganze Zahl, was für das Folgende wesentlich ist.

Zur Abkürzung werde

$$A_1^{(\nu)} - \alpha_1 A_0^{(\nu)} = H_\nu$$

gesetzt; dann folgt aus (2) die Rekursionsformel

$$H_{\nu+2} = -\frac{1}{\alpha_2^{(\nu)}} H_\nu - \frac{\alpha_1^{(\nu)}}{\alpha_2^{(\nu)}} H_{\nu+1}, \tag{15}$$

während $H_1 = 1$, $H_2 = 0$ ist. Wir beweisen nun zunächst, daß $\frac{H_{2\nu}}{H_{2\nu-1}}$ für alle ν ($\geqq 1$) in dem Intervall

$$0 \geqq \frac{H_{2\nu}}{H_{2\nu-1}} > -1 \tag{16}$$

gelegen ist. Für $\nu = 1$ ist dies offenbar der Fall, und um es allgemein einzusehen, wenden wir die vollständige Induktion an. Angenommen also, die Ungleichung sei für einen gewissen Wert von ν richtig, so folgt zunächst aus (15)

$$-\frac{H_{2\nu+1}}{H_{2\nu-1}} = \frac{1}{\alpha_2^{(2\nu-1)}} + \frac{\alpha_1^{(2\nu-1)}}{\alpha_2^{(2\nu-1)}} \cdot \frac{H_{2\nu}}{H_{2\nu-1}},$$

und hieraus mit Rücksicht auf (16) und die oben angegebenen Werte von $a_1^{(\nu)}$, $a_2^{(\nu)}$

$$-\frac{H_{2\nu+1}}{H_{2\nu-1}} > \frac{1}{\alpha_2^{(2\nu-1)}} - \frac{\alpha_1^{(2\nu-1)}}{\alpha_2^{(2\nu-1)}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}}} - \frac{1}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} > 1 - \frac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(2\nu)}} > 1 - \frac{2+a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}},$$

mithin

$$-\frac{H_{2\nu+1}}{H_{2\nu-1}} > \frac{1}{2}. \tag{A}$$

Des weitern ergibt sich durch zweimalige Anwendung von (15)

$$\frac{H_{2\nu+2}}{H_{2\nu-1}} = \frac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} - \frac{\alpha_2^{(2\nu-1)} - \alpha_1^{(2\nu)}\alpha_1^{(2\nu-1)}}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} \cdot \frac{H_{2\nu}}{H_{2\nu-1}}$$

$$= \frac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} + \frac{\alpha_2^{(2\nu-1)} - \dfrac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}}}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} \cdot \left| \frac{H_{2\nu}}{H_{2\nu-1}} \right|.$$

Hieraus folgt einerseits

(B) $$\frac{H_{2\nu+2}}{H_{2\nu-1}} > 0,$$

anderseits

$$\frac{H_{2\nu+2}}{H_{2\nu-1}} < \frac{\alpha_1^{(2\nu)}}{\alpha_2^{(2\nu)}} + \frac{\alpha_2^{(2\nu-1)}}{\alpha_2^{(2\nu)}\alpha_2^{(2\nu-1)}} = \frac{\alpha_1^{(2\nu)} + 1}{\alpha_2^{(2\nu)}} < \frac{2 + a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}},$$

also

(Γ) $$\frac{H_{2\nu+2}}{H_{2\nu-1}} < \frac{1}{2}.$$

Aus (A), (B), (Γ) folgt nun sofort, daß $H_{2\nu+1}$ und $H_{2\nu+2}$ entgegengesetzte Zeichen haben, und daß $|H_{2\nu+1}| > |H_{2\nu+2}|$ ist. Damit ist (16) in der Tat allgemein bewiesen. Infolgedessen besteht aber auch die vorhin aus (16) abgeleitete Ungleichung

$$-\frac{H_{2\nu+1}}{H_{2\nu-1}} > 1 - \frac{2 + a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}}$$

zu Recht, woraus weiter für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$ folgt

$$(-1)^\lambda H_{2\lambda+1} > \prod_{\nu=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{2 + a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}}\right) > \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2 + a_1^{(2\nu)}}{a_2^{(2\nu)}}\right).$$

Da das unendliche Produkt nach Voraussetzung konvergiert, so bleibt $|H_{2\lambda+1}|$ stets über einer festen Grenze, wie groß auch λ werden mag, und somit ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| A_1^{(\nu)} - \alpha_1 A_0^{(\nu)} \right| > 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Durch dieses Beispiel wird auch, wenn man nur $a_1^{(2\nu)}$, $a_2^{(2\nu)}$ genügend stark wachsen läßt, das von F. Meyer in der zweiten der zitierten Arbeiten unter Ziffer XIV angegebene Näherungsgesetz widerlegt.

§ 7.

Ein bemerkenswerter Fall stärkerer Annäherung.

Die Beziehung $\lim_{\nu=\infty}\left(A_i^{(\nu)}-\alpha_i A_0^{(\nu)}\right)=0$, welche nach vorigem im allgemeinen nicht richtig ist, kann jedoch, wie schon der Bachmannsche Satz zeigt, in speziellen Fällen zutreffen. Eine umfangreiche Klasse solcher Spezialfälle enthält der folgende

Satz V. *Wenn für alle Werte von ν, oder wenigstens für solche, die größer als eine Zahl ν' sind, stets*

$$\frac{n+a_1^{(\nu)}+\cdots+a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}\leqq\vartheta<1$$

ist, dann ist notwendig

$$\lim_{\nu=\infty}\left(A_i^{(\nu)}-\alpha_i A_0^{(\nu)}\right)=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

Zum Beweis setze man abkürzend

$$A_i^{(\nu)}-\alpha_i A_0^{(\nu)}=H_\nu\text{*)},$$

dann folgt aus (2)

$$H_{\nu+n}=-\frac{1}{\alpha_n^{(\nu)}}H_\nu-\frac{\alpha_1^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}H_{\nu+1}-\cdots-\frac{\alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}H_{\nu+n-1},$$

also wenn man den größten der absoluten Beträge von $H_\nu, H_{\nu+1},\cdots,H_{\nu+n-1}$ mit M_ν bezeichnet,

$$|H_{\nu+n}|\leqq\frac{1+\alpha_1^{(\nu)}+\cdots+\alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}M_\nu.$$

Da aber stets $\alpha_i^{(\nu)}$ zwischen $a_i^{(\nu)}$ und $a_i^{(\nu)}+1$ liegt, so ist erst recht

$$|H_{\nu+n}|<\frac{n+a_1^{(\nu)}+\cdots+a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}M_\nu\leqq\vartheta M_\nu<M_\nu\ (\text{für }\nu>\nu'),$$

und somit auch

$$M_{\nu+1}\leqq M_\nu.$$

Die Zahlen M_ν bilden also mit wachsendem ν eine monoton abnehmende Folge; um auch schließen zu können, daß $\lim M_\nu=0$ ist, setze man in der vorletzten Ungleichung der Reihe nach $\nu, \nu+1,\cdots,\nu+n-1$ an Stelle von ν, wodurch

$$|H_{\nu+k+n}|<\vartheta M_{\nu+k}\leqq\vartheta M_\nu\quad(k=0,1,\cdots,n-1).$$

*) Auf die Abhängigkeit vom Index i kommt es nicht an.

folgt. Demnach ist auch die größte der Zahlen $|H_{\nu+n}|, |H_{\nu+n+1}|, \cdots, |H_{\nu+2n-1}|$ kleiner als ϑM_ν, d. h.

$$M_{\nu+n} < \vartheta M_\nu.$$

Die wiederholte Anwendung dieser Ungleichung führt zu

$$M_{\nu+\lambda n} < \vartheta^\lambda M_\nu,$$

und da nach Voraussetzung $\vartheta < 1$ ist, so konvergiert M_ν, folglich auch H_ν mit wachsendem ν gegen 0, w. z. b. w.

Nach § 3 ist das Vorkommen von Störungen im Jacobischen Algorithmus eine zwar hinreichende, keineswegs aber notwendige Bedingung für die Existenz einer linearen Relation $P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$ mit rationalen Koeffizienten P_i. Satz V gestattet nun die folgende notwendige Bedingung von großer Tragweite anzugeben:

Satz VI. *Wenn zwischen den Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ eine lineare Relation der Form*

$$P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten existiert, so treten in dem zugehörigen Jacobischen Algorithmus entweder Störungen auf, oder aber es ist für unendlich viele Werte von ν

$$\frac{n + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} > 1 - \varepsilon,$$

wie klein auch die positive Zahl ε gewählt wird.

Andernfalls würde nämlich aus Satz V folgen, daß

$$\lim \left(A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}\right) = 0$$

ist, und daher würden die Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(\nu+1)} - \alpha_1 A_0^{(\nu+1)}, \cdots, A_1^{(\nu+n)} - \alpha_1 A_0^{(\nu+n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n^{(\nu+1)} - \alpha_n A_0^{(\nu+1)}, \cdots, A_n^{(\nu+n)} - \alpha_n A_0^{(\nu+n)} \end{vmatrix}$$

sämtlich unter jede Grenze sinken, wenn nur ν hinreichend groß gewählt wird. Nach dem schon früher angewandten, im nächsten Paragraphen nachgetragenen Satz müßte dann die Determinante verschwinden; daß dies aber nicht der Fall ist, ergibt sich genau wie oben Seite 21.

Allgemein ersieht man, daß überhaupt niemals eine Gleichung $P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$ mit rationalen P_i existieren kann, wenn erstens keine Störungen vorkommen und zweitens $\lim \left(A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}\right) = 0$ ist. Bei dem Beweis des Satzes V kam es nun lediglich darauf an, daß

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{1 + \alpha_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} < 1$$

war. Dazu ist aber nicht notwendig, daß auch

$$\overline{\lim} \frac{n + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} < 1$$

ist; vielmehr läßt sich unschwer eine Reihe weiterer Bedingungen angeben, deren jede einzelne ebenfalls hinreicht. Daraus resultiert dann jedesmal ein neues Kriterium von der Art des Satzes V, und somit auch ein Analogon zu VI. Eine interessante Anwendung von Satz VI wird sich im dritten Abschnitt ergeben (Sätze XIII, XIV).

§ 8.

Nachträglicher Beweis eines früher benutzten Satzes.

Bekanntlich kann, wenn die Zahl α rational ist, der Ausdruck $|P_1 - \alpha P_0|$, wo P_0, P_1 ganze rationale Zahlen bedeuten, nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken, ohne zu verschwinden. Dieser triviale Satz gestattet die folgende, auch ohne Rücksicht auf die vorausgehenden Anwendungen bemerkenswerte Verallgemeinerung:

Wenn zwischen den n reellen Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ eine Relation der Form

$$P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$$

statthat, wo die P_i ganze rationale Zahlen bedeuten, so muß die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11} - \alpha_1 P_{01}, & P_{12} - \alpha_1 P_{02}, & \cdots, & P_{1n} - \alpha_1 P_{0n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{n1} - \alpha_n P_{01}, & P_{n2} - \alpha_n P_{02}, & \cdots, & P_{nn} - \alpha_n P_{0n} \end{vmatrix},$$

in der die P_{ik} ebenfalls ganze rationale Zahlen sind, notwendig verschwinden, sobald ihre sämtlichen Elemente unter eine gewisse Grenze herabsinken.

Beweis: Da die Zahlen $P_1, \cdots, P_n$ nicht sämtlich verschwinden können, so darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_1 \neq 0$ vorausgesetzt werden. Multipliziert man dann in der Determinante Δ die Elemente der ersten Zeile mit P_1, addiert dazu die mit P_2 multiplizierten Elemente der zweiten Zeile, $\cdots$, schließlich die mit P_n multiplizierten Elemente der n^{ten} Zeile, so hat die entstehende Determinante den Wert $P_1\Delta$. Dabei ist aber das k^{te} Element der ersten Zeile gleich

$$\begin{aligned} &P_1(P_{1k} - \alpha_1 P_{0k}) + P_2(P_{2k} - \alpha_2 P_{0k}) + \cdots + P_n(P_{nk} - \alpha_n P_{0k}) \\ &= P_0 P_{0k} + P_1 P_{1k} + \cdots + P_n P_{nk}. \end{aligned}$$

Hier ist, sobald nur alle Elemente der Determinante Δ unter eine gewisse Grenze sinken, die linke Seite gewiß kleiner als 1, die rechte

Seite aber eine ganze rationale Zahl, und somit gleich 0. Daher ist $P_1 \Delta = 0$ und also wegen $P_1 \neq 0$ auch $\Delta = 0$, w. z. b. w.

Der Satz gestattet übrigens weitgehende Erweiterungen, und führt zu einem fundamentalen Charakteristikum für Systeme von bestimmtem „Rationalitätsrang“. Doch will ich darauf hier nicht eingehen.

II. Abschnitt.

Periodische Kettenbruchalgorithmen.

§ 9.

Reinperiodische und gemischtperiodische Algorithmen.

Wir behandeln jetzt den besondern Fall, daß die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ von einem gewissen Wert ν ab in unendlicher Folge periodisch wiederkehren. Es gibt dann zwei kleinste Zahlen λ und k von der Art, daß die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} a_i^{(\lambda+k)} &= a_i^{(\lambda)}, \\ a_i^{(\lambda+k+1)} &= a_i^{(\lambda+1)}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ a_i^{(\lambda+k+2)} &= a_i^{(\lambda+2)}, \\ &\cdots\cdots, \end{aligned}$$

woraus allgemein folgt

$$\begin{aligned} a_i^{(\lambda+rk)} &= a_i^{(\lambda)}, \\ a_i^{(\lambda+1+rk)} &= a_i^{(\lambda+1)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ r = 1, 2, \cdots, \infty) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_i^{(\lambda+k-1+rk)} &= a_i^{(\lambda+k-1)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dabei heiße k die *Zeilenzahl der Periode*, λ die *Zeilenzahl der Vorperiode*. Erstere muß mindestens gleich 1 sein, während letztere auch verschwinden kann. In diesem besondern Falle, wenn also keine Vorperiode vorhanden ist, soll der Algorithmus *reinperiodisch*, in allen andern Fällen *gemischtperiodisch* heißen.

Bei periodischen Algorithmen lassen sich für die Näherungsbrüche außer den rekurrenten Formeln des § 2 auch independente aufstellen, mittels deren die erreichte Näherung aufs genaueste angegeben werden kann. Die dahin zielenden Untersuchungen leisten aber zugleich noch mehr; sie gestatten nämlich auch in vollständig erschöpfender Weise die Frage nach der Konvergenz des Algorithmus zu beantworten, selbst wenn die $a_i^{(\nu)}$ ganz beliebige reelle oder komplexe Zahlen bedeuten. Wir wollen also zunächst über die $a_i^{(\nu)}$ außer der Periodizität keinerlei beschränkende

Annahmen machen. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, den Begriff der Konvergenz in etwas erweitertem Sinn zu fassen. Ich definiere:

Der Algorithmus heißt konvergent, wenn das Verhältnis $A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)}$ mit wachsendem ν einem ganz bestimmten Verhältnis $x_0 : x_1 : \cdots : x_n$ von endlichen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen zustrebt; das heißt also, wenn

$$\lim_{\nu=\infty} \left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)} \right) = x_0 : x_1 : \cdots : x_n. \tag{18}$$

Konvergenz im gewöhnlichen „engern" Sinn wird dann und nur dann stattfinden, wenn x_0 von 0 verschieden ist. Da übrigens die aufzustellenden Formeln im Fall der Konvergenz die genaue Berechnung von $x_0, x_1, \cdots, x_n$ gestatten, so läßt sich in jedem einzelnen Fall wieder entscheiden, ob auch Konvergenz im engern Sinn stattfindet.

Es ist darauf zu achten, daß es hier gar nicht auf die Gleichungen (1) und die daraus abgeleiteten (2) ankommt, sondern lediglich auf die Bildungsweise der Zahlen $A_i^{(\nu)}$ mittels der rekurrenten Formeln (3) und (4). Diese erscheinen somit als das Primäre.*) Die Gleichungen (1) und (2) dagegen kommen nur im Fall der Konvergenz in Betracht, und müssen nach geeigneter *Definition* der Zahlen $\alpha_i^{(\nu)}$ erst bewiesen werden, was sogleich geschehen soll.

Nimmt man zunächst an, daß nach Weglassung von λ Anfangszeilen**) Konvergenz stattfindet, und setzt demgemäß

$$\lim_{\nu=\infty} \left(A_{0,\lambda}^{(\nu)} : A_{1,\lambda}^{(\nu)} : \cdots : A_{n,\lambda}^{(\nu)} \right) = x_0^{(\lambda)} : x_1^{(\lambda)} : \cdots : x_n^{(\lambda)}, \tag{19}$$

so folgt aus (9)

$$\begin{aligned} \lim_{\nu=\infty} \left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)} \right) = & \left(A_0^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \right) \\ & : \left(A_1^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_1^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_1^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \right) \\ & : \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & : \left(A_n^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_n^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_n^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Glieder des rechts stehenden Verhältnisses können nicht sämtlich verschwinden; denn in diesem Fall würde auch, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\lambda)} & A_0^{(\lambda+1)} & \cdots & A_0^{(\lambda+n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(\lambda+1)} & \cdots & A_n^{(\lambda+n)} \end{vmatrix}$$

*) Die analoge Auffassung der Kettenbrüche schon bei Euler: De formatione fractionum continuarum, Acta Academiae Petropolitanae I. 1779.

**) d. h. wenn man mit $a_i^{(\lambda)}$ statt mit a_i beginnt und demnach allgemein $a_i^{(\nu)}$ durch $a_i^{(\nu+\lambda)}$ ersetzt.

den Wert ± 1 hat, also nicht verschwindet, folgen: $x_0^{(\lambda)} = x_1^{(\lambda)} = \cdots = x_n^{(\lambda)} = 0$ — gegen die Voraussetzung.

Infolge des Nichtverschwindens dieser Determinante lassen sich die Gleichungen (9) auch nach $A_{0,\lambda}^{(\nu)}, A_{1,\lambda}^{(\nu)}, \cdots, A_{n,\lambda}^{(\nu)}$ auflösen, und es folgt dann umgekehrt aus der Konvergenz des Verhältnisses $\left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)}\right)$ auch die von $\left(A_{0,\lambda}^{(\nu)} : A_{1,\lambda}^{(\nu)} : \cdots : A_{n,\lambda}^{(\nu)}\right)$. Daraus ergibt sich:

*Die Konvergenz oder Divergenz wird durch Weglassen einer beliebigen Zahl von Anfangszeilen nicht geändert.**)

Im Fall der Konvergenz existieren somit die Grenzwerte (18) und (19) gleichzeitig, und aus (20) folgt dann nach geeigneter Festsetzung eines zunächst willkürlichen Proportionalitätsfaktors

$$(21) \quad x_i = A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Die Gleichungen (2) und mithin auch (1) ergeben sich hieraus, wenn man, wie in § 1, $\frac{x_i}{x_0} = \alpha_i$, $\frac{x_i^{(\lambda)}}{x_0^{(\lambda)}} = \alpha_i^{(\lambda)}$ setzt; doch ziehen wir die homogene Form jetzt vor, um auch den Fall $x_0 = 0$, oder $x_0^{(\lambda)} = 0$ ohne Schwierigkeit berücksichtigen zu können.

Bei Konvergenzuntersuchungen periodischer Algorithmen ist es nach diesen Ausführungen gestattet, sich auf *reinperiodische* zu beschränken.

§ 10.

Die charakteristische Gleichung.

Zunächst werde wieder eine k-zeilige Periode und eine λ-zeilige Vorperiode angenommen. Aus (17) folgt dann unmittelbar

$$A_{i,\lambda+k}^{(\nu)} = A_{i,\lambda}^{(\nu)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

also bei Konvergenz, wenn man zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht

$$x_0^{(\lambda+k)} : x_1^{(\lambda+k)} : \cdots : x_n^{(\lambda+k)} = x_0^{(\lambda)} : x_1^{(\lambda)} : \cdots : x_n^{(\lambda)},$$

oder, wenn man mit ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet,

$$x_s^{(\lambda)} = \varrho\, x_s^{(\lambda+k)}, \quad (s = 0, 1, \cdots, n).$$

Mit Rücksicht auf (21) ist nun einerseits

$$\varrho\, x_i = \varrho \sum_{s=0}^{n} A_i^{(\lambda+s)} x_s^{(\lambda)},$$

*) Dasselbe gilt nicht von der Konvergenz im engern Sinn.

anderseits auch

$$\varrho x_i = \varrho \sum_{s=0}^{n} A_i^{(\lambda+k+s)} x_s^{(\lambda+k)} = \sum_{s=0}^{n} A_i^{(\lambda+k+s)} x_s^{(\lambda)}.$$

Setzt man die beiden Werte von ϱx_i einander gleich, so folgt

$$\varrho\left(A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)}\right) \tag{22}$$
$$= A_i^{(\lambda+k)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+k+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+k+n)} x_n^{(\lambda)} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

und daher durch Elimination von $x_0^{(\lambda)}, x_1^{(\lambda)}, \cdots, x_n^{(\lambda)}$:

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\lambda+k)} - \varrho A_0^{(\lambda)}, & A_0^{(\lambda+k+1)} - \varrho A_0^{(\lambda+1)}, \cdots, & A_0^{(\lambda+k+n)} - \varrho A_0^{(\lambda+n)} \\ \cdots\cdots\cdots\

Bei den folgenden Sätzen dürfen und wollen wir daher von der Vorperiode absehen, also $\lambda = 0$ setzen; dann lautet die charakteristische Gleichung

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} A_0^{(k)} - \varrho & A_0^{(k+1)} \cdots A_0^{(k+n)} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_n^{(k)} & A_n^{(k+1)} \cdots A_n^{(k+n)} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

und im Fall der Konvergenz folgt aus (22)

$$(24) \qquad \varrho x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n, \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

wo ϱ eine Wurzel von (23) ist.

B. Die charakteristische Gleichung ist im Bereich A der rationalen Funktionen der Variabeln $a_i^{(\nu)}$ irreduzibel.

Beweis: Wäre sie reduzibel, so setze man in $A_i^{(\nu)}$ durchweg $a_i' = a_i$, $a_i'' = a_i, \cdots, a_i^{(k-1)} = a_i$ und bezeichne zur Unterscheidung den so entstehenden Ausdruck mit $B_i^{(\nu)}$. Einer Zerfällung der charakteristischen Gleichung entspricht dann auch eine Zerfällung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} B_0^{(k)} - \varrho & B_0^{(k+1)} \cdots B_0^{(k+n)} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ B_n^{(k)} & B_n^{(k+1)} \cdots B_n^{(k+n)} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

die daher im Bereich der rationalen Funktionen von $a_1, \cdots, a_n$ — er möge B heißen — ebenfalls reduzibel sein muß.

Nun hat aber die Gleichung

$$\sigma^{n+1} - a_n \sigma^n - a_{n-1} \sigma^{n-1} - \cdots - a_1 \sigma - 1 = 0,$$

deren Wurzeln $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ sein mögen, wenn $a_1, \cdots, a_n$ Variable sind, keinen „Affekt"; sie ist also insbesondere im Bereich B irreduzibel und hat auch keine zwei Wurzeln, von denen eine gewisse Potenz übereinstimmte. Aus letzterm Grund ist auch die Gleichung mit den Wurzeln $\sigma_0^k, \sigma_1^k, \cdots, \sigma_n^k$ im Bereich B irreduzibel. Diese Gleichung ist aber leicht zu bilden; zu dem Ende setze man $\sigma_0 = \beta_n$ und führe sukzessive $n - 1$ weitere Größen $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1, \\ \sigma_0 \beta_1 &= a_1 \beta_n + \beta_0, \\ \sigma_0 \beta_2 &= a_2 \beta_n + \beta_1, \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \sigma_0 \beta_{n-1} &= a_{n-1} \beta_n + \beta_{n-2}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung, welcher σ_0 genügt, ist dann auch $\sigma_0\beta_n = a_n\beta_n + \beta_{n-1}$, und man erhält allgemein

$$\sigma_0^\nu \beta_i = B_i^{(\nu)}\beta_0 + B_i^{(\nu+1)}\beta_1 + \cdots + B_i^{(\nu+n)}\beta_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

wie leicht durch vollständige Induktion in bezug auf ν zu beweisen ist. Setzt man speziell $\nu = k$, so folgt hieraus für $x = \sigma_0^k$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} B_0^{(k)} - x & \cdots & B_0^{(k+n)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ B_n^{(k)} & \cdots & B_n^{(k+n)} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Da ihre Koeffizienten dem Bereich B angehören, so hat sie gerade die Wurzeln $\sigma_0^k, \sigma_1^k, \cdots, \sigma_n^k$ und ist also die gesuchte irreduzible Gleichung. Die obige Annahme, aus der die Reduzibilität derselben gefolgert wurde, ist demnach irrig, w. z. b. w.

C. Diejenige Gleichung, deren Wurzeln die ν^{ten} Potenzen von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, ist im Bereich A irreduzibel und lautet

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\nu k)} - x & A_0^{(\nu k+1)} & \cdots & A_0^{(\nu k+n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_n^{(\nu k)} & A_n^{(\nu k+1)} & \cdots & A_n^{(\nu k+n)} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt schon aus dem Beweisgang des vorigen Satzes. Um auch den zweiten Teil einzusehen, berechne man $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ aus dem Linearsystem

$$\varrho_0\gamma_i = A_i^{(k)}\gamma_0 + A_i^{(k+1)}\gamma_1 + \cdots + A_i^{(k+n)}\gamma_n, \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Dies ist möglich, weil ϱ_0 eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Hieraus ergibt sich allgemein durch vollständige Induktion in bezug auf ν*)

$$\varrho_0^\nu \gamma_i = A_i^{(\nu k)}\gamma_0 + A_i^{(\nu k+1)}\gamma_1 + \cdots + A_i^{(\nu k+n)}\gamma_n, \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

und durch Elimination der γ_i folgt sofort, daß ϱ_0^ν in der Tat der obigen Gleichung genügt. Da aber ihre Koeffizienten dem Bereich A angehören und sie in diesem irreduzibel ist, so hat sie gerade die Wurzeln $\varrho_0^\nu, \varrho_1^\nu, \cdots, \varrho_n^\nu$, w. z. b. w.

Eine einfache Folgerung aus C ist

D. Die Potenzsummen der charakteristischen Gleichung sind

$$\varrho_0^\nu + \varrho_1^\nu + \cdots + \varrho_n^\nu = A_0^{(\nu k)} + A_1^{(\nu k+1)} + \cdots + A_n^{(\nu k+n)}.$$

*) Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9); dabei ist aber zu beachten, daß wegen der Periodizität $A_{i,k}^{(\nu)} = A_i^{(\nu)}$ ist.

Endlich ist noch der folgende Satz bemerkenswert:

E. Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ändern sich nicht, wenn man auf die oberen Indizes der a die zyklische Permutation $(0, 1, 2, \cdots, k-1)$ anwendet.

Beweis: Man setze wieder

$$\varrho_0 \gamma_i = A_i^{(k)} \gamma_0 + A_i^{(k+1)} \gamma_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} \gamma_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

und außerdem

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_n', \\ \gamma_1 &= a_1 \gamma_n' + \gamma_0', \\ \gamma_2 &= a_2 \gamma_n' + \gamma_1', \\ &\cdots\cdots \\ \gamma_n &= a_n \gamma_n' + \gamma_{n-1}'. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (11) folgt dann

$$\varrho_0 \gamma_i' = A_{i,1}^{(k)} \gamma_0' + A_{i,1}^{(k+1)} \gamma_1' + \cdots + A_{i,1}^{(k+n)} \gamma_n' \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

und daher genügt ϱ_0 der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{0,1}^{(k)} - \varrho & A_{0,1}^{(k+1)} \cdots A_{0,1}^{(k+n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,1}^{(k)} & A_{n,1}^{(k+1)} \cdots A_{n,1}^{(k+n)} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten derselben gehören dem Bereich A an, und da sie mit der in A irreduzibeln charakteristischen Gleichung eine Wurzel gemein hat und vom $n+1^{\text{ten}}$ Grad ist, so ist sie mit der charakteristischen Gleichung identisch. In dieser darf man also die obern Indizes der a alle um 1 erhöhen, und da wegen der Periodizität diese Indizes bloß modulo k in Frage kommen, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Eine zweite Vertauschung der a, bei der die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ungeändert bleiben, wird sich später ergeben (§ 15).

§ 11.

Notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung bei einzeiliger Periodizität.

Nach § 9 dürfen wir uns auf den Fall reinperiodischer Algorithmen beschränken; dann lautet die charakteristische Gleichung bei einzeiliger Periodizität:

$$f(\varrho) = \varrho^{n+1} - a_n \varrho^n - \cdots - a_1 \varrho - 1 = 0.$$

Wenn nun Konvergenz stattfindet, und also

$$\lim_{\nu=\infty} \left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)} \right) = x_0 : x_1 : \cdots : x_n$$

gesetzt wird, so führe man die Funktionen von ϱ ein:

$$\varphi_\nu(\varrho) = \varrho^\nu - A_n^{(\nu)}\varrho^n - A_{n-1}^{(\nu)}\varrho^{n-1} - \cdots - A_1^{(\nu)}\varrho - A_0^{(\nu)},$$
$$\psi(\varrho) = x_0 + x_1\varrho + \cdots + x_n\varrho^n.$$

Wegen der einzeiligen Periodizität ist $A_{i,1}^{(\nu)} = A_i^{(\nu)}$, und folglich nach (11)

$$A_n^{(\nu)} = A_0^{(\nu+1)}, \quad A_i^{(\nu)} = A_{i+1}^{(\nu+1)} - a_{i+1}A_0^{(\nu+1)} \quad (\text{für } i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Mit Rücksicht hierauf findet man leicht

$$\varphi_{\nu+1}(\varrho) = \varrho\varphi_\nu(\varrho) + A_n^{(\nu)}f(\varrho),$$

und da offenbar $\varphi_{n+1}(\varrho) = f(\varrho)$, so ist allgemein $\varphi_\nu(\varrho)$ durch $f(\varrho)$ teilbar.

Sind $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_m$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, und ist etwa ϱ_0 eine r_0-fache, ϱ_1 eine r_1-fache, $\cdots$, ϱ_m eine r_m-fache Wurzel, so ist demnach

$$\begin{aligned} &\varphi_\nu(\varrho_0) = 0, \ \varphi_\nu'(\varrho_0) = 0, \cdots, \varphi_\nu^{(r_0-1)}(\varrho_0) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_\nu(\varrho_m) = 0, \ \varphi_\nu'(\varrho_m) = 0, \cdots, \varphi_\nu^{(r_m-1)}(\varrho_m) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Statt $\varphi_\nu(\varrho_0) = 0$, $\varphi_\nu(\varrho_1) = 0$ kann man aber auch schreiben:

$$\varrho_0^\nu = A_0^{(\nu)} + A_1^{(\nu)}\varrho_0 + \cdots + A_n^{(\nu)}\varrho_0^n, \quad \varrho_1^\nu = A_0^{(\nu)} + A_1^{(\nu)}\varrho_1 + \cdots + A_n^{(\nu)}\varrho_1^n,$$

woraus folgt

$$\lim_{\nu=\infty}(\varrho_0^\nu : \varrho_1^\nu) = x_0 + x_1\varrho_0 + \cdots + x_n\varrho_0^n : x_0 + x_1\varrho_1 + \cdots + x_n\varrho_1^n = \psi(\varrho_0) : \psi(\varrho_1).$$

Ebenso erhält man aus (25) allgemeiner:

$$\lim_{\nu=\infty}\begin{pmatrix} \varrho_0^\nu : \nu\varrho_0^{\nu-1} : \cdots : \nu(\nu-1)\cdots(\nu-r_0+2)\,\varrho_0^{\nu-r_0+1} \\ : \varrho_1^\nu : \nu\varrho_1^{\nu-1} : \cdots : \nu(\nu-1)\ \cdots(\nu-r_1+2)\,\varrho_1^{\nu-r_1+1} \\ : \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ : \varrho_m^\nu : \nu\varrho_m^{\nu-1} : \cdots : \nu(\nu-1)\cdots(\nu-r_m+2)\varrho_m^{\nu-r_m+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \psi(\varrho_0) : \psi'(\varrho_0) : \cdots : \psi^{(r_0-1)}(\varrho_0) \\ : \psi(\varrho_1) : \psi'(\varrho_1) : \cdots : \psi^{(r_1-1)}(\varrho_1) \\ : \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ : \psi(\varrho_m) : \psi'(\varrho_m) : \cdots : \psi^{(r_m-1)}(\varrho_m) \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite stehen hier lauter endliche Größen, die nicht sämtlich verschwinden können; denn in diesem Fall hätte die Gleichung n^{ten} Grades $\psi(\varrho) = 0$ die $n+1$ Wurzeln von $f(\varrho) = 0$, was nicht möglich ist. Indem man die Zeilen der rechten Seite mit den entsprechenden der linken vergleicht, erkennt man, daß nur

$$\psi^{(r_0-1)}(\varrho_0), \ \psi^{(r_1-1)}(\varrho_1), \cdots, \psi^{(r_m-1)}(\varrho_m)$$

als von Null verschieden in Betracht kommen können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\psi^{(r_0-1)}(\varrho_0) \neq 0$ annehmen; dann ist gewiß $\frac{\psi^{(r_1-1)}(\varrho_1)}{\psi^{(r_0-1)}(\varrho_0)}$ eine bestimmte endliche Größe, woraus die für die Konvergenz des Algorithmus notwendige Bedingung folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-r_1+2)}{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-r_0+2)} \cdot \frac{\varrho_1^{\nu-r_1+1}}{\varrho_0^{\nu-r_0+1}} \text{ bestimmt und endlich.}$$

Dies ist aber nur möglich, wenn entweder $|\varrho_1| < |\varrho_0|$, oder $|\varrho_1| = |\varrho_0|$ und zugleich $r_1 < r_0$ ist; und zwar ist in diesen beiden Fällen der Grenzwert gleich Null. Was hier bezüglich ϱ_1 gezeigt ist, gilt natürlich ebenso für $\varrho_2, \cdots, \varrho_m$. Zugleich ergibt sich hieraus auch

$$\psi^{(r_1-1)}(\varrho_1) = 0, \cdots, \psi^{(r_m-1)}(\varrho_m) = 0,$$

und folglich hat $\psi(\varrho)$ genau alle Wurzeln von $f(\varrho)$, nur die Wurzel ϱ_0 einmal weniger. Es besteht daher die Identität in ϱ:

$$(\varrho-\varrho_0)\,\psi(\varrho) = x_n f(\varrho).$$

Vergleicht man hier die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ϱ auf beiden Seiten, so folgt

$$\begin{aligned} \varrho_0 x_0 &= x_n, \\ \varrho_0 x_1 &= a_1 x_n + x_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_0 x_n &= a_n x_n + x_{n+1}, \end{aligned} \tag{26}$$

und hieraus endlich

$$\begin{aligned} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} &= \frac{x_n}{x_0} = \varrho_0, \\ \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n-1}^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} &= \frac{x_{n-1}}{x_0} = \varrho_0^2 - a_n\varrho_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} &= \frac{x_1}{x_0} = \varrho_0^n - a_n\varrho_0^{n-1} - \cdots - a_2\varrho_0. \end{aligned} \tag{26'}$$

Des bequemeren Ausdrucks halber stelle ich nun folgende *Definition* auf:

Eine algebraische Gleichung heißt regulär, wenn — unter R den größten der absoluten Beträge der Wurzeln verstanden — entweder nur eine (ein- oder mehrfache) Wurzel ϱ_0 vom Betrag R vorhanden ist; oder wenn mehrere Wurzeln den Betrag R haben, aber eine unter ihnen, etwa ϱ_0, einen höhern Grad von Vielfachheit hat als jede andre vom Betrag R. Die hierdurch eindeutig bestimmte Wurzel ϱ_0 heißt Hauptwurzel.

Nach dieser Definition läßt sich das Resultat der obigen Untersuchungen dahin aussprechen, daß im Fall der Konvergenz die charakteristische

Gleichung notwendig eine reguläre sein muß, und daß die in (26) und (26′) auftretende Wurzel ϱ_0 die Hauptwurzel ist.*) Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Zu dem Ende beachte man die Identität

$$A_i^{(\nu)} = A_0^{(\nu)} A_i + A_1^{(\nu)} A_i' + \cdots + A_n^{(\nu)} A_i^{(n)},$$

die in leicht verständlicher Symbolik auch durch

$$\varphi_\nu(A_i) = 0$$

ausgedrückt werden kann. Diese Gleichung bildet nun mit (25) zusammen ein System von $n+2$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den Größen $1, A_0^{(\nu)}, \cdots, A_n^{(\nu)}$, dessen Determinante somit verschwinden muß. Sind die Wurzeln $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_n$ der charakteristischen Gleichung alle verschieden, so ist daher

$$\begin{vmatrix} A_i^{(\nu)} & A_i & A_i' \cdots A_i^{(n)} \\ \varrho_0^\nu & 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho_n^\nu & 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Sind gleiche Wurzeln vorhanden, so sind gewisse Zeilen in dieser Determinante durch ihre Ableitungen zu ersetzen, wie aus (25) leicht ersichtlich ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich weiter

$$A_i^{(\nu)} = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_i & A_i' \cdots A_i^{(n)} \\ \varrho_0^\nu & 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho_n^\nu & 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}, \tag{27}$$

mit dem Zusatz: Wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, so daß die rechte Seite unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so sind im Zähler und Nenner gerade die durch die Regeln der Differentialrechnung vorgeschriebenen Differentiationen auszuführen.

---

*) Die Gleichungen (26) sind keine anderen als (24) für $k = 1$. Jedoch erst durch die obige Herleitung vermag man zu entscheiden, *welche* Wurzel der charakteristischen Gleichung dabei in Frage kommt.

Die charakteristische Gleichung sei nun regulär, und ϱ_0 die Hauptwurzel. Ist zunächst ϱ_0 eine einfache Wurzel, so haben alle andern Wurzeln kleineren absoluten Betrag als ϱ_0, so daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\varrho_1^\nu}{\varrho_0^\nu} = 0, \cdots, \lim_{\nu=\infty} \frac{\varrho_n^\nu}{\varrho_0^\nu} = 0.$$

Aus (27) folgt dann

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{\varrho_0^\nu} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & A_i & A_i' \cdots A_i^{(n)} \\ 1 & 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ 0 & 1 & \varrho_1 \cdots \varrho_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 0 & 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A_i & A_i' \cdots A_i^{(n)} \\ 1 & \varrho_1 \cdots \varrho_1^n \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}.$$

Es ist also $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{\varrho_0^\nu}$ endlich, und speziell für $i = 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu)}}{\varrho_0^\nu} = \frac{\begin{vmatrix} \varrho_1 \cdots \varrho_1^n \\ \cdot \cdots \cdot \\ \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n}{(\varrho_1 - \varrho_0)(\varrho_2 - \varrho_0) \cdots (\varrho_n - \varrho_0)} \neq 0.$$

Daher konvergiert der Algorithmus in der Tat, und es lassen sich auch leicht wieder die Formeln (26′) aufstellen.

Ist zweitens ϱ_0 eine Doppelwurzel, so muß eine beliebige andre Wurzel kleinern absoluten Betrag haben als ϱ_0, oder allenfalls gleichen, in welchem Fall sie aber keine mehrfache Wurzel sein kann. (27) geht dann über in

$$A_i^{(\nu)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & A_i & A_i' \cdots A_i^{(n)} \\ \nu\varrho_0^{\nu-1} & 0 & 1 \cdots n\varrho_0^{n-1} \\ \varrho_0^\nu & 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ \varrho_n^\nu & 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \cdots n\varrho_0^{n-1} \\ 1 & \varrho_0 \cdots \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 1 & \varrho_n \cdots \varrho_n^n \end{vmatrix}},$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{\nu \varrho_0^{\nu-1}} = \frac{\begin{vmatrix} A_i & A_i' & \cdots & A_i^{(n)} \\ 1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n\varrho_0^{n-1} \\ 1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}} = \text{endlich};$$

speziell für $i = 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu)}}{\nu \varrho_0^{\nu-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n\varrho_0^{n-1} \\ 1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}} \neq 0.$$

Also auch in diesem Fall konvergiert der Algorithmus, und man sieht ohne weiteres, wie man fortzufahren hat, wenn ϱ_0 eine mehr als zweifache Wurzel ist. Wir erhalten somit

Satz VII. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines einzeilig periodischen Kettenbruchalgorithmus besteht darin, daß die charakteristische Gleichung eine reguläre ist. Bei reiner Periodizität gelten dann die Formeln*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \varrho_0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n-1}^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \varrho_0^2 - a_n \varrho_0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \varrho_0^n - a_n \varrho_0^{n-1} - \cdots - a_2 \varrho_0,$$

wo ϱ_0 die Hauptwurzel der charakteristischen Gleichung bedeutet.

Bei einer λ-zeiligen Vorperiode sind die Formeln offenbar dahin abzuändern, daß a_i durch $a_i^{(\lambda)}$, $A_i^{(\nu)}$ durch $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ ersetzt wird. Den Grenzwert des Verhältnisses $\left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)}\right)$ findet man dann mit Hilfe von (21).

§ 12.

Hilfssätze.

Viel schwieriger gestaltet sich die Konvergenzuntersuchung, wenn der Algorithmus k-zeilig periodisch ist und $k > 1$. Indem wir uns wieder auf reine Periodizität beschränken, gilt die bei den folgenden Entwicklungen fortwährend anzuwendende Formel

$$A_0^{(\alpha k+\gamma)} A_i^{(\beta k)} + A_1^{(\alpha k+\gamma)} A_i^{(\beta k+1)} + \cdots + A_n^{(\alpha k+\gamma)} A_i^{(\beta k+n)} = A_i^{(\alpha k+\beta k+\gamma)}, \tag{28}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \cdots, \infty);$$

sie entsteht aus (9) für $\nu = \alpha k + \gamma$, $\lambda = \beta k$, wobei zu beachten ist, daß wegen der Periodizität $A_{i,\beta k}^{(\nu)} = A_i^{(\nu)}$.

Ist $f(\varrho) = 0$ die charakteristische Gleichung und das Vorzeichen von $f(\varrho)$ so gewählt, daß der höchste Koeffizient gleich $+1$ wird, so ist

$$f(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho - A_0^{(k)}, & -A_0^{(k+1)}, \cdots, & -A_0^{(k+n)} \\ -A_1^{(k)}, & \varrho - A_1^{(k+1)}, \cdots, & -A_1^{(k+n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_n^{(k)}, & -A_n^{(k+1)}, \cdots, & \varrho - A_n^{(k+n)} \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Es soll nun die symbolische Gleichung bewiesen werden:

$$A_i^{\lambda} f(A_i^k) = 0. \tag{30}$$

Setzen wir zu diesem Zweck

$$f(\varrho) = \varrho^{n+1} - b_n \varrho^n - b_{n-1} \varrho^{n-1} - \cdots - b_1 \varrho - b_0, \tag{31}$$

wobei $b_0 = (-1)^{n(k+1)}$, so schreibt sich die zu beweisende Relation in unsymbolischer Form:

$$A_i^{((n+1)k+\lambda)} = b_0 A_i^{(\lambda)} + b_1 A_i^{(k+\lambda)} + \cdots + b_n A_i^{(nk+\lambda)}. \tag{30'}$$

Mit Hilfe von (28) folgt leicht

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(\lambda)} A_i^{\nu} f(A_i^k) = A_i^{\lambda} f(A_i^k),$$

und daher gilt Gleichung (30) bez. (30') allgemein, sobald sie für $\lambda = 0, 1, \cdots, n$ bewiesen ist. Wir führen jetzt die zu (29) adjungierte Determinante ein:

$$\begin{vmatrix} g_{0,0}(\varrho) & g_{0,1}(\varrho) & \cdots & g_{0,n}(\varrho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n,0}(\varrho) & g_{n,1}(\varrho) & \cdots & g_{n,n}(\varrho) \end{vmatrix}.$$

Offenbar sind die $g_{\lambda,\nu}(\varrho)$ ganze rationale Funktionen, und zwar vom n^{ten} Grad, wenn $\lambda = \nu$, sonst von geringerem Grad. Sie genügen dem Gleichungssystem

$$(32)\qquad \varrho g_{\lambda,i}(\varrho) - A_i^{(k)} g_{\lambda,0}(\varrho) - A_i^{(k+1)} g_{\lambda,1}(\varrho) - \cdots - A_i^{(k+n)} g_{\lambda,n}(\varrho) = \begin{cases} f(\varrho) & \text{für } \lambda = i, \\ 0 & \text{für } \lambda \neq i, \end{cases}$$

welches auch zur Definition der Funktionen $g_{\lambda,i}(\varrho)$ dienen kann.

Setzt man für den Augenblick:

$$\varrho^\nu g_{\lambda,i}(\varrho) - \sum_{s=0}^{n} A_i^{(\nu k+s)} g_{\lambda,s}(\varrho) = G_{\lambda,i}^{(\nu)}(\varrho)^*) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \infty),$$

so bestätigt man unschwer die Beziehung

$$G_{\lambda,i}^{(\nu+1)}(\varrho) = \varrho\, G_{\lambda,i}^{(\nu)}(\varrho) + A_i^{(\nu k+\lambda)} f(\varrho),$$

und da offenbar $G_{\lambda,i}^{(0)}(\varrho) = 0$, so ist jedes $G_{\lambda,i}^{(\nu)}(\varrho)$ durch $f(\varrho)$ teilbar. Das gleiche gilt daher auch von

$$G_{\lambda,i}^{(n+1)}(\varrho) - b_n G_{\lambda,i}^{(n)}(\varrho) - \cdots - b_1 G_{\lambda,i}^{(1)}(\varrho) - b_0 G_{\lambda,i}^{(0)}(\varrho) - f(\varrho) g_{\lambda,i}(\varrho)$$

$$= -\sum_{s=0}^{n} \left(A_i^{((n+1)k+s)} - b_n A_i^{(nk+s)} - \cdots - b_1 A^{(k+s)} - b_0 A_i^{(s)} \right) g_{\lambda,s}(\varrho).$$

Hier ist aber die rechte Seite bloß vom n^{ten} Grad in ϱ, und daher muß sie identisch verschwinden. Insbesondere verschwindet also auch der Koeffizient von ϱ^n, welcher bloß in dem Summanden für $s = \lambda$ vorkommt; daher:

$$A_i^{((n+1)k+\lambda)} - b_n A_i^{(nk+\lambda)} - \cdots - b_1 A_i^{(k+\lambda)} - b_1 A_i^{(\lambda)} = 0.$$

Da hier λ jede der Zahlen $0, 1, \cdots, n$ bedeuten kann, so ist damit (30) bez. (30′) vollständig bewiesen.

Die Polynome $g_{\lambda,i}(\varrho)$ sind bisher bloß für $\lambda = 0, 1, \cdots, n$ definiert; wir wollen sie jetzt auch für größere Werte von λ einführen, und zwar durch die Definitionsgleichungen**)

$$(33)\qquad g_{\lambda,i}(\varrho) = A_0^{(\lambda)} g_{0,i}(\varrho) + A_1^{(\lambda)} g_{1,i}(\varrho) + \cdots + A_n^{(\lambda)} g_{n,i}(\varrho).$$

Diese Funktionen genügen wegen (32) offenbar den Bedingungen

$$(34)\qquad \varrho g_{\lambda,i}(\varrho) - A_i^{(k)} g_{\lambda,0}(\varrho) - A_i^{(k+1)} g_{\lambda,1}(\varrho) - \cdots - A_i^{(k+n)} g_{\lambda,n}(\varrho) = A_i^{(\lambda)} f(\varrho),$$

durch welche sie ebenfalls schon eindeutig definiert sind; denn hält man

*) Der obere Index bei dem Funktionszeichen G hat hier nicht die Bedeutung einer Ableitung.

**) Für $\lambda = 0, 1, \cdots, n$ sind dies Identitäten.

in (34) λ fest und setzt für i der Reihe nach die Werte $0, 1, \cdots, n$, so entsteht ein System von $n+1$ linearen Gleichungen mit der Determinante $f(\varrho)$ und den Unbekannten $g_{\lambda,0}(\varrho), \cdots, g_{\lambda,n}(\varrho)$. Diese sind also hierdurch eindeutig bestimmt und sind ganze rationale Funktionen.

Entwickelt man $\frac{g_{\lambda,i}(\varrho)}{f(\varrho)}$ nach fallenden Potenzen von ϱ, so erhält man

$$\frac{g_{\lambda,i}(\varrho)}{f(\varrho)} = \frac{A_i^{(\lambda)}}{\varrho} + \frac{A_i^{(k+\lambda)}}{\varrho^2} + \frac{A_i^{(2k+\lambda)}}{\varrho^3} + \text{in inf.} \tag{35}$$

Man verifiziert dies einfach (unter Benutzung von (28)), indem man diese Potenzreihen in (34) substituiert. Durch Multiplikation mit

$$f(\varrho) = \varrho^{n+1} - b_n\varrho^n - \cdots - b_0$$

ergibt sich sodann für $g_{\lambda,i}(\varrho)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} g_{\lambda,i}(\varrho) = A_i^{(\lambda)}\varrho^n + (A_i^{(k+\lambda)} - b_n A_i^{(\lambda)})\varrho^{n-1} + (A_i^{(2k+\lambda)} - b_n A_i^{(k+\lambda)} - b_{n-1} A_i^{(\lambda)})\varrho^{n-2} \\ + \cdots + (A_i^{(nk+\lambda)} - b_n A_i^{((n-1)k+\lambda)} - \cdots - b_2 A_i^{(k+\lambda)} - b_1 A_i^{(\lambda)}). \end{aligned} \tag{36}$$

Die Koeffizienten der negativen Potenzen verschwinden wegen (30). Da aber auch schon a priori feststeht, daß die $g_{\lambda,i}(\varrho)$ *ganze* Funktionen sind, so entspringt hieraus zugleich ein neuer Beweis von (30).

Endlich bemerke man noch die Beziehung

$$g_{\lambda+k,i}(\varrho) = \varrho g_{\lambda,i}(\varrho) - A_i^{(\lambda)} f(\varrho), \tag{37}$$

die mit Hilfe von (35) leicht bestätigt wird.

Wenn jetzt der Algorithmus konvergiert, und etwa wieder

$$\lim_{\nu=\infty} \left(A_0^{(\nu)} : A_1^{(\nu)} : \cdots : A_n^{(\nu)}\right) = x_0 : x_1 : \cdots : x_n$$

gesetzt wird, so muß die charakteristische Gleichung eine Wurzel ϱ' haben, für welche die Gleichungen (24) erfüllt sind:

$$\varrho' x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n);$$

offenbar kann es keine zwei *verschiedenen* Wurzeln dieser Art geben. Da ferner die Größen $x_0, \cdots, x_n$ nicht sämtlich verschwinden, so sei etwa $x_i \neq 0$. Dann ist für genügend große Werte von ν sicher auch $A_i^{(\nu k+\lambda)} \neq 0$, und es folgt

$$\sum_{s=0}^{n} \left(\frac{A_s^{(\nu k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} - \frac{x_s}{x_i}\right) A_i^{(k+s)} = \frac{A_i^{((\nu+1)k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} - \frac{1}{x_i}\sum_{s=0}^{n} A_i^{(k+s)} x_s = \frac{A_i^{((\nu+1)k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} - \varrho'.$$

Hier konvergieren aber für $\nu = \infty$ die einzelnen Summanden der linken Seite gegen 0, so daß sich ergibt

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{((\nu+1)k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} = \varrho' \quad (\text{für } x_i \neq 0). \tag{38}$$

Aus der Existenz und dem Wert dieses limes folgt weiter, daß die Reihe (35) konvergiert für $|\varrho| > |\varrho'|$ und divergiert für $|\varrho| < |\varrho'|$. Daher hat $g_{\lambda,i}(\varrho)$ mit $f(\varrho)$ alle Wurzeln gemein, deren Betrag $> |\varrho'|$ ist, aber nicht alle vom Betrag $= |\varrho'|$; wegen der Identität (37) kann man dabei λ auf die Werte $0, 1, \cdots, k-1$ beschränken.

§ 13.

Konvergenz bei k-zeiliger Periodizität.

Wenn wieder

$$f(\varrho) = \varrho^{n+1} - b_n\varrho^n - \cdots - b_1\varrho - b_0 = 0$$

die charakteristische Gleichung ist, so definiere man unendlich viele Größen $B_i^{(\nu)}$ durch die Rekursionsformeln

$$B_i^{(i)} = 1,\ B_i^{(\nu)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq i \qquad (\nu, i = 0, 1, \cdots, n);$$

$$B_i^{(\nu+n+1)} = b_0 B_i^{(\nu)} + b_1 B_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_n B_i^{(\nu+n)} \quad (i=0,1,\cdots,n;\ \nu=0,1,\cdots,\infty).$$

Setzt man dann

$$\varphi_\nu(\varrho) = \varrho^\nu - B_n^{(\nu)}\varrho^n - B_{n-1}^{(\nu)}\varrho^{n-1} - \cdots - B_0^{(\nu)},$$

so ergibt sich leicht die Identität

$$\varphi_{\nu+1}(\varrho) = \varrho\,\varphi_\nu(\varrho) + B_n^{(\nu)} f(\varrho),$$

und ebenso symbolisch

$$A_i^\lambda \varphi_{\nu+1}(A_i^k) = A_i^{k+\lambda}\varphi_\nu(A_i^k) + B_n^{(\nu)} A_i^\lambda f(A_i^k).$$

Da offenbar $\varphi_{n+1} = f$, und nach (30) $A_i^\lambda f(A_i^k) = 0$ ist, so folgt allgemein, daß $\varphi_\nu(\varrho)$ durch $f(\varrho)$ teilbar ist, und außerdem

$$A_i^\lambda \varphi_\nu(A_i^k) = 0.$$

Hieraus ist genau wie bei den entsprechenden Untersuchungen in § 11 (pag. 36) zu schließen:

$$A_i^{(\nu k+\lambda)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & A_i^{(\lambda)} & A_i^{(k+\lambda)} & \cdots & A_i^{(nk+\lambda)} \\ \varrho_0^\nu & 1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_n^\nu & 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n \end{vmatrix}}, \tag{39}$$

wo $\varrho_0, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln von $f(\varrho)$ sind. Hat $f(\varrho)$ mehrfache Wurzeln,

so ist die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ wieder durch geeignete Differentiationen im Zähler und Nenner zu beseitigen.*)

Für viele Zwecke ist es nützlich, (39) etwas umzuformen. Der Koeffizient von ϱ_0^ν ist nämlich eine symmetrische Funktion von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$, kann also rational durch ϱ_0 (und die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung) ausgedrückt werden. Ist ϱ_0 eine Doppelwurzel, so kommt auch ein Glied mit $\nu\varrho_0^{\nu-1}$ vor; auch dessen Koeffizient ist rational durch ϱ_0 ausdrückbar, usw. Analoges gilt für die andern Wurzeln. Diese Umformung ist in den einfachsten Fällen, wenn $f(\varrho)$ nur einfache oder Doppelwurzeln hat, leicht direkt ausführbar; im allgemeinen Fall gewinnt man aber das gewünschte Resultat leichter auf folgendem Weg: Man zerlege $\frac{g_{\lambda,i}(\varrho)}{f(\varrho)}$ in Partialbrüche, entwickle jeden nach fallenden Potenzen von ϱ und vergleiche die entstehende Reihe mit (35).

Sind $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_m$ die voneinander verschiedenen Wurzeln von $f(\varrho)$ und ist etwa ϱ_γ eine r_γ-fache, so sei

$$f(\varrho) = (\varrho-\varrho_0)^{r_0}\psi_0(\varrho) = (\varrho-\varrho_1)^{r_1}\psi_1(\varrho) = \cdots = (\varrho-\varrho_m)^{r_m}\psi_m(\varrho),$$

so daß also $\psi_\gamma(\varrho_\gamma) \neq 0$. Dann lautet die gesuchte Formel:

$$A_i^{(\nu k+\lambda)} = \sum_{\gamma=0}^{m}\sum_{\mu=1}^{r_\gamma}\binom{\nu}{\mu-1}\frac{\varrho_\gamma^{\nu-\mu+1}}{(r_\gamma-\mu)!}D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right), \tag{40}$$

wo das Symbol D^k die k^{te} Ableitung bezeichnet.

Die Formel (39) oder auch (40) gestattet, *bei jedem beliebigen periodischen Kettenbruchalgorithmus über Konvergenz oder Divergenz zu entscheiden.* Denn offenbar darf man sich bei der Konvergenzuntersuchung auf die Werte $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ beschränken; sind dann die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ irgendwie numerisch gegeben, so sind damit auch die $k(n+1)^2$ Zahlen $A_i^{(\lambda)}, A_i^{(k+\lambda)}, \cdots, A_i^{(nk+\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots, k-1;\ i = 0, 1, \cdots, n)$ bekannt; ebenso $\varrho_0, \cdots, \varrho_n$. Mit Hilfe von (39) kann dann festgestellt werden, ob das Grenzverhältnis $\lim_{\nu=\infty}(A_0^{(\nu k+\lambda)} : A_1^{(\nu k+\lambda)} : \cdots : A_n^{(\nu k+\lambda)})$ existiert oder nicht, und im erstern Fall kann es auch berechnet werden. *Nur in diesem Fall findet Konvergenz statt und zwar stets dann, wenn die für* $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ *berechneten Verhältnisse die gleichen sind.*

---

*) Es ist bemerkenswert, daß (39) auch für gemischte Periodizität gilt. Denn bei μ-zeiliger Vorperiode ist darin zunächst $A_i^{(\alpha)}$ durch $A_{i,\mu}^{(\alpha)}$ zu ersetzen; multipliziert man dann mit $A_s^{(\mu+i)}$ und summiert nach i, so kommt nach (9) genau (39) zum Vorschein; nur ist i durch s, λ durch $\lambda+\mu$ ersetzt, was natürlich keinen Unterschied macht.

Die allgemeinen Konvergenzbedingungen gestatten indes keine so einfache Formulierung wie für $k = 1$; es zeigt sich, daß durch die charakteristische Gleichung allein die Frage nicht entschieden werden kann, vielmehr kommt es noch auf das Verhalten der Funktionen $g_{\lambda,i}$ an. Prinzipiell bietet es zwar keine Schwierigkeit, mit Hilfe von (40) eine Anzahl von Bedingungen aufzustellen, von denen jede zur Konvergenz hinreichend, und mindestens eine notwendig ist. Doch führt dies auf eine umständliche Unterscheidung von Einzelfällen, deren Aufzählung kaum Interesse bieten dürfte. Ich will mich deshalb darauf beschränken, die beiden einfachsten Kriterien abzuleiten, die von verhältnismäßig großer Allgemeinheit sind.

Satz VIIIa. *Wenn die charakteristische Gleichung eine reguläre ist mit der Hauptwurzel ϱ_0, und wenn für jeden der Werte $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ die $n+1$ Größen*

$$g_{\lambda,0}(\varrho_0),\ g_{\lambda,1}(\varrho_0),\ \cdots,\ g_{\lambda,n}(\varrho_0)$$

nicht sämtlich verschwinden, so konvergiert der Prozeß, und es ist

$$\varrho_0 x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Satz VIIIb. *Wenn erstens die charakteristische Gleichung regulär ist und sie die Hauptwurzel ϱ_0 mindestens r mal öfter enthält als jede andere Wurzel vom gleichen absoluten Betrag; wenn zweitens für jeden der Werte $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ die Größen*

$$\begin{array}{llll} g_{\lambda,0}(\varrho_0), & g_{\lambda,1}(\varrho_0), & \cdots, & g_{\lambda,n}(\varrho_0), \\ g'_{\lambda,0}(\varrho_0), & g'_{\lambda,1}(\varrho_0), & \cdots, & g'_{\lambda,n}(\varrho_0), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\lambda,0}^{(r-1)}(\varrho_0), & g_{\lambda,1}^{(r-1)}(\varrho_0), & \cdots, & g_{\lambda,n}^{(r-1)}(\varrho_0) \end{array}$$

nicht sämtlich verschwinden; wenn drittens für mindestens einen Wert $\lambda = \mu$ die Größen

$$g_{\mu,0}(\varrho_0),\ g_{\mu,1}(\varrho_0),\ \cdots,\ g_{\mu,n}(\varrho_0)$$

nicht sämtlich verschwinden): so konvergiert der Prozeß, und zwar ist*

$$\varrho_0 x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Beweis: Für $r = 1$ ist offenbar VIIIb mit VIIIa identisch. Aus (40) folgt nun, da $f(\varrho) = 0$ eine reguläre Gleichung ist:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\binom{\nu}{r_0-1} \varrho_0^{\nu-r_0+1}} = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)};$$

*) Wegen (33) kann dann μ auch unter den Zahlen $0, 1, \cdots, n$ ausgewählt werden, und die dritte Bedingung ist damit äquivalent, daß die Unterdeterminanten von (22) für $\varrho = \varrho_0$ nicht alle verschwinden dürfen.

wenn also die Größen $g_{\lambda,0}(\varrho_0)$, $g_{\lambda,1}(\varrho_0)$, $\cdots$, $g_{\lambda,n}(\varrho_0)$ nicht alle verschwinden, so folgt

$$\lim_{\nu=\infty}\left(A_0^{(\nu k+\lambda)} : A_1^{(\nu k+\lambda)} : A_n^{(\nu k+\lambda)}\right) = g_{\lambda,0}(\varrho_0) : g_{\lambda,1}(\varrho_0) : \cdots : g_{\lambda,n}(\varrho_0).$$

Andernfalls aber folgt nach den Voraussetzungen des Satzes VIIIb aus (40)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\binom{\nu}{r_0-2}\varrho_0^{\nu-r_0+2}} = D\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_0}(\varrho_0)\right) = \frac{\psi_0(\varrho_0)\,g'_{\lambda,i}(\varrho_0) - \psi'_0(\varrho_0)\,g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)^2} = \frac{g'_{\lambda,i}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)}.$$

Wenn also $g'_{\lambda,0}(\varrho_0), \cdots, g'_{\lambda,n}(\varrho_0)$ nicht sämtlich verschwinden, so ist

$$\lim_{\nu=\infty}\left(A_0^{(\nu k+\lambda)} : A_1^{(\nu k+\lambda)} : \cdots : A_n^{(\nu k+\lambda)}\right) = g'_{\lambda,0}(\varrho_0) : g'_{\lambda,1}(\varrho_0) : \cdots : g'_{\lambda,n}(\varrho_0);$$

im andern Fall aber folgt wieder weiter aus (40)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\binom{\nu}{r_0-3}\varrho_0^{\nu-r_0+3}} = \frac{1}{2}D^2\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_0}(\varrho_0)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{g''_{\lambda,i}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)}.$$

Durch Wiederholung dieses Schlusses findet man allgemein: Es ist:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(A_0^{(\nu k+\lambda)} : A_1^{(\nu k+\lambda)} : \cdots : A_n^{(\nu k+\lambda)}\right) = g^{(\alpha)}_{\lambda,0}(\varrho_0) : g^{(\alpha)}_{\lambda,1}(\varrho_0) : \cdots : g^{(\alpha)}_{\lambda,n}(\varrho_0),$$

wobei α die kleinste Zahl ist von der Beschaffenheit, daß die rechtsseitigen Größen nicht sämtlich verschwinden. α wird für die verschiedenen Werte von λ verschieden sein, aber stets $\leqq r-1$; speziell für $\lambda=\mu$ ist $\alpha=0$. Satz VIIIb wird nun bewiesen sein, sowie noch gezeigt ist, daß die den Werten $\lambda=0,1,\cdots,k-1$ entsprechenden Verhältnisse die gleichen sind.

Nach Definition (pag. 39 unten) sind für $\lambda=0,1,\cdots,n$ die $g_{\lambda,i}(\varrho)$ die n-reihigen Minoren einer Determinante, die gleich $f(\varrho)$ ist. Daher sind nach einem bekannten Satz die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} g_{\lambda,0}(\varrho) & g_{\lambda,1}(\varrho) & \cdots & g_{\lambda,n}(\varrho) \\ g_{\mu,0}(\varrho) & g_{\mu,1}(\varrho) & \cdots & g_{\mu,n}(\varrho) \end{Vmatrix}$$

durch $f(\varrho)$ teilbar. Dies gilt zunächst, wenn λ und μ nicht größer als n sind, wegen (33) gilt es dann aber auch allgemein. Die Determinanten haben also für $\varrho=\varrho_0$ eine Nullstelle mindestens von der r^{ten} Ordnung, also verschwinden gewiß auch die α^{ten} Ableitungen für $\varrho=\varrho_0$, woraus mit Rücksicht auf die obige Bedeutung von α folgt, daß die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} g^{(\alpha)}_{\lambda,0}(\varrho_0) & g^{(\alpha)}_{\lambda,1}(\varrho_0) & \cdots & g^{(\alpha)}_{\lambda,n}(\varrho_0) \\ g_{\mu,0}(\varrho_0) & g_{\mu,1}(\varrho_0) & \cdots & g_{\mu,n}(\varrho_0) \end{Vmatrix}$$

verschwinden, und sonach

$$g^{(\alpha)}_{\lambda,0}(\varrho_0) : g^{(\alpha)}_{\lambda,1}(\varrho_0) : \cdots : g^{(\alpha)}_{\lambda,n}(\varrho_0) = g_{\mu,0}(\varrho_0) : g_{\mu,1}(\varrho_0) : \cdots : g_{\mu,n}(\varrho_0).$$

Damit ist die Konvergenz bewiesen, und zwar ist

$$x_0 : x_1 : \cdots : x_n = g_{\mu,0}(\varrho_0) : g_{\mu,1}(\varrho_0) : \cdots : g_{\mu,n}(\varrho_0).$$

Daß auch die Behauptung $\varrho_0 x_i = A_i^{(k)} x_0 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n$ zutrifft, folgt hieraus mit Rücksicht auf (34) für $\lambda = \mu$, $\varrho = \varrho_0$. Die am Schluß des vorigen Paragraphen eingeführte Wurzel ϱ' ist daher jetzt die Hauptwurzel ϱ_0.

Für $n = 1$, d. h. für die Kettenbrüche, ist $f(\varrho)$ nur vom zweiten Grad und infolgedessen gestatten die Sätze VIII eine etwas einfachere Fassung. Überdies ist leicht zu sehen, daß Konvergenz auch *nur in dem Fall* stattfinden kann, wenn die in VIIIb geforderten Bedingungen für $r = 1$ oder $r = 2$ erfüllt sind.*)

Für den Fall einer *nicht regulären* charakteristischen Gleichung ist die folgende Bemerkung von Interesse: Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\lambda)} & A_0^{(k+\lambda)} & \cdots & A_0^{(nk+\lambda)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(k+\lambda)} & \cdots & A_n^{(nk+\lambda)} \end{vmatrix}$$

nicht für jeden Wert von λ verschwindet (wegen (30) genügt es auch hier, sich auf $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ zu beschränken), so zeigt die zu Beginn des Paragraphen bewiesene Relation $A_i^{\lambda} \varphi_\nu(A_i^k) = 0$, daß aus der Existenz von $\lim_{\nu=\infty} \left(A_0^{(\nu k+\lambda)} : A_1^{(\nu k+\lambda)} : \cdots : A_n^{(\nu k+\lambda)}\right)$ auch die von $\lim_{\nu=\infty} \left(B_0^{(\nu)} : B_1^{(\nu)} : \cdots : B_n^{(\nu)}\right)$ folgt und umgekehrt. Nach Satz VII existiert aber der letztere limes dann und nur dann, wenn $f(\varrho) = 0$ eine reguläre Gleichung ist**), so daß

*) Die Konvergenzbedingungen für periodische *Kettenbrüche* sind vollständig angegeben zuerst von O. Stolz: Allg. Arithm. 2ter Teil, p. 299 ff. Spätere Beweise von Landsberg (für einen Spezialfall): Journal f. Math. Bd. 110, und Pringsheim: Münch. Ber. 1900. — In diesen Arbeiten werden übrigens auch die *Teilzähler* als beliebige Zahlen vorausgesetzt. Wenn man den Jacobischen Algorithmus in analoger Weise erweitert, indem man an Stelle von (4) die allgemeinere Formel

$$A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)}$$

treten läßt, so lassen sich dieselben Betrachtungen ohne wesentliche Änderung durchführen. Während aber bei den Kettenbrüchen stets $a_0^{(\nu)} \neq 0$ vorausgesetzt werden darf, weil sonst der Kettenbruch sich auf einen endlichen reduziert, muß im allgemeinen Fall auch zugelassen werden, daß $a_0^{(\nu)}$ für gewisse ν verschwindet. Dann ist aber der Satz von der Erhaltung der Konvergenz bez. Divergenz bei Unterdrückung der Vorperiode nicht mehr unbedingt richtig, weil gerade die Determinante verschwinden kann, auf deren Nichtverschwinden der Beweis in § 9 gegründet wurde. Unter Berücksichtigung der Fußnote auf pag. 43 ist aber auch dieser Fall leicht zu erledigen.

**) Daß das konstante Glied in $f(\varrho)$ nicht -1, sondern $-b_0 = \pm 1$ ist, ändert an dem Gedankengang in § 11 nichts; vgl. die vorhergehende Fußnote.

sich ergibt: *Wenn die charakteristische Gleichung nicht regulär ist, so ist das Verschwinden der obigen Determinante für* $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ *zur Konvergenz notwendig.* Schon hieraus ist für $n = 1$ zu schließen, daß die charakteristische Gleichung regulär sein muß. Denn andernfalls würde aus dem Verschwinden der Determinante speziell für $\lambda = 0, 1$ folgen: $A_1^{(k)} = 0$, $A_0^{(k+1)} = 0$, und hieraus weiter: $A_1^{(\nu k)} = 0$, $A_0^{(\nu k+1)} = 0$, so daß $A_0^{(\nu k)} : A_1^{(\nu k)} = 1 : 0$, aber $A_0^{(\nu k+1)} : A_1^{(\nu k+1)} = 0 : 1$, also von Konvergenz keine Rede sein kann. Für $n > 1$ ist aber eine ähnliche Schlußweise nicht möglich.

§ 14.

Der Spezialfall reeller positiver $a_i^{(\nu)}$.

Über die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ soll jetzt die spezielle Annahme gemacht werden, daß sie reell sind und den Ungleichungen genügen:

$$a_i^{(\nu)} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$
$$a_n^{(\nu)} > 0.$$

Da wegen der Periodizität die Quotienten $\frac{1}{a_n^{(\nu)}}$ und $\frac{a_i^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$ nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werte annehmen, so sind die Bedingungen von Satz II erfüllt; folglich konvergiert der Prozeß und die Grenzwerte $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ sind endliche positive (nicht verschwindende) Größen. Um sie nun wirklich zu berechnen, ist eine Diskussion der charakteristischen Gleichung erforderlich.

Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz: Die Gleichung

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \varrho - a_{00}, & -a_{01}, & \cdots, & -a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{n0}, & -a_{n1}, & \cdots, & \varrho - a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

wo die a_{ij} sämtlich *positiv* sind (exkl. 0), hat mindestens *eine positive* Wurzel. Die größte positive Wurzel ϱ_0 ist eine einfache, und die n-reihigen Minoren der Determinante $\Delta(\varrho_0)$ sind alle positiv (exkl. 0).

Für $n = 0$ ist der Satz evident. Wir nehmen also an, er sei für kleinere Werte von n bereits als richtig erkannt; wenn demgemäß mit ϱ' die größte positive Wurzel von

$$\Delta_0(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \varrho - a_{11}, & -a_{12}, & \cdots, & -a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \varrho - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnet wird, so sind die aus

$$\begin{aligned} \varrho' &= a_{11} + a_{21}\eta_2 + \cdots + a_{n1}\eta_n, \\ \varrho'\eta_i &= a_{1i} + a_{2i}\eta_2 + \cdots + a_{ni}\eta_n \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{aligned} \tag{41}$$

berechneten Größen $\eta_2, \cdots, \eta_n$ endlich und positiv.

Definiert man die Funktionen $\xi_1(\varrho), \cdots, \xi_n(\varrho)$ durch das Gleichungssystem

$$\varrho\xi_i = a_{i0} + a_{i1}\xi_1 + \cdots + a_{in}\xi_n, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{42}$$

so ist

$$\varrho - a_{00} - a_{01}\xi_1 - \cdots - a_{0n}\xi_n = \frac{\Delta(\varrho)}{\Delta_0(\varrho)}. \tag{43}$$

$\xi_1, \cdots, \xi_n$ sind rationale Funktionen von ϱ mit dem Nenner $\Delta_0(\varrho)$; solange also $\varrho > \varrho'$ bleibt, ändern sie sich stetig mit ϱ, und können daher ihr Zeichen nicht wechseln, ohne durch 0 zu gehen. Ferner lassen sie sich für genügend große ϱ nach fallenden Potenzen entwickeln:

$$\xi_i = \frac{a_{i0}}{\varrho} + \cdots. \tag{44}$$

Für große Werte von ϱ sind also $\xi_1, \cdots, \xi_n$ positiv, aber beliebig klein, und daher ist die linke Seite von (43) ebenfalls positiv. Wenn ϱ gegen ϱ' abnimmt, so müssen $\xi_1, \cdots, \xi_n$ positiv bleiben; denn ginge etwa ξ_i durch 0, so wäre für den betreffenden Wert von ϱ, da alle $a_{ij} > 0$ sind, die i^{te} Gleichung des Systems (42) nicht erfüllt. Für $\varrho = \varrho'$ selbst hat mindestens eine der Funktionen ξ_i einen Pol; andernfalls müßten nämlich die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} -a_{10}, & \varrho' - a_{11}, & \cdots, & -a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n0}, & -a_{n1}, & \cdots, & \varrho' - a_{nn} \end{Vmatrix}$$

sämtlich verschwinden, und daher das System (41) zusammen mit

$$0 = a_{10} + a_{20}\eta_2 + \cdots + a_{n0}\eta_n$$

lösbar sein; dies ist aber nicht möglich, da die η_i in (41) positiv sind.

Die linke Seite von (43), und mithin auch $\Delta(\varrho)$, geht demnach, wenn ϱ von sehr großen Werten gegen ϱ' abnimmt, vom Positiven ins Negative über, und daher wegen der Stetigkeit mindestens einmal durch 0. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen, und zugleich ist $\varrho_0 > \varrho'$. Da ferner $\Delta_0(\varrho_0), \xi_1(\varrho_0), \cdots, \xi_n(\varrho_0)$ positiv sind, so sind zunächst diejenigen Minoren der Determinante $\Delta(\varrho_0)$ positiv, die durch Unterdrückung der ersten Zeile entstehen. Aber der Index 0 ist in keiner Weise ausgezeichnet, und somit sind alle n-reihigen Minoren positiv.

Es bleibt nur noch zu beweisen, daß ϱ_0 eine einfache Wurzel ist. Nun folgt aus (42) durch Differentiation

$$\varrho \frac{d\xi_i}{d\varrho} = -\xi_i + a_{i1}\frac{d\xi_1}{d\varrho} + \cdots + a_{in}\frac{d\xi_n}{d\varrho}; \tag{45}$$

ferner ist für große ϱ wegen (44)

$$\frac{d\xi_i}{d\varrho} = -\frac{a_{i0}}{\varrho^2} + \cdots$$

negativ. Wenn ϱ gegen ϱ' abnimmt, müssen $\frac{d\xi_1}{d\varrho}, \cdots, \frac{d\xi_n}{d\varrho}$ negativ bleiben; denn würde etwa $\frac{d\xi_i}{d\varrho}$ positiv, so müßte es wegen der Stetigkeit die Null passieren, was mit (45) im Widerspruch steht. $\frac{d\xi_i}{d\varrho}$ ist also für $\varrho = \varrho_0$ gewiß negativ, und daher ist nach (43)

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\Delta(\varrho)}{\Delta_0(\varrho)}\right)_{\varrho=\varrho_0} > 0,$$

also $\Delta'(\varrho_0) > 0$, und somit kann ϱ_0 keine mehrfache Wurzel von $\Delta(\varrho)$ sein.

Nach den zu Beginn des Paragraphen gemachten Annahmen über die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ ist von einem gewissen ν ab (für $\nu > 2n$):

$$A_i^{(\nu)} > 0.$$

Daher erfüllt für diese ν die Gleichung

$$F(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma - A_0^{(\nu k)}, & -A_0^{(\nu k+1)}, \cdots, & -A_0^{(\nu k+n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_n^{(\nu k)}, & -A_n^{(\nu k+1)}, \cdots, & \sigma - A_n^{(\nu k+n)} \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln nach § 10, Satz C die ν^{ten} Potenzen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, die Voraussetzungen des Hilfssatzes. Sie hat also eine einfache, größte positive Wurzel σ_0, und wenn mit $G_{\lambda,i}(\sigma)$ die Minoren der Determinante $F(\sigma)$ bezeichnet werden, so ist $G_{\lambda,i}(\sigma_0) > 0$.

σ_0 ist die ν^{te} Potenz einer Wurzel ϱ_0 der charakteristischen Gleichung; wäre ϱ_0 nicht positiv, so müßte $\frac{\varrho_0}{|\varrho_0|}$ eine ν^{te} Einheitswurzel sein, was aber nicht möglich ist, da die Wahl von ν (oberhalb einer gewissen Grenze) völlig frei stand. Also hat die charakteristische Gleichung $f(\varrho) = 0$ ebenfalls eine einfache, größte positive Wurzel ϱ_0. Daß auch die Minoren $g_{\lambda,i}(\varrho_0)$ positiv sind, erkennt man folgendermaßen: Bekanntlich ist

$$F(\varrho^\nu) = (-1)^{(\nu+1)(n+1)} \prod f(\varepsilon\varrho),$$

wo sich das Produkt auf alle ν^{ten} Einheitswurzeln ε bezieht. Für $\varrho = \varrho_0$

verschwindet der Faktor $f(\varrho)$, während die andern von Null verschieden bleiben, da sonst σ_0 eine mehrfache Wurzel von $F(\sigma)$ sein müßte. Analog zu (35) hat man

$$\frac{G_{\lambda,i}(\sigma)}{F(\sigma)} = \frac{A_i^{(\lambda)}}{\sigma} + \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\sigma^2} + \frac{A_i^{(2\nu k+\lambda)}}{\sigma^3} + \cdots,$$

und folglich

$$\frac{G_{\lambda,i}(\varrho^\nu)}{F(\varrho^\nu)} = \frac{1}{\nu\varrho^{\nu-1}} \sum \varepsilon \frac{g_{\lambda,i}(\varepsilon\varrho)}{f(\varepsilon\varrho)}.$$

Multipliziert man mit $f(\varrho)$ und setzt $\varrho = \varrho_0$, so folgt

$$\frac{1}{\nu\varrho_0^{\nu-1}} g_{\lambda,i}(\varrho_0) = \frac{G_{\lambda,i}(\sigma_0)}{(-1)^{(\nu+1)(n+1)} \prod' f(\varepsilon\varrho_0)},$$

wo der Akzent an dem Produkt andeuten soll, daß $\varepsilon = 1$ auszunehmen ist. Wählt man etwa ν ungerade, so enthält das Produkt nur paarweise konjugiert imaginäre Faktoren, ist also positiv, woraus folgt: $g_{\lambda,i}(\varrho_0) > 0$.*)

Da, wie zu Beginn des Paragraphen bemerkt, der Algorithmus konvergiert, muß $f(\varrho)$ eine Wurzel ϱ' haben, für welche die Gleichungen bestehen

$$\varrho' x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Da ferner nach Satz II die Quotienten $\frac{x_i}{x_0}$ endlich und positiv, also alle x_i von Null verschieden sind, so ist auch ϱ' positiv und nach (38):

$$\varrho' = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{((\nu+1)k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k+\lambda)}} \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

also auch (vergl. das Schlußverfahren pag. 13):

$$\varrho' = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu+1)k} + A_1^{((\nu+1)k+1)} + \cdots + A_n^{((\nu+1)k+n)}}{A_0^{(\nu k)} + A_1^{(\nu k+1)} + \cdots + A_n^{(\nu k+n)}}.$$

Nach § 10, Satz D sind aber hier Zähler und Nenner Potenzsummen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\sum \varrho^{\nu+1}}{\sum \varrho^\nu} = \varrho'.$$

Nun sei ϱ_1 der größte der absoluten Beträge der Wurzeln, und etwa ϱ_1 $r$fach, $-\varrho_1$ $r_0$fach, $\varrho_1 e^{\pm\varphi_1 i}$ $r_1$fach, $\cdots$, $\varrho_1 e^{\pm\varphi_m i}$ $r_m$fach zählend die Wurzeln vom absoluten Wert ϱ_1. Dann ist

$$\frac{\sum \varrho^{\nu+1}}{\sum \varrho^\nu} = \varrho_1 \frac{r + r_0(-1)^{\nu+1} + 2r_1 \cos(\nu+1)\varphi_1 + \cdots + 2r_m \cos(\nu+1)\varphi_m + \varepsilon_{\nu+1}}{r + r_0(-1)^\nu + 2r_1 \cos\nu\varphi_1 + \cdots + 2r_m \cos\nu\varphi_m + \varepsilon_\nu},$$

*) Zunächst für $\lambda \leqq n$, dann aber nach (33) auch für $\lambda > n$.

wo ε_ν mit wachsendem ν beliebig klein wird. Es ist leicht zu sehen, daß die rechte Seite für $\nu = \infty$ keinen positiven Grenzwert haben kann, außer wenn $r_0 = 0,\ r_1 = 0, \cdots, r_m = 0$ und folglich $r > 0$ ist.*) Daher ist $\varrho_1 = \varrho'$, und es gibt keine hiervon verschiedene Wurzel von gleichem oder größerem absolutem Betrag. ϱ' ist demnach als positive Wurzel mit ϱ_0 identisch; die charakteristische Gleichung ist eine reguläre, und ϱ_0 die Hauptwurzel. Wir erhalten also, noch mit Rücksicht auf Satz VIIIa den

Satz IX. *Wenn die Zahlen* $a_i^{(\nu)}$ *reell sind und den Ungleichungen*

$$a_i^{(\nu)} \geqq 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$
$$a_n^{(\nu)} > 0$$

genügen, so ist die charakteristische Gleichung regulär, die Hauptwurzel ϱ_0 *positiv und einfach, und außerdem* $g_{\lambda,i}(\varrho_0) > 0$. *Der Algorithmus konvergiert, und es ist*

$$\varrho_0 x_i = A_i^{(k)} x_0 + A_i^{(k+1)} x_1 + \cdots + A_i^{(k+n)} x_n \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

oder durch Auflösung

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \frac{x_i}{x_0} = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{g_{\lambda,0}(\varrho_0)},$$

wo λ *beliebig.*

Bemerkung. Es wäre prinzipiell wichtig, die Regularität der charakteristischen Gleichung auf rein algebraischem Wege, *ohne die vorherige Kenntnis der Konvergenz des Algorithmus* zu beweisen. Aus Satz VIIIa könnte dann die Konvergenz sofort geschlossen, und das obige Resultat wiedergewonnen werden. Dieser Gedanke ist in der Tat durchführbar. Es sind nämlich die Potenzsummen der charakteristischen Gleichung (nach § 10, D) gleich

$$\sum \varrho^\nu = A_0^{(\nu k)} + A_1^{(\nu k+1)} + \cdot \cdot + A_n^{(\nu k+n)},$$

also alle positiv, und daraus läßt sich folgern, daß keine Wurzeln von

*) Bekanntlich lassen sich für jedes noch so kleine ε positive ganze Zahlen $\varkappa, \mu_1, \cdots, \mu_m$ von der Art bestimmen, daß

$$|\varkappa\varphi_1 - \mu_1\pi| < \varepsilon,\ |\varkappa\varphi_2 - \mu_2\pi| < \varepsilon, \cdots, |\varkappa\varphi_m - \mu_m\pi| < \varepsilon$$

wird, wo π die Ludolphsche Zahl bedeuten soll. Setzt man nun $\nu = 2\varkappa$ und läßt $\varkappa$ eine Folge von Zahlen durchlaufen, für welche ε gegen 0 abnimmt, so konvergiert für diese Werte von ν der obige Bruch gegen

$$\frac{r - r_0 + 2r_1 \cos\varphi_1 + \cdots + 2r_m \cos\varphi_m}{r + r_0 + 2r_1 + \cdots + 2r_m}.$$

Setzt man dagegen $\nu = 2\varkappa - 1$, und läßt $\varkappa$ dieselbe Zahlenfolge durchlaufen, so konvergiert für diese Werte von ν der obige Bruch gegen den reziproken Wert des vorigen; beide Grenzwerte sind offenbar nur dann einander gleich und positiv, wenn $r_0 = r_1 = \cdots = r_m = 0$ ist, w. z. b. w.

größerm absolutem Betrag als ϱ_0 existieren können. Sodann ergeben sich über das Wachstum der Potenzsummen mit zunehmendem Exponenten noch einige Ungleichungen, aus denen mit Rücksicht auf die Einfachheit*) der größten positiven Wurzel ϱ_0 geschlossen werden kann, daß auch keine weitern Wurzeln vom absoluten Wert *gleich* ϱ_0 vorhanden sind. Doch erfordert die exakte Durchführung des skizzierten Gedankenganges verschiedene längere Hilfsbetrachtungen, so daß ich der obigen Darstellung den Vorzug geben zu sollen glaubte.

§ 15.

Die koordinierte Entwicklung.

In der Theorie der Kettenbrüche beweist man den Satz: Sind α, π' die Werte zweier konvergenter reinperiodischer Kettenbrüche, deren zweiter die umgekehrte Periode des ersten hat, also

$$\alpha = a + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a + \cdots}}}, \qquad \pi' = a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cdots + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cdots}}},$$

und bildet man die quadratische Gleichung, welcher α genügt, so ist $-\frac{1}{\pi'}$ die zweite Wurzel derselben Gleichung.

Dieser Satz soll jetzt auf unsre erweiterten Kettenbruchalgorithmen ausgedehnt werden. Zuvörderst beweisen wir die Formel:

$$\sum_{s=0}^{n} g_{\lambda,s}(\varrho)\, g_{s,i}(\sigma) = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho) f(\sigma) - g_{\lambda,i}(\sigma) f(\varrho)}{\sigma - \varrho}. \tag{46}$$

Es ist nämlich mit Rücksicht auf (35) und (33)

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{g_{\lambda,s}(\varrho)}{f(\varrho)}\, g_{s,i}(\sigma) = \sum_{s=0}^{n} g_{s,i}(\sigma) \left[\frac{A_s^{(\lambda)}}{\varrho} + \frac{A_s^{(k+\lambda)}}{\varrho^2} + \frac{A_s^{(2k+\lambda)}}{\varrho^3} + \cdots \right]$$

$$= \frac{g_{\lambda,i}(\sigma)}{\varrho} + \frac{g_{k+\lambda,i}(\sigma)}{\varrho^2} + \frac{g_{2k+\lambda,i}(\sigma)}{\varrho^3} + \cdots.$$

Aus (37) folgt aber leicht

$$g_{\nu k+\lambda,i}(\sigma) = \sigma^\nu g_{\lambda,i}(\sigma) - f(\sigma)\left(A_i^{(\lambda)}\sigma^{\nu-1} + A_i^{(k+\lambda)}\sigma^{\nu-2} + \cdots + A_i^{((\nu-1)k+\lambda)}\right),$$

*) Man beachte, daß diese oben bewiesen wurde, ohne die Konvergenz vorauszusetzen.

und indem man dies in die letzte Formel substituiert, erhält man

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{g_{\lambda,s}(\varrho)}{f(\varrho)}\, g_{s,i}(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma^{\nu} g_{\lambda,i}(\sigma) - f(\sigma)\left(A_i^{(\lambda)}\sigma^{\nu-1} + A_i^{(k+\lambda)}\sigma^{\nu-2} + \cdots + A_i^{((\nu-1)k+\lambda)}\right)}{\varrho^{\nu+1}}$$

$$= g_{\lambda,i}(\sigma)\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\sigma}{\varrho^2} + \frac{\sigma^2}{\varrho^3} + \cdots\right)$$

$$- f(\sigma)\Big[A_i^{(\lambda)}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{\sigma}{\varrho^3} + \frac{\sigma^2}{\varrho^4} + \cdots\right) + A_i^{(k+\lambda)}\left(\frac{1}{\varrho^3} + \frac{\sigma}{\varrho^4} + \frac{\sigma^2}{\varrho^5} + \cdots\right)$$

$$+ A_i^{(2k+\lambda)}\left(\frac{1}{\varrho^4} + \frac{\sigma}{\varrho^5} + \frac{\sigma^2}{\varrho^6} + \cdots\right) + \cdots\Big]$$

$$= \frac{g_{\lambda,i}(\sigma)}{\varrho - \sigma} - \frac{f(\sigma)}{\varrho - \sigma}\left[\frac{A_i^{(\lambda)}}{\varrho} + \frac{A_i^{(k+\lambda)}}{\varrho^2} + \frac{A_i^{(2k+\lambda)}}{\varrho^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{g_{\lambda,i}(\sigma)}{\varrho - \sigma} - \frac{f(\sigma)}{\varrho - \sigma}\,\frac{g_{\lambda,i}(\varrho)}{f(\varrho)}.$$

Durch Multiplikation mit $f(\varrho)$ ergibt sich hieraus die gewünschte Formel. Speziell erhält man aus (46), wenn ϱ_1, ϱ_2 zwei beliebige Wurzeln der charakteristischen Gleichung bedeuten:

$$\sum_{s=0}^{n} g_{\lambda,s}(\varrho_1)\, g_{s,i}(\varrho_2) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \varrho_1 \neq \varrho_2, \\ g_{\lambda,i}(\varrho_1) f'(\varrho_1) & \text{wenn } \varrho_1 = \varrho_2. \end{cases} \tag{47}$$

Die $a_i^{(\nu)}$ sollen jetzt wieder den Ungleichungen des Satzes IX genügen; setzt man dann wie früher

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_i, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = \alpha_i^{(\lambda)},$$

so erhält man die k-zeilig reinperiodische Entwicklung:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_n'},\ \alpha_2 = a_2 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_n'}, \cdots, \alpha_n = a_n + \frac{\alpha_{n-1}'}{\alpha_n'}, \\
&\alpha_1' = a_1' + \frac{1}{\alpha_n''},\ \alpha_2' = a_2' + \frac{\alpha_1''}{\alpha_n''}, \cdots, \alpha_n' = a_n' + \frac{\alpha_{n-1}''}{\alpha_n''}, \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_1^{(k-1)} = a_1^{(k-1)} + \frac{1}{\alpha_n},\ \alpha_2^{(k-1)} = a_2^{(k-1)} + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \cdots, \alpha_n^{(k-1)} = a_n^{(k-1)} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Daneben betrachten wir die ebenfalls konvergente k-zeilig reinperiodische Entwicklung

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = p_1 + \frac{1}{\pi_n'},\ \pi_2 = p_2 + \frac{\pi_1'}{\pi_n'}, \cdots, \pi_n = p_n + \frac{\pi_{n-1}'}{\pi_n'}, \\
&\pi_1' = p_1' + \frac{1}{\pi_n''},\ \pi_2' = p_2' + \frac{\pi_1''}{\pi_n''}, \cdots, \pi_n' = p_n' + \frac{\pi_{n-1}''}{\pi_n''}, \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\pi_1^{(k-1)} = p_1^{(k-1)} + \frac{1}{\pi_n},\ \pi_2^{(k-1)} = p_2^{(k-1)} + \frac{\pi_1}{\pi_n}, \cdots, \pi_n^{(k-1)} = p_n^{(k-1)} + \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},
\end{aligned} \tag{49}$$

wobei

$$p_i^{(\nu)} = a_i^{(n-\nu-i)}$$

sein soll, die oberen Indizes mod k genommen. Sie möge die zu (48) *koordinierte* Entwicklung heißen. Offenbar ist diese Beziehung eine gegenseitige, d. h. (48) ist auch die koordinierte Entwicklung zu (49).

Wenn in $A_i^{(\nu)}$ alle a durch die entsprechenden p ersetzt werden, so möge $P_i^{(\nu)}$ entstehen; diese Größen sind dann ebenfalls positiv (und wachsen ebenso wie die $A_i^{(\nu)}$ mit ν ins Unendliche); ferner existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{P_i^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)}}$. Bezüglich dieser Grenzwerte ist zu bemerken: *Wenn es auf irgend eine Art gelingt, kn positive Zahlen* $\pi_i^{(\nu)}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ \nu=0,1,\cdots,k-1)$ *zu finden, die die Gleichungen* (49) *befriedigen, so ist notwendig*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{P_i^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)}} = \pi_i.$$

Denn man findet analog zu (2) aus (49)

$$\pi_i = \frac{P_i^{(\nu)} + P_i^{(\nu+1)}\pi_1^{(\nu)} + \cdots + P_i^{(\nu+n)}\pi_n^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)} + P_0^{(\nu+1)}\pi_1^{(\nu)} + \cdots + P_0^{(\nu+n)}\pi_n^{(\nu)}},$$

wo die obern Indizes der π mod k zu nehmen sind; daraus folgt, weil $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{P_i^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)}}$ existiert, sofort die Behauptung (vergl. das Schlußverfahren auf pag. 13).

Da die Gleichung $f(\varrho) = 0$ nach Satz IX die Hauptwurzel ϱ_0 nur einmal enthält, und alle andern Wurzeln absolut kleiner sind als ϱ_0, so muß die aus (35) folgende Reihe

$$\frac{g_{\lambda,i}(\varrho)\,(\varrho-\varrho_0)}{f(\varrho)} = A_i^{(\lambda)} + \frac{A_i^{(k+\lambda)} - \varrho_0 A_i^{(\lambda)}}{\varrho} + \frac{A_i^{(2k+\lambda)} - \varrho_0 A_i^{(k+\lambda)}}{\varrho^2} + \cdots$$

für $\varrho = \varrho_0$ noch konvergieren, und es ergibt sich dann für $\varrho = \varrho_0$:

$$\frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{f'(\varrho_0)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{\varrho_0^{\nu}}. \tag{50}$$

Daher existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k)}} = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{g_{0,i}(\varrho_0)}$, und da er offenbar von i unabhängig ist, so setzen wir*):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_i^{(\nu k)}} = \mathsf{A}_\lambda. \tag{51}$$

*) Hier wären auch negative Werte von λ zulässig, doch ist es nicht nötig, solche in Betracht zu ziehen.

Aus dieser Definition ist ohne weiteres zu entnehmen, daß die A_λ positiv sind, mit λ stets zunehmen und die Relationen erfüllen

$$\mathsf{A}_{rk+\lambda} = \mathsf{A}_{rk}\mathsf{A}_\lambda, \tag{52}$$

$$\mathsf{A}_{\lambda+n+1} = \mathsf{A}_\lambda + a_1^{(\lambda)}\mathsf{A}_{\lambda+1} + \cdots + a_n^{(\lambda)}\mathsf{A}_{\lambda+n}, \tag{53}$$

$$\mathsf{A}_\lambda = A_0^{(\lambda)} + A_1^{(\lambda)}\mathsf{A}_1 + \cdots + A_n^{(\lambda)}\mathsf{A}_n, \tag{54}$$

ferner wegen (50)

$$\mathsf{A}_\lambda = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{g_{0,i}(\varrho_0)}, \tag{55}$$

woraus die vorhergehenden Formeln ebenfalls geschlossen werden können. Schließlich ist

$$\mathsf{A}_k = \varrho_0, \quad \mathsf{A}_{rk} = \varrho_0^r; \tag{56}$$

die zweite Formel folgt vermöge (52) aus der ersten, und diese ergibt sich ihrerseits aus (38), oder auch aus (55) mit Rücksicht auf (37).

Unterdrückt man bei dem Algorithmus μ Anfangszeilen, so entsteht wieder eine k-zeilige reinperiodische Entwicklung, nur haben die obern Indizes der $a_i^{(\nu)}$ eine zyklische Vertauschung erlitten. Daher existieren analog zu (51) auch die Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\mu}^{(\nu k+\lambda)}}{A_{i,\mu}^{(\nu k)}} = \mathsf{A}_\lambda^{(\mu)}. \tag{57}$$

Diese lassen sich in einfacher Weise durch die A_λ ausdrücken; denn aus (9) folgt, wenn man λ durch μ, ν durch $\nu k + \lambda$ bez. νk ersetzt:

$$\frac{A_{0,\mu}^{(\nu k+\lambda)}A_i^{(\mu)} + A_{1,\mu}^{(\nu k+\lambda)}A_i^{(\mu+1)} + \cdots + A_{n,\mu}^{(\nu k+\lambda)}A_i^{(\mu+n)}}{A_{0,\mu}^{(\nu k)}A_i^{(\mu)} + A_{1,\mu}^{(\nu k)}A_i^{(\mu+1)} + \cdots + A_{n,\mu}^{(\nu k)}A_i^{(\mu+n)}} = \frac{A_i^{(\nu k+\lambda+\mu)}}{A_i^{(\nu k+\mu)}}.$$

Da links alle Glieder positiv sind, so nähert sich nach einem schon mehrfach benutzten Schlußverfahren die linke Seite mit wachsendem ν dem Grenzwert $\mathsf{A}_\lambda^{(\mu)}$, woraus folgt:

$$\mathsf{A}_\lambda^{(\mu)} = \frac{\mathsf{A}_{\lambda+\mu}}{\mathsf{A}_\mu}. \tag{58}$$

Speziell folgt hieraus $\mathsf{A}_k^{(\mu)} = \varrho_0$, was auch direkt geschlossen werden kann, da bei zyklischer Vertauschung der obern Indizes der $a_i^{(\nu)}$ die charakteristische Gleichung, also ϱ_0 nach § 10 E, ungeändert bleibt.

Setzt man jetzt für $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\pi_i^{(\nu)} = \frac{\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n-i} + a_1^{(n-\nu-i)}\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n-i+1} + \cdots + a_i^{(n-\nu-i)}\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n}}{\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n}}, \tag{59}$$

wo die obern Indizes der a mod k zu nehmen sind*), so genügen diese Größen dem System (49), und da sie zudem positiv sind, so folgt (pag. 54):

$$\pi_i = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_i^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)}}, \tag{60}$$

womit die gesuchten Grenzwerte berechnet sind, da die A_λ vermöge (55) als bekannt angesehen werden dürfen.

Es ist

$$\alpha_n' \alpha_n'' \cdots \alpha_n^{(k)} = \varrho_0,$$

wie man am einfachsten aus (7) für $\nu = k$ erkennt. Da die $p_i^{(\nu)}$ ebenfalls den Ungleichungen $p_i^{(\nu)} \geqq 0$, $p_n^{(\nu)} > 0$ genügen, so hat auch die zugehörige charakteristische Gleichung $\varphi(\varrho) = 0$ die in Satz IX für $f(\varrho) = 0$ angegebenen Eigenschaften. Ist daher ϱ_0' ihre Hauptwurzel, so ist analog $\pi_n' \pi_n'' \cdots \pi_n^{(k)} = \varrho_0'$. Anderseits folgt aber aus (59) und (53)

$$\pi_n^{(\nu)} = \frac{\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n+1}}{\mathsf{A}_{\nu(k-1)+n}},$$

wo die Indizes der A noch um das gleiche Multiplum von k geändert werden dürfen. Daher

$$\pi_n' \pi_n'' \cdots \pi_n^{(k)} = \frac{\mathsf{A}_{n+k}}{\mathsf{A}_n} = \varrho_0.$$

Es ist demnach $\varrho_0' = \varrho_0$. Wenn also die $a_i^{(\nu)}$ irgend welche den Ungleichungen $a_i^{(\nu)} \geqq 0$, $a_n^{(\nu)} > 0$ genügende Zahlen sind, so haben $f(\varrho)$ und $\varphi(\varrho)$ eine Wurzel gemein, und mithin verschwindet ihre Resultante, woraus folgt, daß sie als Funktion der $a_i^{(\nu)}$ *identisch* verschwindet. $f(\varrho)$ und $\varphi(\varrho)$ haben also stets eine Wurzel gemein, und wegen der Irreduzibilität (§ 10 B) ist daher $f(\varrho) = \varphi(\varrho)$. Dies Resultat sprechen wir aus in

Satz X. *Koordinierte Entwicklungen haben dieselbe charakteristische Gleichung.*

Die Funktion $f(\varrho)$ bleibt ungeändert bei den zwei Substitutionen $(a_i^{(\nu)}, p_i^{(\nu)}) = (a_i^{(\nu)}, a_i^{(n-\nu-i)})$ und $(a_i^{(\nu)}, a_i^{(\nu+1)})$ (letzteres nach § 10 E). Diese erzeugen für $k > 1$ eine Gruppe vom Grad $2k$, und die Koeffizienten von $f(\varrho)$ sind *Invarianten* der Gruppe. Diese Koeffizienten sind aber nicht homogen in den $a_i^{(\nu)}$, und offenbar müssen auch schon ihre einzelnen homogenen Teile Invarianten sein. Die hieran anschließende Frage, ob sie auch noch bei andern Substitutionen ungeändert bleiben, also zugleich Invarianten einer ausgedehnteren Gruppe sind, mag hier unerörtert bleiben.

*) Auch ist es nützlich zu bemerken, daß wegen (52) die Indizes der A alle um das gleiche Multiplum von k vermehrt oder vermindert werden dürfen, ohne daß die rechte Seite von (59) sich ändert.

Da $f(\varrho)$ im Bereich der Variabeln $a_i^{(\nu)}$ irreduzibel ist, so kann die Resultante $R(f, g_{0,0})$ als Funktion der $a_i^{(\nu)}$ *nicht identisch* verschwinden, ebensowenig die Diskriminante $D(f)$. Ersetzt man in $\alpha_i = \frac{g_{0,i}(\varrho_0)}{g_{0,0}(\varrho_0)}$ die Wurzel ϱ_0 durch die andern Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ von $f(\varrho)$, so sollen die entstehenden (konjugierten) Größen bez. mit $\beta_i, \gamma_i, \cdots, \xi_i$ bezeichnet werden. Sie sind endlich, wenn keine der Zahlen $g_{0,0}(\varrho_0), \cdots, g_{0,0}(\varrho_n)$ verschwindet, d. h. wenn $R(f, g_{0,0}) \neq 0$ ist. Das Analogon zu dem eingangs erwähnten Satz über Kettenbrüche lautet dann:

Satz XI. *Wenn die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ reell sind und den Ungleichungen genügen:*

$$a_n^{(\nu)} > 0, \quad a_i^{(\nu)} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$
$$R(f, g_{0,0}) \neq 0, \quad D(f) \neq 0,$$

so konvergiert die koordinierte Entwicklung gegen die Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{P_i^{(\nu)}}{P_0^{(\nu)}} = \frac{\mathsf{A}_{n-i} + a_1^{(n-i)}\mathsf{A}_{n-i+1} + \cdots + a_i^{(n-i)}\mathsf{A}_n}{\mathsf{A}_n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei $\mathsf{A}_0 = 1$ ist, und die Werte $\mathsf{A}_1, \cdots, \mathsf{A}_n$ aus dem Gleichungssystem zu berechnen sind:

$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \beta_n \mathsf{A}_n &= 0, \\ 1 + \gamma_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \gamma_n \mathsf{A}_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 1 + \xi_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \xi_n \mathsf{A}_n &= 0. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt aus (59) und (60), sobald die folgenden zwei Punkte bewiesen sind: Erstens: die zuvor auf andre Weise definierten Größen A_i genügen dem angegebenen System linearer Gleichungen. Zweitens: sie sind durch dieses System eindeutig definiert, d. h. die Determinante kann nicht verschwinden.

Das erste ergibt sich sofort aus (47), da ja

$$\mathsf{A}_i = \frac{g_{i,0}(\varrho_0)}{g_{0,0}(\varrho_0)}; \quad \alpha_i = \frac{g_{0,i}(\varrho_0)}{g_{0,0}(\varrho_0)}, \quad \beta_i = \frac{g_{0,i}(\varrho_1)}{g_{0,0}(\varrho_1)}, \cdots, \xi_i = \frac{g_{0,i}(\varrho_n)}{g_{0,0}(\varrho_n)}.$$

Weiter handelt es sich um die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{0,0}(\varrho_1) & g_{0,1}(\varrho_1) & \cdots & g_{0,n}(\varrho_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{0,0}(\varrho_n) & g_{0,1}(\varrho_n) & \cdots & g_{0,n}(\varrho_n) \end{vmatrix}.$$

Um deren Nichtverschwinden einzusehen, multipliziere man sie zeilenweise mit

$$\begin{vmatrix} g_{0,0}(\varrho_0) & g_{1,0}(\varrho_0) & \cdots & g_{n,0}(\varrho_0) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{0,0}(\varrho_n) & g_{1,0}(\varrho_n) & \cdots & g_{n,0}(\varrho_n) \end{vmatrix};$$

in der Produktdeterminante ist dann die erste Zeile:

$$g_{0,0}(\varrho_0),\ g_{0,0}(\varrho_1),\ \cdots,\ g_{0,0}(\varrho_n),$$

während wegen (47) alle andern Glieder verschwinden, außer den in der Hauptdiagonale befindlichen, welche die Werte $g_{0,0}(\varrho_i)f'(\varrho_i)$ haben $(i=1,2,\cdots,n)$. Das Produkt hat daher den Wert

$$g_{0,0}(\varrho_0)\ g_{0,0}(\varrho_1)f'(\varrho_1)\cdots g_{0,0}(\varrho_n)f'(\varrho_n) = \frac{R(f, g_{0,0})\,D(f)}{f'(\varrho_0)},$$

ist also von 0 verschieden. Damit ist Satz XI vollständig bewiesen.

Es ist zu bemerken, daß bei den Kettenbrüchen $(n=1)$ der Satz unter viel allgemeineren Voraussetzungen über die $a_i^{(\nu)}$ (auch für komplexe $a_i^{(\nu)}$) gilt.*) Bei unserm Beweis kam es nun neben der Konvergenz der ursprünglichen und koordinierten Entwicklung wesentlich auf zweierlei an: Erstens, daß die charakteristische Gleichung regulär und die Hauptwurzel einfach ist, weil sonst die Existenz der Grenzwerte (50) und mithin (51) zweifelhaft erscheint. Zweitens, daß die $P_i^{(\nu)}$ und die durch (59) definierten Größen $\pi_i^{(\nu)}$ *positiv* sind; doch würde es für dieselben Schlüsse schon genügen, daß $1 + \frac{P_i^{(\nu+1)}}{P_i^{(\nu)}}\pi_1^{(\nu)} + \cdots + \frac{P_i^{(\nu+n)}}{P_i^{(\nu)}}\pi_n^{(\nu)}$ nicht für unendlich viele ν der 0 beliebig nahe kommt. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich in der Tat allgemeinere Bedingungen für die Gültigkeit des Satzes XI angeben; doch mag es dahingestellt bleiben, in welch größtem Umfang er noch richtig ist.

Bei der Rolle, die die Resultante $R(f, g_{0,0})$ bei den obigen Betrachtungen spielt, soll noch an dieser Stelle eine später zu verwertende elegante Darstellung derselben als Funktion der $a_i^{(\nu)}$ angegeben werden. Man gelangt dazu, indem man (zeilenweise) das Produkt der beiden Determinanten ausführt:

$$\begin{vmatrix} g_{\lambda,0}(\varrho_0) & g_{\lambda,1}(\varrho_0) & \cdots & g_{\lambda,n}(\varrho_0) \\ g_{\lambda,0}(\varrho_1) & g_{\lambda,1}(\varrho_1) & \cdots & g_{\lambda,n}(\varrho_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{\lambda,0}(\varrho_n) & g_{\lambda,1}(\varrho_n) & \cdots & g_{\lambda,n}(\varrho_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_i & A_i' & \cdots & A_i^{(n)} \\ A_i^{(k)} & A_i^{(k+1)} & \cdots & A_i^{(k+n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_i^{(nk)} & A_i^{(nk+1)} & \cdots & A_i^{(nk+n)} \end{vmatrix}.$$

Es ist nämlich $\sum_{s=0}^{n} A_i^{(\nu k+s)} g_{\lambda,s}(\varrho_\mu) = \varrho_\mu^{\nu} g_{\lambda,i}(\varrho_\mu)$, was am einfachsten aus (34) folgt; daher wird das Determinantenprodukt gleich:

*) Siehe Pringsheim: Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche, Sitzungsberichte d. bayr. Akad. 1900, wo die für die Gültigkeit des fraglichen Satzes notwendigen und hinreichenden Bedingungen genau angegeben sind.

$$g_{\lambda,i}(\varrho_0)\,g_{\lambda,i}(\varrho_1)\cdots g_{\lambda,i}(\varrho_n)\cdot\begin{vmatrix}1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n\end{vmatrix} = R(f, g_{\lambda,i})\begin{vmatrix}1 & \varrho_0 & \cdots & \varrho_0^n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \varrho_n & \cdots & \varrho_n^n\end{vmatrix}.$$

Andererseits ergibt sich aus (36), daß der erste Faktor des obigen Determinantenprodukts sich wieder in die zwei Faktoren spalten läßt:

$$\begin{vmatrix}\varrho_0^n & \varrho_0^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varrho_n^n & \varrho_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_0^{(\lambda)}, & A_0^{(k+\lambda)}-b_n A_0^{(\lambda)}, & \cdots, & A_0^{(nk+\lambda)}-b_n A_0^{((n-1)k+\lambda)}-\cdots-b_1 A_0^{(\lambda)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_n^{(\lambda)}, & A_n^{(k+\lambda)}-b_n A_n^{(\lambda)}, & \cdots, & A_n^{(nk+\lambda)}-b_n A_n^{((n-1)k+\lambda)}-\cdots-b_1 A_n^{(\lambda)}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\varrho_0^n & \varrho_0^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varrho_n^n & \varrho_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_0^{(\lambda)} & A_0^{(k+\lambda)} & \cdots & A_0^{(nk+\lambda)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(k+\lambda)} & \cdots & A_n^{(nk+\lambda)}\end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt das gewünschte Resultat:

$$(61)\quad (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} R(f,g_{\lambda,i})=\begin{vmatrix}A_0^{(\lambda)} & A_0^{(k+\lambda)} & \cdots & A_0^{(nk+\lambda)}\\ A_1^{(\lambda)} & A_1^{(k+\lambda)} & \cdots & A_1^{(nk+\lambda)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(k+\lambda)} & \cdots & A_n^{(nk+\lambda)}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_i & A_i' & \cdots & A_i^{(n)}\\ A_i^{(k)} & A_i^{(k+1)} & \cdots & A_i^{(k+n)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_i^{(nk)} & A_i^{(nk+1)} & \cdots & A_i^{(nk+n)}\end{vmatrix}.$$

Da wegen der Irreduzibilität von $f(\varrho)$ die Resultante nicht identisch verschwinden kann, so folgt zugleich, daß keine der in (61) auftretenden Determinanten als Funktion der $a_i^{(\nu)}$ identisch verschwindet — ein Resultat, dessen rein rechnerischer Beweis für $k>1$ ziemlichen Schwierigkeiten begegnen dürfte.

III. Abschnitt.

Regelmäßige periodische Entwicklungen.

§ 16.

Der algebraische Körper der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Die Ergebnisse des ersten und zweiten Abschnitts sollen jetzt in Wechselbeziehung gesetzt werden. Wir gehen aus von n Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ und leiten daraus die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ her durch das in § 1 beschriebene Verfahren des größten Teilers. Die $a_i^{(\nu)}$ sind dann ganze rationale Zahlen und genügen den dort angegebenen Ungleichungen (pag. 4, 5); solche Entwicklungen mögen *regelmäßig* heißen.

Wenn eine regelmäßige Entwicklung periodisch wird, so sind zunächst die Koeffizienten von $f(\varrho)$ und $g_{\lambda,i}(\varrho)$ rationale ganze Zahlen. Außerdem

ist $f(\varrho) = 0$ nach Satz IX eine reguläre Gleichung, und ihre Hauptwurzel ϱ_0 ist einfach und positiv. Da der erste und letzte Koeffizient gleich ± 1 sind, so ist ϱ_0 eine *algebraische Einheit.* Ist der Algorithmus speziell reinperiodisch, so ist wieder nach Satz IX:

$$\alpha_i = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{g_{\lambda,0}(\varrho_0)} \quad (i = 1, \cdots, n),$$

wo Zähler und Nenner positiv sind; daher sind $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ Zahlen des algebraischen Körpers $K(\varrho_0)$. Ist aber der Algorithmus gemischtperiodisch, und die Vorperiode etwa μ-zeilig, so folgt zunächst ebenso, daß $\alpha_i^{(\mu)}$ dem Körper $K(\varrho_0)$ angehört; da aber die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sich nach (2) rational durch $\alpha_1^{(\mu)}, \cdots, \alpha_n^{(\mu)}$ ausdrücken lassen, so sind diese ebenfalls Zahlen des Körpers $K(\varrho_0)$. Wir erhalten demnach den fundamentalen

Satz XII. *Wenn der zu den Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ gehörige regelmäßige Jacobische Kettenbruchalgorithmus (rein- oder gemischt-) periodisch wird, so sind $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ algebraische Zahlen des Körpers $K(\varrho_0)$, wo ϱ_0 die stets existierende größte positive Wurzel der charakteristischen Gleichung bedeutet. ϱ_0 ist eine Einheit.*

Es ist wohl nicht überflüssig zu bemerken, daß die Wurzeln des für diesen Satz gegebenen Beweises sehr weit zurückliegen und sehr verschiedenartig sind. Der Beweis erfordert nämlich einmal eine rein algebraische Diskussion der charakteristischen Gleichung (§ 14), stützt sich dann aber insbesondere auch auf Satz VIIIa, und somit wesentlich auf Formel (40), die ihrerseits wieder einen ziemlich umfangreichen Beweis erheischt. In der Theorie der Kettenbrüche ($n = 1$) gelingt es bekanntlich mit weit einfachern Mitteln, zu zeigen, daß ein periodischer Kettenbruch Wurzel einer quadratischen Gleichung ist, und auch, *welche* Wurzel in Frage kommt, ist leicht zu entscheiden, da bei reinperiodischen Kettenbrüchen stets nur *eine* positive Wurzel vorhanden ist. Für ein beliebiges n scheint es jedoch nicht einmal möglich zu sein, den bloßen Beweis, daß die α_i algebraische Zahlen sind, auf wesentlich einfachere Weise zu führen. In der Tat sind die in der Literatur vorliegenden Beweise sämtlich unvollständig. Einerseits genügt es nämlich nicht, die charakteristische Gleichung aufzustellen; denn es könnten möglicherweise für eine gewisse Wurzel alle Minoren $g_{\lambda,i}$ verschwinden, und dann lassen sich aus (24) die Verhältnisse $x_0 : x_1 : \cdots : x_n = 1 : \alpha_1 : \cdots : \alpha_n$ *nicht eindeutig* bestimmen; vielmehr bleibt mindestens eines willkürlich, und es läßt sich über dessen algebraischen Charakter nichts aussagen. Man kann zwar (nach § 14) zeigen, daß für die größte positive Wurzel die Minoren nicht verschwinden; aber daß gerade *diese* Wurzel in (24) einzusetzen ist, kann wieder bloß unter Zuziehung von Formel (40) geschlossen werden. Will man andererseits etwa,

wie dies Paul Bachmann tut, direkt eine algebraische Gleichung für α_1 aufstellen, so äußert sich wesentlich dieselbe Schwierigkeit in der komplizierten Gestalt der Koeffizienten, denen nicht a priori anzusehen ist, ob sie nicht eventuell sämtlich verschwinden; in welchem Fall bezüglich des algebraischen Charakters von α_1 natürlich nichts gewonnen wäre.

§ 17.

Reduzibilität und Irreduzibilität der charakteristischen Gleichung.

Von jetzt ab sollen, wenn nichts weiteres bemerkt wird, die Begriffe Reduzibilität und Irreduzibilität stets in bezug auf den *Bereich der rationalen Zahlen* verstanden werden.

Im Fall $n = 1$ ist die charakteristische Gleichung stets irreduzibel; denn andernfalls könnten ihre Wurzeln als Einheiten nur ± 1 sein, was deshalb nicht möglich ist, weil die charakteristische Gleichung regulär und die Hauptwurzel einfach sein muß.

Für $n > 2$ kann die charakteristische Gleichung sehr wohl reduzibel sein. Als Beweis diene das folgende Beispiel, das zu anderm Zweck schon in § 3 verwandt wurde: Sei $k = 1$, und

$$1 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n = (-1)^{n+1},$$

was mit den Bedingungen der Regelmäßigkeit verträglich ist. Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\varrho^{n+1} - a_n \varrho^n - a_{n-1} \varrho^{n-1} - \cdots - a_1 \varrho - 1 = 0,$$

und hat die Wurzel $\varrho = -1$, ist also reduzibel.

Es erübrigt der Fall $n = 2$. In diesem ist $f(\varrho)$ vom dritten Grad, und muß daher im Fall der Reduzibilität einen linearen rationalen Faktor haben, also die Wurzel $+1$ oder -1. In den einfachsten Fällen ($k=1,2,3,4$) fand ich nun durch wirkliche Aufstellung der charakteristischen Gleichung, daß stets $f(1) < 0$, $f(-1) < 0$ ist; also ist $f(\varrho)$ irreduzibel, und zwar sind die von ϱ_0 verschiedenen Wurzeln absolut kleiner als 1. Ob aber für jeden Wert von k das gleiche gilt, vermochte ich nicht zu entscheiden.

Die Möglichkeit der Reduzibilität von $f(\varrho)$ begründet einen fundamentalen Unterschied gegenüber den Kettenbrüchen. Die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sind nicht unbedingt algebraische Irrationalitäten $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, sie können auch von geringerem Grad sein. Die naheliegende Frage nach der *kleinstmöglichen* Gradzahl mag jedoch unerörtert bleiben; ihre allgemeine Beantwortung ist jedenfalls sehr schwierig, da sie ja schon die oben offen gelassene Frage als Spezialfall enthält.

Das Hauptinteresse dürfte der Fall beanspruchen, daß $f(\varrho)$ *irreduzibel* ist; hierfür soll zunächst ein hinreichendes Kriterium von relativ großer Allgemeinheit angegeben werden:

Satz XIII. *Wenn für alle der Periode angehörenden Werte von* ν

$$a_n^{(\nu)} \geqq n + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}$$

*ist, so ist die charakteristische Gleichung irreduzibel.**)

Beweis: Wäre sie reduzibel, so wären $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ algebraische Zahlen eines Körpers von geringerem als dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad, und es müßte daher eine lineare Relation $P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$ mit rationalen Koeffizienten bestehen. Dies ist aber nach Satz VI nur möglich, wenn

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{n + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \geqq 1$$

ist; zufolge der nach Satz VI gemachten Schlußbemerkung muß sogar

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{1 + \alpha_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} \geqq 1$$

sein, und da wegen der Periodizität nur eine *endliche* Anzahl verschiedener $a_i^{(\nu)}$ in Betracht kommt, ist dies gleichbedeutend mit der Bedingung:

$$\frac{1 + \alpha_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}} \geqq 1 \text{ für mindestens einen Wert von } \nu.$$

Da aber offenbar $\dfrac{n + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} > \dfrac{1 + \alpha_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_{n-1}^{(\nu)}}{\alpha_n^{(\nu)}}$ mit Ausschluß der Gleichheit, so folgt hieraus $n + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)} > a_n^{(\nu)}$, womit Satz XIII bewiesen ist.

Für $k = 1$, d. h. im Fall einzeiliger Periode erhält man aus XIII insbesondere:

Satz XIV. *Wenn in der algebraischen Gleichung*

$$\varrho^{n+1} = 1 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots + a_n\varrho^n$$

die ganzen rationalen Zahlen a_i *den Ungleichungen*

$$a_n \geqq n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}; \quad a_i \geqq 0 \quad (\text{für } i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

*genügen, so ist sie irreduzibel.***)

Die Frage, ob die α_i linear unabhängige Zahlen des Körpers $K(\varrho_0)$ sind, wird durch folgenden Satz beantwortet:

Satz XV. *Ist die charakteristische Gleichung irreduzibel, so besteht zwischen den* $n+1$ *Zahlen* $1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *keine lineare homogene Relation mit rationalen Koeffizienten.*

---

*) Vergl. auch pag. 67.

**) Vergl. auch pag. 67. — Der Satz ist übrigens nur ein Spezialfall eines viel allgemeineren, den ich im Zusammenhang mit weitern Sätzen an andrer Stelle veröffentlichen werde.

Da eine solche Relation offenbar auch eine zwischen $1, \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \alpha_n^{(\nu)}$ nach sich zieht und umgekehrt, so genügt es, den Satz für reinperiodische Algorithmen zu beweisen. Ist dann $f(\varrho)$ irreduzibel, so ist notwendig $R(f, g_{\lambda,i}) \neq 0$ und $D(f) \neq 0$; aus Formel (61) und der letzten bei ihrer Herleitung benutzten Determinantenbeziehung folgt daher:

$$\begin{vmatrix} g_{\lambda,0}(\varrho_0) & g_{\lambda,1}(\varrho_0) \cdots g_{\lambda,n}(\varrho_0) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ g_{\lambda,0}(\varrho_n) & g_{\lambda,1}(\varrho_n) \cdots g_{\lambda,n}(\varrho_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 & \xi_1 \cdots \xi_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

wo mit $\cdots \xi_i$ die zu α_i konjugierten Zahlen bezeichnet sind. Dies ist aber bekanntlich mit der Aussage von Satz XV äquivalent.

§ 18.

Das Näherungsgesetz.

Während der allgemeine Konvergenzbeweis in § 4 über den Grad der durch die Näherungsbrüche erzielten Annäherung gar keinen Aufschluß gibt, kann diese Frage bei periodischen Entwicklungen aufs genaueste beantwortet werden. Macht man vorläufig die Annahme *reiner* Periodizität, so folgt aus (40), da ϱ_0 eine *einfache* Wurzel von $f(\varrho) = 0$ ist:

$$\begin{aligned} (62)\quad A_i^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k+\lambda)} &= C_0 \varrho_0^{\nu} \\ &+ C_1 \varrho_1^{\nu} + C_1' \binom{\nu}{1} \varrho_1^{\nu-1} + \cdots + C_1^{(r_1-1)} \binom{\nu}{r_1-1} \varrho_1^{\nu-r_1+1} \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &+ C_m \varrho_m^{\nu} + C_m' \binom{\nu}{1} \varrho_m^{\nu-1} + \cdots + C_m^{(r_m-1)} \binom{\nu}{r_m-1} \varrho_m^{\nu-r_m+1}, \end{aligned}$$

wo die $C_\gamma^{(\mu)}$ von ν unabhängig sind. Speziell findet sich

$$C_0 = \frac{g_{\lambda,i}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)} - \alpha_i \frac{g_{\lambda,0}(\varrho_0)}{\psi_0(\varrho_0)} = 0.$$

Ist also $|\varrho_1|$ nächst ϱ_0 der größte unter den absoluten Beträgen der Wurzeln von $f(\varrho) = 0$, so ist

$$\left| A_i^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k+\lambda)} \right| = C' \binom{\nu}{\mu} |\varrho_1|^{\nu},$$

wo $\mu \leqq r_1 - 1$, also jedenfalls $\mu \leqq n$, und C' eine für unendlich wachsendes ν endlich bleibende Größe ist. Da für hinreichend große Werte von ν stets $\binom{\nu}{\mu} < (1+\varepsilon)^{\nu}$, wie klein auch die positive Zahl ε sei; da ferner nach (50) $A_0^{(\nu k+\lambda)}$ mit ν ebenso wächst wie ϱ_0^{ν}: so folgt schließlich

$$\left| \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i \right| < C \left| \frac{\varrho_1 (1+\varepsilon)}{\varrho_0} \right|^{\nu},$$

wo C eine von ν unabhängige Konstante ist. Es wäre nun zunächst denkbar, daß in (62) die Koeffizienten von $\varrho_1^{\nu}, \varrho_1^{\nu-1}, \cdots$ alle verschwinden,

oder, falls mehrere Wurzeln vom absoluten Betrag $|\varrho_1|$ vorhanden sind, daß die betreffenden Glieder sich gegenseitig wegheben, wodurch eine noch stärkere Konvergenz erzielt würde, indem an Stelle von ϱ_1 eine absolut kleinere Wurzel treten könnte. Wie sogleich gezeigt werden soll, kann dies aber tatsächlich nicht eintreten, vielmehr gilt der folgende

Satz XVI. *Wenn $|\varrho_1|$ der zweitgrößte unter den absoluten Beträgen der Wurzeln von $f(\varrho)=0$ ist, so lautet das Näherungsgesetz:*

$$\left|\frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}}-\alpha_i\right|<C\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right|^{\nu},\quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,n \\ \lambda=0,1,\cdots,k-1\end{pmatrix},$$

wo C eine endliche Konstante, und ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet. Dagegen ist bei mindestens einem der nk Wertsysteme i, λ:

$$\left|\frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}}-\alpha_i\right|>C'\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right|^{\nu} \text{ für unendlich viele } \nu,$$

*wo C' ebenfalls eine endliche positive Konstante ist.**)

Es soll zunächst gezeigt werden, daß bei beliebigem γ $(=1,2,\cdots,m)$ unter den nk Wertsystemen i, λ mindestens eines existiert, bei welchem nicht zugleich

$$C_\gamma=0,\ C_\gamma'=0,\ \cdots,\ C_\gamma^{(r_\gamma-1)}=0$$

wird. Es ist nämlich unmittelbar aus (40) zu entnehmen:

$$C_\gamma^{(\mu-1)}=\frac{1}{(r_\gamma-\mu)!}\left[D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right)-\alpha_i D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{g_{\lambda,0}}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right)\right].$$

Deutet man, wo es nötig wird, die Abhängigkeit der C von i durch einen zweiten untern Index an, so folgt hieraus durch eine leichte Rechnung unter Berücksichtigung von (34)

$$\sum_{s=0}^{n}A_i^{(k+s)}C_{\gamma,s}^{(\mu-1)}-\varrho_0 C_{\gamma,i}^{(\mu-1)}$$
$$=\frac{1}{(r_\gamma-\mu)!}\left[D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{(\varrho-\varrho_0)\,g_{\lambda,i}(\varrho)}{\psi_\gamma(\varrho)}\right)_{\varrho=\varrho_\gamma}-A_i^{(\lambda)}D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{f}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right)\right].$$

Da aber $\frac{f(\varrho)}{\psi_\gamma(\varrho)}=(\varrho-\varrho_\gamma)^{r_\gamma}$, so verschwindet der letzte Term, und es folgt

$$\sum_{s=0}^{n}A_i^{(k+s)}C_{\gamma,s}^{(\mu-1)}-\varrho_0 C_{\gamma,i}^{(\mu-1)}$$
$$=\frac{1}{(r_\gamma-\mu)!}\left\{(\varrho_\gamma-\varrho_0)D^{r_\gamma-\mu}\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right)+(r_\gamma-\mu)D^{r_\gamma-\mu-1}\left(\frac{g_{\lambda,i}}{\psi_\gamma}(\varrho_\gamma)\right)\right\}.$$

*) Die erste Ungleichung gilt ihrer Herleitung nach nur, sobald ν eine gewisse Grenze ν' übersteigt, die im allgemeinen mit Verkleinerung von ε wachsen wird. Soll die Ungleichung für alle ν gelten, so muß bei Verkleinerung von ε die Konstante C entsprechend größer gewählt werden. — Vergl. auch die Fußnote pag. 66.

Soll dieser Ausdruck für $\mu = r_\gamma, r_\gamma - 1, \cdots, 1$ verschwinden, so folgt sukzessive $g_{\lambda,i}(\varrho_\gamma) = 0$, $g'_{\lambda,i}(\varrho_\gamma) = 0, \cdots, g^{(r_\gamma - 1)}_{\lambda,i}(\varrho_\gamma) = 0$. Gilt dies für $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$, so gilt es nach (37) auch für größere Werte von λ, also jedenfalls für $\lambda = 0, 1, \cdots, n$. Nun findet man, indem man die Determinantenform von $f(\varrho)$ differentiiert:

$$f'(\varrho) = g_{0,0}(\varrho) + g_{1,1}(\varrho) + \cdots + g_{n,n}(\varrho),$$

also

$$f^{(r_\gamma)}(\varrho_\gamma) = g^{(r_\gamma - 1)}_{0,0}(\varrho_\gamma) + \cdots + g^{(r_\gamma - 1)}_{n,n}(\varrho_\gamma) = 0,$$

während doch ϱ_γ nur eine r_γ-fache Wurzel von $f(\varrho)$ ist. Die Annahme, daß $C_\gamma, C'_\gamma, \cdots, C^{(r_\gamma - 1)}_\gamma$ für alle i, λ verschwinden, ist also unzulässig.

Jetzt seien etwa $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_\varkappa$ die Wurzeln vom absoluten Betrag $|\varrho_1|$. Wenn γ unter den Zahlen $1, 2, \cdots, \varkappa'$ irgendwie gewählt wird, so können nach dem eben Bewiesenen $C_\gamma, C'_\gamma, \cdots, C^{(r_\gamma - 1)}_\gamma$ bei geeigneter Wahl von i, λ nicht alle verschwinden. Sei etwa $C^{(\mu_\gamma)}_\gamma$ die letzte von 0 verschiedene; ferner μ das Maximum der Zahlen μ_γ, welches etwa für $\gamma = 1, 2, \cdots, \varkappa$ erreicht werde. Dann ist nach (62)

$$A_i^{(\nu k + \lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k + \lambda)} = \binom{\nu}{\mu}\left(C_1^{(\mu)}\varrho_1^{\nu-\mu} + \cdots + C_\varkappa^{(\mu)}\varrho_\varkappa^{\nu-\mu}\right) + \omega_\nu,$$

wobei ω_ν im Vergleich zu den in extenso angeschriebenen Gliedern verschwindet, d. h.

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\omega_\nu}{\binom{\nu}{\mu}\varrho_1^\nu} = 0.$$

Die Zahl μ kann möglicherweise mit i, λ noch variieren; man wähle i, λ derart, daß μ möglichst groß wird. Sodann folgt

$$\frac{A_i^{(\nu k + \lambda)} - \alpha_i A_0^{(\nu k + \lambda)}}{\varrho_0^\nu}$$

$$= \binom{\nu}{\mu}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^\nu \left\{ \varrho_1^{-\mu}\left(C_1^{(\mu)} + C_2^{(\mu)}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu-\mu} + \cdots + C_\varkappa^{(\mu)}\left(\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu-\mu}\right) + \frac{\omega_\nu}{\binom{\nu}{\mu}\varrho_1^\nu} \right\}.$$

Da $\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| = 1, \cdots, \left|\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right| = 1$, so bleibt der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck für wachsende ν endlich. *Er kann aber auch nicht gegen Null konvergieren.* Denn $\frac{\omega_\nu}{\binom{\nu}{\mu}\varrho_1^\nu}$ wird beliebig klein; wenn nun auch

$$\left| C_1^{(\mu)} + C_2^{(\mu)}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu-\mu} + \cdots + C_\varkappa^{(\mu)}\left(\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu-\mu} \right|$$

beliebig klein würde für $\varkappa$ aufeinanderfolgende Werte von ν, so müßte auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu} & \cdots & \left(\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu} \\ 1 & \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1} & \cdots & \left(\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+\varkappa-1} & \cdots & \left(\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu+\varkappa-1} \end{vmatrix} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\cdots\frac{\varrho_\varkappa}{\varrho_1}\right)^{\nu} \prod \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_1}-\frac{\varrho_\beta}{\varrho_1}\right)$$

mit wachsendem ν unter jede Grenze sinken, während doch die rechte Seite zeigt, daß ihr Absolutwert von ν ganz unabhängig ist.

Daher wird (noch mit Rücksicht auf $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu k+\lambda)}}{\varrho_0^{\nu}} =$ endlich $\neq 0$):

$$\left|\frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i\right| < C\binom{\nu}{\mu}\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right|^{\nu} \quad \text{für alle } \nu,$$

$$\left|\frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i\right| > C'\binom{\nu}{\mu}\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right|^{\nu} \quad \text{für unendlich viele } \nu.$$

Hieraus ist Satz XVI für reine Periodizität ohne weiteres zu entnehmen.*) Daß er aber in derselben Form auch bei μ-zeiliger Vorperiode gilt, zeigt die Identität

$$(63)\quad \sum_{s=1}^{n}\left(A_{s,\mu}^{(\nu k+\lambda)} - \alpha_s^{(\mu)} A_{0,\mu}^{(\nu k+\lambda)}\right)\left(A_i^{(\mu+s)} - \alpha_i A_0^{(\mu+s)}\right) = A_i^{(\nu k+\lambda+\mu)} - \alpha_i A_0^{(\nu k+\lambda+\mu)},$$

welche aus (2) und (9) gewonnen wird, indem man links noch den verschwindenden Term für $s=0$ hinzufügt. Denn die Determinante dieser Gleichungen für $i = 1, 2, \cdots, n$ ist

$$\begin{vmatrix} A_1^{(\mu+1)} - \alpha_1 A_0^{(\mu+1)} & \cdots & A_1^{(\mu+n)} - \alpha_1 A_0^{(\mu+n)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_n^{(\mu+1)} - \alpha_n A_0^{(\mu+1)} & \cdots & A_n^{(\mu+n)} - \alpha_n A_0^{(\mu+n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & A_0^{(\mu+1)} & \cdots & A_0^{(\mu+n)} \\ \alpha_1 & A_1^{(\mu+1)} & \cdots & A_1^{(\mu+n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_n & A_n^{(\mu+1)} & \cdots & A_n^{(\mu+n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\pm 1}{A_0^{(\mu)} + A_0^{(\mu+1)}\alpha_1^{(\mu)} + \cdots + A_0^{(\mu+n)}\alpha_n^{(\mu)}}$$

also von Null verschieden.

*) Auch ersieht man, daß der Faktor $1+\varepsilon$ in der ersten Ungleichung von Satz XVI unterdrückt werden kann, sobald $\mu = 0$ ist, also insbesondere, wenn die Wurzeln vom absoluten Wert $|\varrho_1|$ keine mehrfachen sind; ferner daß der Vermerk „für unendlich viele ν" in der zweiten Ungleichung ersetzt werden darf durch „für alle ν über einer gewissen Grenze", sobald $\varkappa = 1$, d. h. wenn nur *eine* Wurzel vom absoluten Betrag $|\varrho_1|$ vorhanden ist.

Da $|\varrho_1| < \varrho_0$, so ergibt sich noch: *Die Annäherung ist so stark, daß die Reihen*

$$\sum_{\nu} \left(\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - \alpha_i \right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

absolut konvergieren.

In § 6 wurde gezeigt, daß im allgemeinen die Annäherung eine verhältnismäßig geringe ist, daß beispielsweise die Beziehung $\lim_{\nu=\infty} (A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}) = 0$ nicht besteht. Für periodische Entwicklungen gibt nun Satz XVI bezüglich dieses Grenzwertes genaueren Aufschluß; man findet nämlich leicht:

$$(64) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sum_{i=1}^{n} \left| A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} \right| \begin{cases} = 0 & \text{für } |\varrho_1| < 1, \\ > 0 \text{ und } \leqq \infty & \text{für } |\varrho_1| = 1, \\ = \infty & \text{für } |\varrho_1| > 1. \end{cases}$$

Beispiele für diese drei Fälle sind unschwer anzugeben.*)

Bemerkenswert ist folgendes: Wenn die $a_i^{(\nu)}$ den Bedingungen von Satz XIII (bez. XIV) genügen, so ist nach Satz V: $\lim_{\nu=\infty} (A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}) = 0$, und folglich $|\varrho_1| < 1$. *Demnach hat die charakteristische Gleichung außer* ϱ_0 *nur noch Wurzeln, deren Absolutwert kleiner als 1 ist.* Hieraus kann XIII von neuem gefolgert werden. Denn wäre $f(\varrho)$ reduzibel, so müßte es einen irreduzibeln Faktor enthalten, dessen sämtliche Wurzeln absolut kleiner als 1 sind, während doch ihr Produkt gleich ± 1 ist.

Endlich soll noch untersucht werden, unter welchen Umständen die Annäherung durch das Gesetz

$$\left| \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - \alpha_i \right| < \frac{C}{A_0^{(\nu)} \sqrt[n]{A_0^{(\nu)}}}$$

angegeben wird, wo C von ν unabhängig ist. Ein solches Gesetz kann durch

*) Offenbar ist für $|\varrho_1| = 1$ der fragliche $\overline{\lim} < \infty$ oder $= \infty$, je nachdem $\mu = 0$ oder $\mu > 0$ ist. Aus dem letzten Teil der Fußnote auf voriger Seite folgt auch, daß das Zeichen „$\overline{\lim}$“ in (64) auch durch „lim“ ersetzt werden darf, sobald nur *eine* Wurzel vom Absolutwert ϱ_1 | vorhanden und $k = 1$ ist. — Während in § 6 nur gezeigt wurde, daß im allgemeinen die Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \left(A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}\right) = 0$ nicht zutrifft, folgt aus dieser Bemerkung genauer, daß nicht einmal eine unendliche Auswahl von Werten ν zu existieren braucht, für die $A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}$ gegen Null konvergiert, vielmehr kann auch $\lim_{\nu=\infty} \left| A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} \right|$ größer als Null, ja selbst unendlich sein. Beispiel: Für $n = 3$, $k = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a$ folgt:

$$\lim (-1)^{\nu} \left(A_1^{(\nu)} - \alpha_1 A_0^{(\nu)}\right) = -\frac{1 + \varrho_0}{\varrho_0 (a + 4)}; \quad \lim (-1)^{\nu} \left(A_2^{(\nu)} - \alpha_2 A_0^{(\nu)}\right) = \frac{\varrho_0^2 - 1}{\varrho_0^2 (a + 4)};$$

$$\lim (-1)^{\nu} \left(A_3^{(\nu)} - \alpha_3 A_0^{(\nu)}\right) = -\frac{1 + \varrho_0}{a + 4}.$$

die Vorperiode nicht alteriert werden, wie wieder aus (63) zu schließen ist. Beschränkt man sich also auf *reine* Periodizität, so folgt

$$\left| \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i \right| < \frac{C}{A_0^{(\nu k+\lambda)} \sqrt[n]{A_0^{(\nu k+\lambda)}}} < \frac{C_1}{\varrho_0^{\nu} \sqrt[n]{\varrho_0^{\nu}}}.$$

Andererseits ist nach Satz XVI für unendlich viele ν

$$\left| \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i \right| > C' \left| \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right|^{\nu};$$

daher

$$C' \left| \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right|^{\nu} < \frac{C_1}{\varrho_0^{\nu} \sqrt[n]{\varrho_0^{\nu}}}$$

oder

$$\left| \varrho_1 \sqrt[n]{\varrho_0} \right|^{\nu} < \frac{C_1}{C'}.$$

Da dies für unendlich viele ν gilt, so folgt hieraus

$$\left| \varrho_1 \sqrt[n]{\varrho_0} \right| \leqq 1,$$

oder auch:

$$|\varrho_1| \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\varrho_0}}.$$

Sind $\varrho_2, \cdots, \varrho_n$ die andern Wurzeln von $f(\varrho) = 0$, so ist dann a fortiori, weil ϱ_1 nächst ϱ_0 die absolut größte Wurzel war:

$$|\varrho_2| \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\varrho_0}}, \cdots, |\varrho_n| \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\varrho_0}}.$$

Würde in mindestens einer dieser Ungleichungen wirklich Ungleichheit stattfinden, so würde durch Multiplikation folgen: $|\varrho_0 \varrho_1 \cdots \varrho_n| < 1$, während doch $|\varrho_0 \varrho_1 \cdots \varrho_n| = 1$ sein muß. Daher ist

$$|\varrho_1| = |\varrho_2| = \cdots = |\varrho_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{\varrho_0}} \tag{65}$$

eine für das Bestehen des verlangten Näherungsgesetzes notwendige Bedingung. Sie ist aber auch hinreichend; denn da ihr zufolge außer ϱ_0 alle Wurzeln von $f(\varrho) = 0$ absolut kleiner sind als 1, so ist $f(\varrho)$ irreduzibel, hat also jedenfalls keine mehrfachen Wurzeln. Nach der Fußnote pag. 66 darf daher der Faktor $1 + \varepsilon$ in Satz XVI unterdrückt werden, und so folgt

$$\left| \frac{A_i^{(\nu k+\lambda)}}{A_0^{(\nu k+\lambda)}} - \alpha_i \right| < \frac{C}{\varrho_0^{\nu} \sqrt[n]{\varrho_0^{\nu}}} < \frac{C''}{A_0^{(\nu k+\lambda)} \sqrt[n]{A_0^{(\nu k+\lambda)}}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Minkowski ward gelegentlich dazu geführt *), alle algebraischen Körper zu bestimmen, in welchen eine Einheit ϱ_0 existiert, deren Konjugierte den Gleichungen (65) genügen. Nach dieser Untersuchung sind dies bloß die *quadratischen* Körper ($n=1$) und diejenigen *kubischen* Körper ($n=2$), deren Konjugierte *imaginär* sind. Umgekehrt ist evident, daß in diesen Körpern auch *jede* Einheit ϱ_0 mit ihren Konjugierten die Gleichungen (65) befriedigt. Hieraus ergibt sich das Resultat:

Satz XVII. *Wenn der regelmäßige Jacobische Kettenbruchalgorithmus periodisch ist, so gilt das Näherungsgesetz*

$$\left|\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - \alpha_i\right| < \frac{C}{A_0^{(\nu)}\sqrt[n]{A_0^{(\nu)}}},$$

wo C eine von ν unabhängige Konstante bedeutet, in den zwei folgenden Fällen, aber auch nur in diesen:

erstens wenn $n=1$ (gewöhnliche Kettenbrüche);

zweitens wenn $n=2$ und die zu α_1, α_2 konjugierten Zahlen komplex sind.

Ein Spezialfall hiervon ist der am Schluß von § 4 erwähnte Bachmannsche Satz. Es ist aber zu bemerken, daß die Konstante C, für welche bei den Kettenbrüchen bekanntlich der Wert $C=1$ zulässig ist, im zweiten Fall von den $a_i^{(\lambda)}$ abhängt, und bei geeigneter Wahl derselben auch beliebig groß genommen werden muß.

§ 19.

Ein Satz über die Reduktion der ganzzahligen zerlegbaren Formen.

Seien $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ irgend n Größen eines reellen algebraischen Körpers K vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad, zwischen denen keine lineare Relation

$$P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten P_i besteht; dann ist bekanntlich die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{vmatrix},$$

wo $\beta_i, \cdots, \xi_i$ die Konjugierten zu α_i bedeuten, nebst ihren sämtlichen

*) Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen § 2, Acta Mathematica Bd. 26.

n-reihigen Minoren von Null verschieden. Schreibt man $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ als Idealbrüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner $\mathfrak{a}_0$:

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}, \quad \alpha_2 = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_0}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{a}_0}, \quad \text{wobei } (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n) = 1,$$

und setzt die Norm von $\mathfrak{a}_0$:

$$Nm\, \mathfrak{a}_0 = c,$$

so ist

$$F(y_0, y_1, \cdots, y_n) = c\, Nm\, (y_0 + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$$

eine zerlegbare Form des Körpers K mit rationalen ganzen Koeffizienten ohne gemeinsamen Teiler; $c\alpha_1, c\alpha_2, \cdots, c\alpha_n$ sind *ganze* Zahlen. Die Zahl $D = c^2\Delta^2$ ist ganz rational und heißt die Diskriminante der Form Jede Form, die aus F durch eine lineare ganzzahlige Substitution der Determinante ± 1 hervorgeht, heißt zu F äquivalent und hat dieselbe Diskriminante.

Soweit sind dies längst bekannte Dinge.

Ich ordne nun jeder Form F eine andere Φ zu nach folgendem Prinzip: Aus den n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \beta_n \mathsf{A}_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 1 + \xi_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \xi_n \mathsf{A}_n &= 0 \end{aligned}$$

lassen sich die Zahlen $\mathsf{A}_1, \cdots, \mathsf{A}_n$ eindeutig berechnen; sie gehören offenbar dem Körper K an, und es ist

$$1 + \alpha_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \alpha_n \mathsf{A}_n \neq 0,$$

weil andernfalls $\Delta = 0$ folgen würde. Die Form

$$\Phi(z_0, z_1, \cdots, z_n) = d\, Nm\, (z_0 + \mathsf{A}_1 z_1 + \cdots + \mathsf{A}_n z_n),$$

wo wieder die ganze rationale positive Zahl d so gewählt ist, daß Φ ganzzahlige Koeffizienten ohne gemeinsamen Teiler hat, heiße nun *die zu F koordinierte Form*. Diese Zuordnung ist vollkommen wechselseitig, d. h. F ist auch die zu Φ koordinierte Form. Man beweist leicht den Satz: *Koordinierte Formen gehen durch kontragrediente Substitutionen wieder in koordinierte über.*

Wenn die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ von der besondern Art sind, daß der zugehörige Jacobische Algorithmus reinperiodisch wird, so folgt aus den Ergebnissen von § 15, daß die Größen A_λ auch durch die Grenzwerte

$$\mathsf{A}_\lambda = \lim_{\nu = \infty} \frac{A_i^{(\nu k + \lambda)}}{A_i^{(\nu k)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

definiert werden können, und folglich ist

$$1 < \mathsf{A}_1 < \mathsf{A}_2 < \cdots < \mathsf{A}_n.$$

Definition: Eine Form

$$F(y_0, y_1, \cdots, y_n) = c\, Nm\,(y_0 + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n),$$

deren koordinierte

$$\Phi(z_0, z_1, \cdots, z_n) = d\, Nm\,(z_0 + \mathsf{A}_1 z_1 + \cdots + \mathsf{A}_n z_n)$$

sei, heißt *halbreduziert*, wenn die Zahlen α_i, A_i den Ungleichungen genügen:

$$1 < \alpha_n,\ 0 < \alpha_1 < \alpha_n,\ 0 < \alpha_2 < \alpha_n, \cdots, 0 < \alpha_{n-1} < \alpha_n,$$
$$1 < \mathsf{A}_1 < \mathsf{A}_2 < \cdots < \mathsf{A}_n.$$

Für $n = 1$ deckt sich diese Definition genau mit der Gaußschen Definition reduzierter Formen*). Während aber für $n = 1$ die Anzahl der (halb)reduzierten Formen mit vorgeschriebener Diskriminante eine endliche ist, scheint dies für $n > 1$ nicht mehr der Fall zu sein, weshalb sie auch nichtreduziert, sondern nur halbreduziert genannt werden sollen. Dagegen behält der folgende Satz seine Gültigkeit:

Satz XVIII. *Jede zerlegbare Form mit nicht verschwindender Diskriminante ist einer halbreduzierten äquivalent.*

Beweis: Die fragliche Form sei wieder

$$F = c\, Nm\,(y_0 + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n),$$

die koordinierte

$$\Phi = d\, Nm\,(z_0 + \mathsf{A}_1 z_1 + \cdots + \mathsf{A}_n z_n).$$

Man entwickle $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ nach dem Jacobischen Algorithmus, und wende dann auf F und Φ die kontragredienten Substitutionen der Determinante ± 1 an:

$$y_i^{(\nu)} = A_0^{(\nu+i)} y_0 + A_1^{(\nu+i)} y_1 + \cdots + A_n^{(\nu+i)} y_n,$$
$$z_i = A_i^{(\nu)} z_0^{(\nu)} + A_i^{(\nu+1)} z_1^{(\nu)} + \cdots + A_i^{(\nu+n)} z_n^{(\nu)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Dadurch werden F und Φ bez. transformiert in

$$F_\nu = c^{(\nu)}\, Nm\left(y_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} y_1^{(\nu)} + \cdots + \alpha_n^{(\nu)} y_n^{(\nu)}\right),$$
$$\Phi_\nu = d^{(\nu)}\, Nm\left(z_0^{(\nu)} + \mathsf{A}_1^{(\nu)} z_1^{(\nu)} + \cdots + \mathsf{A}_n^{(\nu)} z_n^{(\nu)}\right),$$

und diese Formen sind ebenfalls zueinander koordiniert. Es soll nun gezeigt werden, daß die zu F äquivalente Form F_ν eine halbreduzierte ist, sobald ν eine gewisse Größe übersteigt. Die $\alpha_i^{(\nu)}$ genügen schon für $\nu \geqq 1$ den verlangten Ungleichungen; es bleibt also nur noch zu beweisen, daß für genügend große ν

$$1 < \mathsf{A}_1^{(\nu)} < \mathsf{A}_2^{(\nu)} < \cdots < \mathsf{A}_n^{(\nu)}$$

*) Gauß, Disquisitiones arithmeticae 183. — Dedekind, Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. § 74.

wird. Man findet aber, indem man die Transformation von Φ in Φ_ν wirklich ausführt:

$$\mathsf{A}_i^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu+i)} + A_1^{(\nu+i)}\mathsf{A}_1 + \cdots + A_n^{(\nu+i)}\mathsf{A}_n}{A_0^{(\nu)} + A_1^{(\nu)}\mathsf{A}_1 + \cdots + A_n^{(\nu)}\mathsf{A}_n}, \tag{66}$$

und analog, indem man $\Phi_\varkappa$ in $\Phi_{\varkappa+\nu}$ transformiert:

$$\mathsf{A}_i^{(\varkappa+\nu)} = \frac{A_{0,\varkappa}^{(\nu+i)} + A_{1,\varkappa}^{(\nu+i)}\mathsf{A}_1^{(\varkappa)} + \cdots + A_{n,\varkappa}^{(\nu+i)}\mathsf{A}_n^{(\varkappa)}}{A_{0,\varkappa}^{(\nu)} + A_{1,\varkappa}^{(\nu)}\mathsf{A}_1^{(\varkappa)} + \cdots + A_{n,\varkappa}^{(\nu)}\mathsf{A}_\nu^{(\varkappa)}}. \tag{67}$$

Schreibt man (66) in der Gestalt

$$\mathsf{A}_i^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu)}} \cdot \frac{1 + \dfrac{A_1^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu+i)}}\mathsf{A}_1 + \cdots + \dfrac{A_n^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu+i)}}\mathsf{A}_n}{1 + \dfrac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\mathsf{A}_1 + \cdots + \dfrac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\mathsf{A}_n},$$

so nähern sich im zweiten Bruch rechts Zähler und Nenner mit wachsendem ν dem von Null verschiedenen Grenzwert $1 + \alpha_1\mathsf{A}_1 + \cdots + \alpha_n\mathsf{A}_n$. Daraus folgt

$$\mathsf{A}_i^{(\nu)} = \frac{A_0^{(\nu+i)}}{A_0^{(\nu)}}(1 \pm \varepsilon), \quad \text{wo } \lim \varepsilon = 0,$$

ebenso durch analoge Behandlung von (67) für $\varkappa = 1$

$$\mathsf{A}_i^{(\nu+1)} = \frac{A_{0,1}^{(\nu+i)}}{A_{0,1}^{(\nu)}}(1 \pm \varepsilon).$$

Da die $\alpha_i^{(\nu)}$, also auch $a_i^{(\nu)}$ für $\nu \geqq 1$ und mithin die $A_{0,1}^{(\nu)}$ positiv sind, so ist daher jedenfalls $\mathsf{A}_i^{(\nu)}$ *positiv*, sobald ν eine gewisse Zahl ν' übersteigt. Formel (67) geht speziell für $i = 1$, $\nu = n$ über in

$$\mathsf{A}_1^{(\varkappa+n)} = \frac{1 + a_1^{(\varkappa)}\mathsf{A}_1^{(\varkappa)} + \cdots + a_n^{(\varkappa)}\mathsf{A}_n^{(\varkappa)}}{\mathsf{A}_n^{(\varkappa)}},$$

und daraus folgt, wenn man ν an Stelle von $\varkappa$ schreibt:

$$\mathsf{A}_1^{(\nu+n)} > a_n^{(\nu)} \geqq 1 \quad (\text{für } \nu > \nu').$$

Aus (66) ist weiter zu entnehmen:

$$\mathsf{A}_i^{(\nu+n)} = \mathsf{A}_{i-1}^{(\nu+n)}\,\mathsf{A}_1^{(\nu+n+i-1)},$$

und daher mit Rücksicht auf die letzte Ungleichung:

$$\mathsf{A}_i^{(\nu+n)} > \mathsf{A}_{i-1}^{(\nu+n)} \quad (\text{für } \nu > \nu'),$$

womit der verlangte Beweis erbracht ist.

§ 20.

Schluß.

Bekanntlich läßt sich der Satz, daß jeder regelmäßige periodische Kettenbruch Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist, auch umkehren. Dies hat zum erstenmal Lagrange bewiesen im Jahr 1770*), und seitdem bemühte man sich verschiedentlich, ein ähnliches arithmetisches Kennzeichen auch für die algebraischen Irrationalitäten höherer Grade aufzufinden. Ein notwendiges Kriterium für die reellen algebraischen Zahlen, das ebenfalls an die Kettenbruchentwicklung anknüpft, hat Liouville gegeben**), doch ist dies weit entfernt auch hinreichend zu sein. In befriedigender Weise wurde das Problem erst von Minkowski***) gelöst, der ein charakteristisches arithmetisches Kennzeichen für die reellen und auch komplexen algebraischen Irrationalitäten n^{ten} Grades entwickelt. Es beruht auf einer Verallgemeinerung der Kettenbrüche, die auf eine eigentümliche geometrische Interpretation derselben gegründet wird†), aber mit dem Jacobischen Algorithmus nicht identisch ist.

Andererseits hat schon Jacobi die Frage aufgeworfen, ob auch aus seinem Algorithmus ein solches Kriterium zu gewinnen ist, und zunächst für $n = 2$ durch Beispiele die Vermutung bestätigt, daß die Entwicklung periodisch wird. Zahlreiche weitere Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$ hat Fürstenau l. c. berechnet. Aus unsern Entwicklungen folgt nun, *daß ein charakteristisches Kennzeichen, welches die reellen algebraischen Irrationalitäten $(n+1)^{ten}$ Grades von allen andern Zahlen unterscheidet, in der Periodizität des Jacobischen Algorithmus nicht gefunden werden kann.* Schon der Umstand, daß die charakteristische Gleichung reduzibel sein kann, schließt dies aus. Wenn andererseits die Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ einem Körper $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades angehören, so kann nach Satz XV die Entwicklung gewiß nicht periodisch werden, falls zwischen $1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ eine homogene lineare Gleichung mit rationalen Koeffizienten besteht. Doch ist noch die folgende Fragestellung zulässig: *Wenn $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ Zahlen eines reellen algebraischen Körpers $(n+1)^{ten}$ Grades sind, und eine Relation $P_0 + P_1\alpha_1 + \cdots + P_n\alpha_n = 0$ mit rationalen P_i nicht besteht, wird dann der Jacobische Algorithmus immer*

*) Abhandl. der Berliner Akademie. — Oeuvres II, pag. 609.

**) Liouvilles Journal, Bd. 16: Sur des classes très étendues de quantités etc.

***) Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen, Göttinger Nachr. 1899. — Vergl. auch die pag. 69 zitierte Arbeit

†) Siehe Geometrie der Zahlen (Leipzig 1896), § 45. — Über die fragl. Verallgemeinerung vergl. auch: Généralisation de la théorie des fractions continues: Annales de l'École Normale 1896.

periodisch? oder welche algebraischen Bedingungen müssen die α_i etwa noch weiter erfüllen, damit er periodisch wird?

Meine Untersuchungen reichen zur vollständigen Lösung dieser Frage noch nicht aus. Prüft man die verschiedenen Beweise, die für den Fall $n = 1$, d. h. für den Lagrangeschen Satz gegeben wurden, so fließen sie im wesentlichen aus einer von zwei ganz verschiedenen Quellen, oder aus beiden zugleich: Diese sind erstens das Näherungsgesetz, zweitens die Reduktion der binären quadratischen Formen im Gaußschen Sinn. Eine Erweiterung der ersten Methode stellt der Beweis des Minkowskischen Kriteriums dar; doch treffen die hierfür notwendigen Voraussetzungen beim Jacobischen Algorithmus nicht zu. Es bleibt also nur die Methode der Formenreduktion; sehen wir zu, was sich hieraus für unser Problem gewinnen läßt.

Die Diskriminante der Form F_ν (§ 19) und mithin auch von F ist

$$D = \begin{vmatrix} c^{(\nu)} & \alpha_1^{(\nu)} & \cdots & \alpha_n^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{(\nu)} & \xi_1^{(\nu)} & \cdots & \xi_n^{(\nu)} \end{vmatrix}^2.$$

Für $n = 1$ folgt hieraus wegen $\beta_1^{(\nu)} = -\frac{1}{\mathsf{A}_1^{(\nu)}} < 0$:

$$|c^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)}| < \sqrt{|D|}, \quad |c^{(\nu)}\beta_1^{(\nu)}| < \sqrt{|D|}. \tag{68}$$

$c^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)}$ genügt als *ganze* Zahl einer Gleichung der Form

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

wo A, B ganze rationale Zahlen sind; wegen (68) ist aber

$$|A| < 2\sqrt{|D|}, \quad |B| < |D|.$$

Es gibt also nur eine endliche Anzahl verschiedener Gleichungen, denen die unendlich vielen Zahlen $c^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, \infty)$ genügen; also gibt es eine unendliche Folge von Werten ν: $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ derart, daß

$$c^{(\nu_1)}\alpha_1^{(\nu_1)} = c^{(\nu_2)}\alpha_1^{(\nu_2)} = c^{(\nu_3)}\alpha_1^{(\nu_3)} = \cdots.$$

Da $\alpha_1^{(\nu)} > 1$, so ist nach (68) auch die ganze rationale Zahl $c^{(\nu)}$ in endliche Grenzen eingeschlossen, so daß unter den Zahlen $c^{(\nu_1)}, c^{(\nu_2)}, \cdots$ wenigstens eine unendlich oft wiederkehren muß. Ist etwa $c^{(\nu_1)} = c^{(\nu_2)}$, so folgt: $\alpha_1^{(\nu_1)} = \alpha_1^{(\nu_2)}$, womit die Periodizität bewiesen ist.

Für $n = 2$ ist

$$D = \begin{vmatrix} c^{(\nu)} & \alpha_1^{(\nu)} & \alpha_2^{(\nu)} \\ c^{(\nu)} & \beta_1^{(\nu)} & \beta_2^{(\nu)} \\ c^{(\nu)} & \gamma_1^{(\nu)} & \gamma_2^{(\nu)} \end{vmatrix}^2,$$

$$\mathsf{A}_1^{(\nu)} = \frac{\beta_2^{(\nu)} - \gamma_2^{(\nu)}}{\beta_1^{(\nu)}\gamma_2^{(\nu)} - \beta_2^{(\nu)}\gamma_1^{(\nu)}} > 0; \quad \mathsf{A}_2^{(\nu)} = \frac{\gamma_1^{(\nu)} - \beta_1^{(\nu)}}{\beta_1^{(\nu)}\gamma_2^{(\nu)} - \beta_2^{(\nu)}\gamma_1^{(\nu)}} > 0,$$

woraus als Analogon zu (68) folgt

$$(69) \qquad |c^{(\nu)}(\beta_1^{(\nu)}\gamma_2^{(\nu)} - \beta_2^{(\nu)}\gamma_1^{(\nu)})| < \sqrt{|D|}, \quad |c^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)}(\beta_2^{(\nu)} - \gamma_2^{(\nu)})| < \sqrt{|D|},$$
$$|c^{(\nu)}\alpha_2^{(\nu)}(\gamma_1^{(\nu)} - \beta_1^{(\nu)})| < \sqrt{|D|}.$$

Allein diese Bedingungen reichen nicht hin, um wie oben zu schließen, daß für $\alpha_1^{(\nu)}$, $\alpha_2^{(\nu)}$ bloß eine endliche Anzahl verschiedener Wertepaare in Betracht kommt. Selbst wenn man noch die aus $1 < A_1^{(\nu)} < A_2^{(\nu)}$ folgenden Ungleichungen

$$|\beta_1^{(\nu)}\gamma_2^{(\nu)} - \beta_2^{(\nu)}\gamma_1^{(\nu)}| < |\beta_2^{(\nu)} - \gamma_2^{(\nu)}| < |\gamma_1^{(\nu)} - \beta_1^{(\nu)}|$$

berücksichtigt, ist ein solcher Schluß nicht möglich.

Noch viel weniger kann für $n > 2$ die Periodizität gefolgert werden. Da jedoch die *Klassenzahl* der zerlegbaren Formen von gegebener Diskriminante tatsächlich endlich ist*), so ist es immerhin nicht ausgeschlossen, daß auch der Jacobische Algorithmus eine noch weitergehende Reduktion gestattet, derart, daß die reduzierten Formen nur in endlicher Anzahl vorhanden sind; dann ist die Periodizität bewiesen. Jedenfalls dürfte die Methode der Formenreduktion der geeignete Weg sein, um zu einem Resultat zu gelangen.

Andererseits hat sich gezeigt, daß die Analogie des Jacobischen Algorithmus mit den Kettenbrüchen doch nur rein formaler Natur ist, während gerade die tiefer liegenden Eigenschaften, wie Umkehrbarkeit von Satz I, das Näherungsgesetz, die Irreduzibilität der charakteristischen Gleichung etc., sich nicht übertragen. Hiernach dürfte es doch zweifelhaft erscheinen, ob der Satz von der Periodizität allgemein richtig ist.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, kurz auf eine Analogie hinzuweisen, welche der Jacobische Algorithmus mit der insbesondere von Frobenius entwickelten Theorie der linearen Substitutionen und Bilinearformen**) zeigt. Diese Beziehung wird evident, wenn man beachtet, daß die Gleichungen (α) auf pag. 3, auf welche sich ja die ganze Theorie aufbaut, interpretiert werden können als eine Folge linearer Substitutionen;

*) Zuerst von Hermite dargetan: Première lettre à M. Jacobi, Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. 40. — Wohl den prinzipiell einfachsten Beweis hat Arnold Meyer gegeben (Zur Theorie d. zerlegbaren Formen; Habilitationsschrift Zürich 1870, publ. von Rudio in Vierteljahrsschrift der Züricher naturf. Gesellsch. 1897), allerdings nur für den Körper $K(\sqrt[3]{D})$; doch gestattet die heutige Idealtheorie ohne Schwierigkeit, die Methode auf den allgemeinsten Fall auszudehnen.

**) Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. 84. — Weitere Literatur über diesen Gegenstand in § 10 des Artikels von Study: Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen, Encykl. d. math. Wiss. Bd. I. — Die Kettenbrüche sind vom Gesichtspunkt linearer Substitutionen behandelt von Veltmann: Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 32.

durch die erste Substitution werden die Variabeln $x_0, x_1, \cdots, x_n$ transformiert in $x_0', x_1', \cdots, x_n'$, diese durch die zweite in $x_0'', x_1'', \cdots, x_n''$ etc. Nach dieser Auffassung geben die Formeln (4) und (9) die Definition für die Zusammensetzung (das Produkt) von gewissen Substitutionen, z. B. nach (9)

$$\begin{pmatrix} A_0^{(\lambda)} & A_0^{(\lambda+1)} \cdots A_0^{(\lambda+n)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(\lambda+1)} \cdots A_n^{(\lambda+n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,\lambda}^{(\nu)} & A_{0,\lambda}^{(\nu+1)} \cdots A_{0,\lambda}^{(\nu+n)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n,\lambda}^{(\nu)} & A_{n,\lambda}^{(\nu+1)} \cdots A_{n,\lambda}^{(\nu+n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^{(\lambda+\nu)} & A_0^{(\lambda+\nu+1)} \cdots A_0^{(\lambda+\nu+n)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n^{(\lambda+\nu)} & A_n^{(\lambda+\nu+1)} \cdots A_n^{(\lambda+\nu+n)} \end{pmatrix}.$$

Die Theorie der *periodischen* Algorithmen läuft hinaus auf die Potenzierung einer linearen Substitution resp. Bilinearform. Hier sind die Sätze von § 10 und § 12 zum Teil nur ein andrer Ausdruck von bekannten Theoremen dieser Theorie. Insbesondere Formel (30) ist wesentlich identisch mit dem Fundamentalsatz, daß, wenn $f(\varrho) = 0$ die charakteristische Gleichung der Bilinearform A ist, auch die Beziehung $f(A) = 0$ besteht, wo unter $A^2, A^3, \cdots$ die geeignet definierten Potenzen der Form A zu verstehen sind. Doch glaubte ich mich nicht auf diesen Satz berufen, sondern einen eignen Beweis mitteilen zu sollen (der sich übrigens ziemlich eng an einen Beweis von Molien anschließt: Über komplexe Zahlsysteme, Math. Ann. 41). Denn erstens schien es mir wünschenswert, die Theorie von andern unabhängig aufzubauen; zweitens erweist sich die Einführung der $g_{\lambda,i}$ sowieso für das Weitere als notwendig, und von da aus erheischt der direkte Beweis von Formel (30) keinen größern Aufwand mehr an Rechnung, als auch zu ihrer Herleitung aus dem obigen Satz erforderlich wäre.

Endlich sei bemerkt, daß auch umgekehrt die Theorie der allgemeinen linearen Substitutionen der Determinante ± 1 sich auf die unsre zurückführen läßt, weil, wie leicht zu sehen, jede beliebige solche Substitution sich aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen der speziellen Form (α) zusammensetzen läßt.

Berichtigung:

Seite 64, Zeile 8 von oben (nicht aber auch Zeile 11) ist statt $\left|\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right|^\nu$ zu lesen: $\left|\frac{\varrho_1(1+\varepsilon)}{\varrho_0}\right|^\nu$.

Some theorems concerning infinite series.

By

G. H. Hardy of Cambridge, England.

1. In the course of his most interesting memoir „Untersuchungen über Fouriersche Reihen“*) Mr. L. Fejér proves the following theorem:

If Σa_n is a divergent series summable by Cesàro's method of mean values — i. e., if

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1},$$

where $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, is a determinate and finite quantity s; and if $\varphi(t)$ is a continuous function of t such that $\varphi(0) = 1$ and

$$|\varphi(t)| < \frac{M}{t^{2+\varrho}}, \qquad \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| < \frac{M}{t^{2+\varrho}},$$

where M and ϱ are positive constants, for all values of $t \geqq 1$: then the series

$$\Sigma a_n \varphi(nt)$$

is convergent for all positive values of t, and if $F(t)$ denote its sum,

$$\lim_{t=0} F(t) = s.$$

The following pages are the result of an attempt to generalise this theorem in two directions, (1) by considering the case in which the series Σa_n is summable only by repeated applications of the mean value method of summation, (2) by replacing $\varphi(nt)$ by a function of the more general form $\varphi_n(t)$. I have thus been led to a number of results which seem to me to be interesting, and which I have found useful in applications, more especially in the theory of elliptic functions.

2. I shall suppose throughout that, for all positive integral values of n, $\varphi_n(t)$ is a function of t continuous throughout a certain interval which we may suppose to be (0, 1). And I shall use the notation

$$\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n+1}, \qquad \Delta^2\varphi_n = \varphi_n - 2\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2},$$
$$\Delta^3\varphi_n = \varphi_n - 3\varphi_{n+1} + 3\varphi_{n+2} - \varphi_{n+3}, \cdots$$

*) Math. Annalen, Bd. 58, pp. 51—69.

for the successive differences of the functions φ_n. Further, I shall say that Σa_ν is '*summable* (k)', if the first of the quantities

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \\ s_n^{(1)} &= \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n), \\ s_n^{(2)} &= \frac{1}{n+1}(s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

which tends to a determinate limit for $n = \infty$, is $s_n^{(k)}$. The series, when convergent, is summable (0): this simple case is included in all the results which follow, by taking $k = 0$.

The first theorem which I shall prove relates to the case in which φ_n, $\Delta\varphi_n$, $\Delta^2\varphi_n$, $\cdots$, $\Delta^{k+1}\varphi_n \geqq 0$ for all values of n and t in question. The simplest example is given by

$$\varphi_n(t) = e^{-nt} = x^n \qquad (x = e^{-t})$$

in which case we obtain the well known results of Frobenius and Hölder for power series.

3. Theorem I. *If* (I) Σa_n *is summable* (k) *to a sum* s,

(II) $$\varphi_n \geqq 0,\ \Delta\varphi_n \geqq 0,\ \cdots,\ \Delta^{k+1}\varphi_n \geqq 0$$

for all values of n *and* t *in question*,

(III) $$\Sigma n^k \varphi_n$$

is convergent for $t > 0$,

(IV) $$\lim_{t=0} \varphi_n(t) = 1$$

for every n; *then the series*

$$F(t) = \Sigma a_n \varphi_n(t)$$

is convergent for $t > 0$ *and*

$$\lim_{t=0} F(t) = s.$$

It will be most convenient to prove this first in the case when $k = 1$. Since*)

$$a_n = (n+1)s_n^{(1)} - 2ns_{n-1}^{(1)} + (n-1)s_{n-2}^{(1)}$$

and $\lim s_n^{(1)} = s$, it is clear that $\lim \frac{a_n}{n} = 0$. Also

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)s_n^{(1)} - 2ns_{n-1}^{(1)} + (n-1)s_{n-2}^{(1)}\} \varphi_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)s_n^{(1)} \Delta^2 \varphi_n,$$

*) In this equation $s_{-1}^{(1)}$, $s_{-2}^{(1)}$ must be interpreted as being equal to zero.

the rearrangement of the series being legitimate in virtue of the condition (III). We now put

$$s_n^{(1)} = s + \varepsilon_n \quad (\lim \varepsilon_n = 0)$$

and deduce

$$F(t) = s\varphi_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n \Delta^2 \varphi_n$$

$$= s\varphi_0(t) + \sum_{0}^{N-1} + \sum_{N}^{\infty} = s\varphi_0(t) + R_1 + R_2,$$

say.

Choose N so that $|\varepsilon_n| < \varepsilon (n \geqq N)$. Then since $\Delta^2 \varphi_n \geqq 0$

$$|R_2| < \varepsilon \sum_{N}^{\infty} (n+1)\Delta^2 \varphi_n = \varepsilon \{(N+1)\varphi_N - N\varphi_{N+1}\}.$$

But

$$(N+1)(\varphi_N - \varphi_{N+1}) \leqq \sum_{0}^{N} (\varphi_n - \varphi_{n+1}) < \varphi_0 < M,$$

and $\varphi_{N+1} < \varphi_0 < M$, where M is the maximum of φ_0.

Hence

$$|R_2| < 2M\varepsilon.$$

But when N is once fixed

$$\lim_{t=0} s\varphi_0 = s, \qquad \lim_{t=0} R_1 = 0.$$

Hence $\lim_{t=0} F(t) = S$, and the theorem is proved in the case of $k = 1$.

4. In order to prove the theorem in the general case we shall require two Lemmas.

Lemma A. *If* $\varphi_n \geqq 0$, $\Delta\varphi_n \geqq 0, \cdots, \Delta^{k+1}\varphi_n \geqq 0$, *then*

(I) $\Sigma n^\lambda \Delta^{\lambda+1}\varphi_n$ *is convergent for* $\lambda = 0, 1, \cdots, k$,

(II) $n^{\lambda+1}\Delta^{\lambda+1}\varphi_n < K$, *where* K *is a constant, for* $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ *and for all values of* n *and* t.

(III) $\lim n^{\lambda+1}\Delta^{\lambda+1}\varphi_n = 0$ *for* $\lambda = 0, 1, \cdots, k-1$ *and any particular value of* t.

We have already proved the truth of (I) and (II) for $\lambda = 0$. To prove (III) we observe that since $\Sigma\Delta\varphi_n$ is convergent we can choose N so that for $N' > N$

$$(N' - N)\Delta\varphi_{N'} \leqq \sum_{N+1}^{N'} \Delta\varphi_n < \varepsilon.$$

Taking $N' = 2N$ we see that $N\Delta\varphi_{2N} < \varepsilon$, and so $\lim_{n=\infty} N\Delta\varphi_N = 0$.

Now assume that the conclusions of the lemma have been established for $\lambda = 0, 1, \cdots, \mu - 1$ $(\mu < k)$. Then

$$\sum_0^N n^\mu \Delta^{\mu+1}\varphi_n = \sum_1^N \{n^\mu - (n-1)^\mu\}\Delta^\mu \varphi_n - N^\mu \Delta^\mu \varphi_{N+1}.$$

The last term has the limit zero for $N = \infty$. Also, since

$$n^\mu - (n-1)^\mu < K n^{\mu-1}*)$$

the series $\Sigma\{n^\mu - (n-1)^\mu\}\Delta^\mu \varphi_n$ is convergent. Hence $\Sigma n^\mu \Delta^{\mu+1}\varphi_n$ is convergent: moreover

$$\Sigma n^\mu \Delta^{\mu+1}\varphi_n < K\Sigma n^{\mu-1}\Delta^\mu \varphi_n.$$

Again

$$\Delta^{\mu+1}\varphi_N \sum_0^N n^\mu \leqq \sum_0^N n^\mu \Delta^{\mu+1}\varphi_n < K$$

and therefore

$$N^{\mu+1}\Delta^{\mu+1}\varphi_N < K.$$

Finally, when t has any fixed value we can choose N so that for $N' > N$

$$\sum_{N+1}^{N'} n^\mu \Delta^{\mu+1}\varphi_n < \varepsilon.$$

Taking $N' = 2N$ we deduce

$$\Delta^{\mu+1}\varphi_{2N} \cdot \sum_{N+1}^{2N} n^\mu < \varepsilon$$

and therefore

$$\lim_{N=\infty} N^{\mu+1}\Delta^{\mu+1}\varphi_N = 0,$$

for any particular value of t.

Hence if the conclusions of the lemma are valid for $\lambda = 0, 1, \cdots, \mu - 1$ they are valid for $\lambda = \mu$. The lemma is therefore proved.**) I will only observe that, as the convergence to a limit postulated by (III) is generally not uniform for all values of t, (II) is not a mere corollary of (III).

5. Lemma B. *If $p < q \leqq k+1$, and $f_p(n)$ is a polynomial of degree p in n, the series $\Sigma f_p(n)\Delta^q \varphi_n$ is convergent, and*

$$\sum_N^\infty f_p(n)\Delta^q \varphi_n = \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu \Delta^\nu f_p(N)\Delta^{q-\nu-1}\varphi_{N+\nu}.$$

*) I use K in the manner introduced by Borel, viz., to denote a quantity not necessarily the same in all inequalities, but always lying between certain fixed limits, e. g., $\frac{1}{1000}$ and 1000.

**) All three conclusions of the lemma hold up to $\lambda = k - 1$. The first may be extended as above to the case $\lambda = k$.

The convergence of the series follows immediately from Lemma A. Also

$$\sum_{N}^{N'} f_p(n)\Delta^q\varphi_n = f_p(N)\Delta^{q-1}\varphi_N - f_p(N')\Delta^{q-1}\varphi_{N'+1} + \sum_{N}^{N'-1}\{f_p(n+1)-f_p(n)\}\Delta^{q-1}\varphi_{n+1},$$

and therefore, using the results of Lemma A, we have, in the limit for $N'=\infty$

$$\sum_{N}^{\infty} f_p(n)\Delta^q\varphi_n = f_p(N)\Delta^{q-1}\varphi_N - \sum_{N}^{\infty}\Delta f_p(n)\Delta^{q-1}\varphi_{n+1}.$$

Repeating this transformation p times, and observing that $\Delta^{p+1}f_p(n)\equiv 0$, we obtain the result of the lemma.

6. We may now proceed with the proof of Theorem I. If $\lim s_n^{(k)}=s$ it is easy to see that

$$\lim\frac{s_n^{(k-1)}}{n}=0,\quad \lim\frac{s_n^{(k-2)}}{n^2}=0,\ \cdots,\ \lim\frac{s_n}{n^k}=0,\quad \lim\frac{a_n}{n^k}=0.$$

Hence the series

$$\Sigma a_n\varphi_n,\ \Sigma s_n\varphi_n,\ \Sigma n s_n^{(1)}\varphi_n,\ \cdots,\ \Sigma n^k s_n^{(k)}\varphi_n$$

are absolutely convergent for $t>0$. Also

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty a_n\varphi_n(t) &= \sum_0^\infty (n+1)s_n^{(1)}\Delta^2\varphi_n\\ &= \sum_0^\infty\{(n+1)^2 s_n^{(2)} - n(n+1)s_{n-1}^{(2)}\}\Delta^2\varphi_n\ ^*)\\ &= \sum_0^\infty\{(n+1)^2 s_n^{(2)} - n^2 s_{n-1}^{(2)}\}\Delta^2\varphi_n - \sum_1^\infty n s_{n-1}^{(2)}\Delta^2\varphi_n\\ &= \sum_0^\infty (n+1)^2 s_n^{(2)}\Delta^3\varphi_n - \sum_1^\infty n\, s_{n-1}^{(2)}\Delta^2\varphi_n.\end{aligned}$$

By a repetition of this transformation, applied to each of the above series, we find

$$\sum_0^\infty a_n\varphi_n(t) = \sum_0^\infty (n+1)^3\, s_n^{(3)}\Delta^4\varphi_n - \sum_1^\infty (3n^2+n)s_{n-1}^{(3)}\Delta^3\varphi_n + \sum_2^\infty (n-1)s_{n-2}^{(3)}\Delta^2\varphi_n;$$

*) Here again $s_{-1}^{(2)}$ must be interpreted as being zero.

and by repeated application of the transformation we find that

$$(1) \qquad F(t) = \sum_0^\infty a_n \varphi_n(t) = \sum_{\mu=0}^{k-1} (-1)^\mu \sum_\mu^\infty f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu}^{(k)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n,$$

where $f_{k-\mu}^{(k)}(n)$ is a polynomial in n of degree $k-\mu$, whose leading coefficient is positive; and in particular

$$f_k^{(k)}(n) = (n+1)^k.$$

The only point which requires proof is that the first coefficient in $f_{k-\mu}^{(k)}(n)$ is positive. Let us suppose that this has been proved for all values of k up to a certain value. When we transform

$$\sum_\mu^\infty f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu}^{(k)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

as above we obtain

$$\sum_\mu^\infty \left\{ (n-\mu+1) f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu}^{(k+1)} - (n-\mu) f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \right\} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

$$= \sum_\mu^\infty \left\{ (n-\mu+1) f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu}^{(k+1)} - (n-\mu) f_{k-\mu}^{(k)}(n-1) s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \right\} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

$$- \sum_{\mu+1}^\infty (n-\mu) \left\{ f_{k-\mu}^{(k)}(n) - f_{k-\mu}^{(k)}(n-1) \right\} s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

$$= \sum_\mu^\infty (n-\mu+1) f_{k-\mu}^{(k)}(n) s_{n-\mu}^{(k+1)} \Delta^{k+2-\mu} \varphi_n$$

$$- \sum_{\mu+1}^\infty (n-\mu) \left\{ f_{k-\mu}^{(k)}(n) - f_{k-\mu}^{(k)}(n-1) \right\} s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n.$$

Similarly

$$\sum_{\mu+1}^\infty f_{k-\mu-1}^{(k)}(n) s_{n-\mu-1}^{(k)} \Delta^{k-\mu} \varphi_n = \sum_{\mu+1}^\infty (n-\mu) f_{k-\mu-1}^{(k)}(n) s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

$$- \sum_{\mu+2}^\infty (n-\mu-1) \left\{ f_{k-\mu-1}^{(k)}(n) - f_{k-\mu-1}^{(k)}(n-1) \right\} s_{n-\mu-2}^{(k+1)} \Delta^{k-\mu} \varphi_n.$$

Combining the two terms in these expressions which contain

$$s_{n-\mu-1}^{(k+1)} \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n$$

we see that

$$f_{k-\mu-1}^{(k+1)}(n) = (n-\mu) \left\{ f_{k-\mu}^{(k)}(n) - f_{k-\mu}^{(k)}(n-1) + f_{k-\mu-1}^{(k)}(n) \right\},$$

an expression in which the leading coefficient is obviously positive. It is therefore established by induction that for all values of k and μ the first coefficient of $f_{k-\mu}^{(k)}(n)$ is positive. Now when k is once fixed we have only to deal with a limited number of fonctions of this kind, and *a value of n can therefore be assigned from and after which all the functions are positive.*

7. We return now to the equation (1) and suppose that $s_n^{(k)}$ tends for $n = \infty$ to a finite limit s, so that

$$s_n^{(k)} = s + \varepsilon_n \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

If we substitute s for $s_n^{(k)}$ throughout (1) we obtain what would have been the value of $F(t)$ if we had

$$a_0 = s, \; a_n = 0 \qquad (n > 0).$$

Hence

$$(2) \qquad F(t) = s\varphi_0(t) + \sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu \sum_{\mu}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\varepsilon_{n-\mu}\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n$$

$$= s\varphi_0(t) + \sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu \left(\sum_{n=\mu}^{N-1} + \sum_{N}^{\infty}\right)$$

$$= s\varphi_0(t) + R_1 + R_2,$$

say. We suppose N so chosen that for $n \geqq N$ (I) all of $f_{k-\mu}^{(k)}(n)$ are positive, (II) $|\varepsilon_{n-\mu}| < \varepsilon$. Then, since the differences $\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n$ are all positive (or zero)

$$|R_2| < \varepsilon \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{N}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n.$$

We have now only to prove that for $\mu = 0, 1, \cdots, k-1$, for all values of N, and for $0 \leqq t < 1$

$$\sum_{N}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n < K.$$

For then

$$|R_2| < \varepsilon K$$

and as $\lim_{t=0} s\varphi_0(t) = s$, and, when N is once fixed, $\lim R_1 = 0$, we shall have proved that

$$\lim_{t=0} F(t) = s.$$

8. But by Lemma B

$$\sum_{N}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\Delta^{k-\mu+1}\varphi_n = \sum_{\nu=0}^{k-\mu}(-1)^\nu \Delta^\nu f_{k-\mu}^{(k)}(N)\Delta^{k-\mu-\nu}\varphi_{N+\nu}.$$

Also

$$\Delta^\nu f^{(k)}_{k-\mu}(N) < K N^{k-\mu-\nu}$$

and by Lemma A

$$N^{k-\mu-\nu}\Delta^{k-\mu-\nu}\varphi_{N+\nu} < K$$

for $k-\mu-\nu = 0, 1, 2, \cdots, k$. Hence

$$\Delta^\nu f^{(k)}_{k-\mu}(N)\Delta^{k-\mu-\nu}\varphi_{N+\nu} < K$$

for

$$\nu = 0, 1, \cdots, k-\mu; \quad \mu = 0, 1, \cdots, k-1.$$

Hence

$$\sum_N^\infty f^{(k)}_{k-\mu}(n)\Delta^{k-\mu+1}\varphi_n < K$$

and the theorem follows as was indicated in the preceding paragraph.

9. *Applications: limitations of the theorem in practice.* The preceding theorem is simple, and interesting on account of the apparently natural character of the conditions which restrict its application. In practice, however, these conditions prove unduly narrow, and exclude a number of very interesting cases for which the result is true: and in order to deal with these cases we shall find it necessary to prove some supplementary theorems.

1). (I) If $\varphi_n(t) = e^{-nt}$ (or $= x^n$, if $x = e^{-t}$)

$$\Delta^\lambda \varphi_n = x^n(1-x)^\lambda \geqq 0.$$

and $\Sigma n^\lambda \varphi_n$ is convergent for $t > 0$ $(x < 1)$ for any value of λ. We thus obtain the known results of Frobenius*) and Holder**).

(II) In general, if $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$, and for $u > 0$

$$\varphi(u) > 0, \ \varphi'(u) < 0, \ \varphi''(u) > 0, \cdots$$

all the differences of the functions φ_n are positive. We can apply this to the functions

$$\varphi(u) = \frac{1}{(1+u)^s} \quad (s>0), \qquad \varphi(u) = e^{-u^\alpha} \quad (0<\alpha<1).$$

In the first case it is obvious that the conditions are satisfied; in the second case we observe that

$$\varphi'(u) = -\frac{\alpha}{u^{1-\alpha}}\, e^{-u^\alpha},$$

$$\varphi''(u) = \left\{\frac{\alpha(1-\alpha)}{u^{2-\alpha}} + \frac{\alpha^2}{u^{2(1-\alpha)}}\right\} e^{-u^\alpha},$$

and generally $\varphi^{(k)}(u)$ is of the form

$$(-1)^k e^{-u^\alpha} \sum \frac{A_\nu}{u^{\alpha_\nu}} \qquad (\alpha_\nu > 0, \ A_\nu > 0).$$

*) Crelles J., Bd. 89, p. 262.

**) Math. Annalen, Bd. 20, p. 535.

The theorem may therefore be applied if $\varphi(u)$ has either of these two forms; but in the first case we must suppose also that $s > k+1$, so as to ensure the convergence of $\Sigma n^k \varphi_n$. Hence *if* Σa_n *is summable* (k) *the series*

$$a_0 + \frac{a_1}{(1+t)^s} + \frac{a_2}{(1+2t)^s} + \cdots (s > k+1)$$

and

$$a_0 + a_1 e^{-t^\alpha} + a_2 e^{-(2t)^\alpha} + \cdots (0 < \alpha < 1)$$

are convergent for $t > 0$; *and the limit of each for* $t = 0$ *is the sum of the series* Σa_n.

2). (I) In the case of *Dirichlet's Series* the theorem fails to give us any information. This, however, is not due to the special conditions which we have chosen, but is inherent in the nature of the case. Suppose, for example

$$\varphi_n(t) = (n+1)^{-t}.$$

Then all the differences are positive, so that the characteristic condition of the theorem is satisfied. The theorem however fails because $\Sigma a_n \varphi_n(t)$ is not necessarily convergent for $t > 0$. Take e. g., the case of $k = 1$. The series

$$\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \cdots$$

is summable (1), but the series

$$\Sigma(-)^{n-1}(n+1)^{\frac{1}{2}-t}$$

is obviously divergent for $t \leqq \frac{1}{2}$. And in fact Dirichlet's Series must be dealt with by theorems of a more general character, which permit the series to be divergent but summable throughout the whole range of values of t and not merely at one end. Such a theorem I have proved, in the case of $k = 1$, in a recent paper*) in the *Proc. Lond. Math. Soc.*, where I have shown that '*if* φ_n, $\Delta\varphi_n$, $\Delta^2\varphi_n \geqq 0$ *and* Σa_n *is summable* (1), *then* $\Sigma a_n \varphi_n$ *is uniformly summable* (1), *and its sum is, therefore, a continuous function of* t.' I do not doubt that the obvious generalisation of this theorem to the case in which $k > 1$ and $k+1$ sets of differences are positive, is true: but I have not up to the present been able to prove it to be so in all cases.

(II) There are however cases in which the result stated by the theorem is in fact true, although the conditions are violated owing to the fact that the differences are not all positive.

---

*) Proc. Lond. Math. Soc., Series 2, Vol. III, pp. 247—265.

If

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{-nt}}{1+e^{-nt}} = \frac{q^n}{1+q^n},$$

(where $q = e^{-t}$)

$$\Delta\varphi_n = \frac{q^n(1-q)}{(1+q^n)(1+q^{n+1})} \geqq 0,$$

$$\Delta^2\varphi_n = \frac{q^n(1-q)^2(1-q^{n+1})}{(1+q^n)(1+q^{n+1})(1+q^{n+2})} \geqq 0,$$

but the *third* differences are not essentially positive. Thus the theorem shows that

$$\lim_{q=1}\left(\frac{2q}{1+q} - \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{2q^3}{1+q^3} - \cdots\right) = 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2},$$

but not that

$$\lim_{q=1}\left(\frac{2q}{1+q} - \frac{4q^2}{1+q^2} + \frac{6q^3}{1+q^3} - \cdots\right) = 1 - 2 + 3 - \cdots = \frac{1}{4},$$

as the last divergent series is only summable (2). Similar remarks apply to the series

$$\sum \frac{a_n q^n}{1+q^{2n}}, \quad \sum \frac{a_n q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}, \quad \sum \frac{a_n q^{2n+1}}{1+q^{4n+2}}, \cdots$$

which occur in the theory of elliptic functions. On the other hand if $\varphi_n(t) = \log(1+e^{-nt}) = \log(1+q^n)$ the third differences also are essentially positive, but not the fourth; and the theorem applies to the cases $k = 0, 1, 2$ only. Again if

$$\varphi_n(t) = e^{-n^2t^2} = q^{n^2} \qquad (q = e^{-t^2})$$

the second differences are not all positive: so that in this case the theorem does not give us as much information as Mr. Fejér's theorem.

10. The preceding examples make it clear that it is worth while to return to the proof of Theorem I and to see whether, when the condition concerning the differences is not satisfied, other sufficient conditions cannot be found to take its place. The particular case considered by Mr. Fejér, in which $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$, is of such especial importance that it deserves special treatment.

The following theorem is a very easy generalisation of Mr. Fejér's theorem:

Theorem II. *If* (I) Σa_n *is summable* (k),

(II) $\Sigma n^k \varphi(nt)$ *is absolutely convergent for* $t > 0$,

(III) $$\left|\frac{d^{k+1-\mu}\varphi(u)}{du^{k+1-\mu}}\right| < \frac{K}{u^{k+1-\mu+\varrho}} \qquad (\varrho > 0)$$

for $u \geqq 1$ *and* $\mu = 0, 1, \cdots, k-1$,

(IV) $\varphi(0) = 1$,

then $F(t) = \Sigma a_n \varphi(nt)$ *is absolutely convergent for* $t > 0$ *and*

$$\lim_{t=0} F(t) = s.$$

The proof proceeds in its early stages as before, until we find that it depends upon showing that

$$\sum_{N}^{\infty} \left| f_{k-\mu}^{(k)}(n) \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n \right| < K.$$

Now for every n and t

$$\Delta^{k+1-\mu} \varphi(nt) = (-1)^{k+1-\mu} t^{k+1-\mu} \varphi^{(k+1-\mu)} \xi,$$

where $nt \leqq \xi \leqq (n+k+1-\mu)t$. Choose N' so that

$$(N'-1)t < 1 \leqq N't.$$

Then for $n \geqq N'$

$$\left| f_{k-\mu}^{(k)}(n) \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n \right| < K n^{k-\mu} t^{k+1-\mu} \left| \varphi^{(k+1-\mu)}(\xi) \right| < K t^{-\varrho} n^{-1-\varrho},$$

and so

$$(1) \qquad \sum_{N'}^{\infty} \left| f_{k-\mu}^{(k)}(n) \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n \right| < K t^{-\varrho} \cdot \sum_{N'}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}} < K N'^{\varrho} \int_{N'}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{1+\varrho}} < K.$$

On the other hand

$$\sum_{N}^{N'-1} \left| f_{k-\mu}^{(k)}(n) \Delta^{k+1-\mu} \varphi_n \right| < K t^{k+1-\mu} M \sum_{N}^{N'-1} f_{k-\mu}^{(k)}(n)$$

(where M is the maximum of $\varphi^{(k+1-\mu)}(\xi)$ for $0 \leqq \xi \leqq 1$)

$$(2) \qquad < K t^{k+1-\mu} \sum_{N}^{N'-1} n^{k-\mu} < K (N't)^{k+1-\mu} < K.$$

From (1) and (2) the desired conclusion follows.

Theorem 2 may at once be applied to the cases mentioned in 9. (2), in which $\varphi_n(t)$ is of the form $\varphi(nt)$ and Theorem 1 fails, such as

$$\varphi_n(t) = e^{-(nt)^2}, \quad (k>0); \quad = \frac{e^{-nt}}{1+e^{-nt}}, \quad (k>1);$$
$$= \log(1+e^{-nt}) \quad (k>2);$$

but it fails when $\varphi_n(t)$ is not of this form, as when

$$\varphi_n(t) = \frac{n e^{-nt}(1-e^{-t})}{1-e^{-nt}}, \quad n^{-nt}, \cdots.$$

Thus, for example, neither Theorem 1 nor Theorem 2 enables us to assign the limit of

$$(1-q)\left\{\frac{q}{1-q}-\frac{2^k q^2}{1-q^2}+\frac{3^k q^3}{1-q^3}-\cdots\right\} \quad (k\geqq 2)$$

for $q=1$. This and similar questions occur in the problem of determining the behaviour of the modular functions of q as q approaches a point on the unit circle, and also (as Professor Bromwich has shown*)) in that of determining the repulsion between two electrified spheres in contact.

Cases such as these present somewhat greater difficulties; but the following theorem will be found effective in dealing with a great many of them.

11. Theorem 3. *If*

(I) Σa_n *is summable* (k) *to a sum* s,

(II) $\varphi_n(t)$ *is real and continuous,*

(III) $\Sigma n^k \varphi_n(t)$ *is absolutely convergent for* $t>0$,

(IV) *for any value of* $t>0$ *the* λ^{th} *differences* $\Delta^\lambda \varphi_n (0\leqq\lambda\leqq k+1)$ *can be divided into* r_λ *groups of successive terms, the terms of each group having the same sign, but the sign alternating from group to group, while* r_λ *depends (possibly) upon* t, *but remains less than a constant as* t *tends to zero,*

(V) $|n^\lambda \Delta^\lambda \varphi_n|<K$ *for* $\lambda=0,1,\cdots,k$ *and all values of* n *and* t,

(VI) $\varphi_n(0)=1$ *for every* n;

then $F(t)=\Sigma a_n \varphi_n(t)$ *is absolutely convergent for* $t>0$, *and* $\lim_{t=0} F(t)=s$.

To show the meaning of condition (IV) let us suppose $\varphi_n(t)=e^{-n^2t^2}$. All the first differences are positive, so that $r_1=1$. On the other hand

$$\Delta^2\varphi_n = e^{-n^2t^2}(1-2e^{-(2n+1)t^2}+e^{-(4n+4)t^2}) = e^{-n^2t^2}(1-2ue^{-t^2}+u^2e^{-4t^2})$$

where $u=e^{-2nt^2}$. This expression vanishes if

$$u=e^{3t^2}\left(1\pm\sqrt{(1-e^{-2t^2})}\right),$$

or

$$2nt^2=-3t^2-\log\left\{1\pm\sqrt{(1-e^{-2t^2})}\right\},$$

which gives one positive value of n, viz.,

$$n=\frac{1}{t\sqrt{2}}-\frac{3}{2}+\cdots.$$

Thus for $0\leqq n\leqq\left[\frac{1}{t\sqrt{2}}-\frac{3}{2}\right]$ the second differences are negative, while for larger values of n they are positive. And $r_1=2$.

*) Messenger of Mathematics, Vol. XXXV, p. 1.

In the general case we can, in virtue of condition (IV), form a certain finite number of groups of terms

$$\begin{aligned}
&\Delta^{k+1-\mu}\varphi_0\ ,\ \Delta^{k+1-\mu}\varphi_1\quad ,\ \cdots,\ \Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_1-1},\\
&\Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_1},\ \Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_1+1},\ \cdots,\ \Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_2-1},\\
&\Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta^{k+1-\mu}\varphi_{n_r},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

the last group extending to infinity, and the sign of every term in any one group being the same. The number of groups may depend upon the value of t, and the numbers $n_1, n_2, \cdots, n_n$ will depend upon t and in general tend to ∞ as t tends to zero. But the number of groups is less than a constant K.

Now

$$F(t) = \sum_{\mu=0}^{k-1}(-)^{\mu}\sum_{\mu}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\, s_{n-\mu}^{(k)}\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n = s\varphi_0(t) + \sum_{\mu=0}^{k-1}(-)^{\mu}(S_\mu + R_\mu),$$

say, where

$$S_\mu = \sum_{\mu}^{N-1} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\varepsilon_{n-\mu}\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n,$$

$$R_\mu = \sum_{N}^{\infty} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\varepsilon_{n-\mu}\Delta^{k+1-\mu}\varphi_n.$$

We choose N so that for $n \geqq N$

$$\text{(I)}\quad f_{k-\mu}^{(k)}(n) > 0, \qquad \text{(II)}\quad |\varepsilon_{n-\mu}| < \varepsilon;$$

and everything depends on our being able to prove that

$$|R_\mu| < K\varepsilon.$$

Now

$$|R_\mu| < \left|\sum_{N}^{n_1-1}\right| + \left|\sum_{n_1}^{n_2-1}\right| + \cdots + \left|\sum_{n_{r-1}}^{n-1}\right| + \left|\sum_{n_r}^{\infty}\right|.^{*})$$

Also

$$\sum_{\varkappa}^{\lambda-1} f_{k-\mu}^{(k)}(n)\,\Delta^{k+1+\mu}\varphi_n = \Phi_\varkappa - \Phi_\lambda$$

where

$$\Phi_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{k-\mu}(-)^{\nu}\Delta^{\nu} f_{k-\mu}^{(k)}(\varkappa)\Delta^{k-\mu-\nu}\varphi_{\varkappa+\nu}$$

and so

*) Should n_1 be $\leqq N$ (or $n_1, n_2, \cdots, n_s \leqq N$) a certain number of these terms may be omitted.

$$|R_\mu| < 2\varepsilon\left\{|\Phi_N| + \sum_{s=1}^{r}|\Phi_{n_s}|\right\}.$$

But from condition (V) it follows as in § 8 that

$$|\Phi_z| < K;$$

and hence

$$|R_\mu| < K\varepsilon.$$

The theorem is therefore proved.

12. Theorem 3 may be applied to such series as

$$\Sigma a_n q^{n^2}, \quad \Sigma a_n q^{n^k}. \ldots$$

but these series have already been disposed of more simply under Theorem 2. I shall therefore illustrate 3 by applying it to some cases in which $\varphi_n(t)$ is not of (and cannot be reduced to) the form $\varphi(nt)$.

(I) Suppose

$$\varphi_n(t) = n^{-nt} = e^{-nt\log n}.$$

Then

$$\Delta\varphi_n(t) = -\varphi'_{n+\theta}(t)$$

where $0 < \theta < 1$, the dash denoting differentiation with respect to n.

Now

$$|\varphi'_n(t)| = n^{-nt}t(1+\log n).$$

Keeping n fixed, let us choose t so that this is a maximum. We find $t = \frac{1}{n\log n}$, $n^{nt} = e$, and

$$|\varphi'_n(t)| = \frac{1+\log n}{en\log n}$$

from which it follows at once that $|n\Delta\varphi_n| < K$ for all values of n and t. Also

$$\Delta^2\varphi_n(t) = \left[\xi^{-\xi t}\left\{t^2(1+\log\xi)^2 - \frac{t}{\xi}\right\}\right] \quad (n<\xi<n+2),$$

and $t^2(1+\log\xi)^2 - \frac{t}{\xi}$ changes sign once only as ξ increases from 0 to ∞. Hence the conclusions of the theorem are satisfied for $k=1$. Thus *if* Σa_n *is summable* (1), *to a sum* s, *then*

$$\lim_{t=0}\left(\frac{a_1}{1^t} + \frac{a_2}{2^{2t}} + \frac{a_3}{3^{3t}} + \cdots\right) = s.$$

It may be verified without difficulty that the conditions of the theorem are satisfied for any value of k; so that *this conclusion still holds when* Σa_n *is summable* (k).

(II) As a second example I take

$$\varphi_n(t) = \frac{ne^{-nt}(1-e^{-t})}{1-e^{-nt}};$$

I leave it to the reader to verify that the conditions of Theorem 3 are satisfied.

Writing q for e^{-t} we obtain the following theorem: *if* Σa_n *is summable* (k) *to sum* s

$$\lim_{q=1}(1-q)\sum_{1}^{\infty}\frac{n a_n q^n}{1-q^n} = s.$$

For example

$$\lim_{q=1}(1-q)\sum_{1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n^{s+1}q^n}{1-q^n} = 1^s - 2^s + 3^s - \cdots,$$

since the divergent series on the right is summable by mean values for any value of s.

If s is an even positive integer

$$1^s - 2^s + 3^s - \cdots = 0,$$

while if s is an odd positive integer $2t+1$

$$1^s - 2^s + 3^s - \cdots = (-)^t \frac{2^{2t+2}-1}{2t+2} B_{t+1}.^*)$$

If s is not integral the sum of the series is

$$-(2^{s+1}-1)\zeta(-s)$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann ζ-function.

(III) As a final example I shall consider the series

$$F(x) = x^{\chi(0)} - x^{\chi(1)} + x^{\chi(2)} - \cdots$$

where $\chi(n)$ is a function of n, positive and integral for all positive integral values of n, and tending to infinity with n. The simplest and most interesting series of this kind (after the ordinary geometrical series) are

$$1 - x + x^4 - x^9 + \cdots + (-)^n x^{n^2} + \cdots$$

(1)
$$1 - x + x^8 - x^{27} + \cdots + (-)^n x^{n^3} + \cdots$$

. . . . . .

All the series of this type may however be dealt with under Theorem 2, which shows that each of them tends for $x = 1$ to the limit $\frac{1}{2}$. The cases next in interest ar those of

$$x - x^2 + x^4 - x^8 + \cdots + (-)^n x^{2^n} + \cdots$$

(2)
$$x - x^3 + x^9 - x^{27} + \cdots + (-)^n x^{3^n} + \cdots$$

. . . . . .

I shall therefore examine the series

$$\Sigma(-)^n x^{2^n}$$

*) Cambridge Philosophical Transactions, Vol. XIX, p. 306.

from the point of view of Theorem 3. The argument may be applied, *mutatis mutandis*, to other and less simple series; but some of the steps present difficulties which are greater in such cases.

In the first place it is easy to verify that condition (IV) is satisfied. For we can show without difficulty that $\Delta^2\varphi_n = x^{2^n} - 2x^{2^{n+1}} + x^{2^{n+2}}$, when x has any value between 0 and 1, vanishes for one value of n, which tends to ∞ as x tends to 1. It is positive for larger and negative for smaller values of n. Hence condition (IV) is satisfied.

On the other hand condition (V), which requires

$$n\Delta\varphi_n < K$$

is not satisfied. For if

$$x^{2^n} = \beta \quad (0<\beta<1),$$
$$\Delta\varphi_n = \beta(1-\beta),$$
$$n\Delta\varphi_n > Kn.$$

The conditions of the theorem are therefore not satisfied. And it is evident that condition (V) will not be satisfied for any of the series (2). On the other hand all the conditions may be shown to be satisfied by any of the series (1), so that these series may be dealt with either under 2 or under 3.

13. It is interesting to observe that the failure of our proof in the case of the series (2) is not due to any inadequacy in the theorem, but to the fact that it is no longer true that the series tend to the limit $\frac{1}{2}$. In fact *the series*

$$F(x) = x - x^a + x^{a^2} - \cdots,$$

where a is a positive integer greater than 1, *oscillates between finite limits of indetermination for* $x = 1$.

To prove this we observe in the first place that if $F(x)$ tends to a limit for $x = 1$, that limit can only be $\frac{1}{2}$, since

$$F(x) + F(x^a) = x. \tag{1}$$

In the second place we can find a solution of the equation (1) which is regular about the point $x = 1$ and tends to $\frac{1}{2}$ as x approaches 1 along the real axis. Such a solution is

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty \frac{\left\{\log\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^n}{n!(1+a^n)},$$

since

$$\Phi(x) + \Phi(x^a) = \sum_0^\infty \frac{\left\{\log\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^n}{n!} = x.$$

Now the function

$$\mathsf{X}(x) = F(x) - \Phi(x)$$

is a solution of the equation

$$f(x) + f(x^a) = 0 \tag{2}$$

which cannot be identically equal to zero, since the function $F(x)$ has the unit circle as a line of essential singularities while $\Phi(x)$ is an integral function of $\log\left(\frac{1}{x}\right)$.

But

$$\mathsf{X}(x) = -\mathsf{X}(x^a) = \mathsf{X}(x^{a^2}) = \mathsf{X}(x^{a^{2\mu}})$$

for all positive integral values of μ.

Or if

$$\mathsf{X}(x) = \Theta\left(\log\log\frac{1}{x}\right),$$

$$\Theta\left(\log\log\frac{1}{x}\right) = \Theta\left(\log\log\frac{1}{x} + 2\mu\log a\right).$$

Hence $\mathsf{X}(x)$ *is a periodic function of* $\log\log\frac{1}{x}$, *with a period*

$$2\log a,$$

and

$$x - x^a + x^{a^2} - \cdots$$

is the sum of (1) an integral function of $\log\left(\frac{1}{x}\right)$, which tends to $\frac{1}{2}$ for $x = 1$, and (2) a periodic function of $\log\log\left(\frac{1}{x}\right)$, which oscillates for $x = 1$, since $\log\log\frac{1}{x}$ tends to $-\infty$ as x tends to 1. Therefore *the series* $x - x^a + x^{a^2} - \cdots$ *oscillates for* $x = 1$ *between finite limits of indetermination.**)

14. After the series (2) the most interesting case of § 12, (III) is probably that of the series

$$f(x) = x - x^{1!} + x^{2!} - x^{3!} + \cdots,$$

and it may easily be shown that this series also oscillates for $x = 1$ between finite limits of indetermination, viz. 0 and 1.

Thus the general view which we have obtained of the behaviour of series of the type

$$x^{\chi(0)} - x^{\chi(1)} + y^{\chi(2)} - \cdots$$

for $x = 1$, $\chi(n)$ being an increasing function of n of a regular and simple type, such as

$$n,\ n^2,\ n^3,\ \cdots,\ 2^n,\ 3^n,\ \cdots,\ n!,\ (n!)^2,\ \cdots$$

is this:

---

*) The simple proof given above was shown me by Mr. J. H. Maclagan-Wedderburn. I had originally obtained the result by means of a contour integral.

If the increase *(croissance)* of $\chi(n)$ is not too rapid the series tends for $x = 1$ to the limit $\frac{1}{2}$, the sum of the divergent series

$$1 - 1 + 1 - \cdots.$$

When the increase of $\chi(n)$ passes a certain limit the series oscillates for $x = 1$. The swing of the oscillations is greater the greater the increase of $\chi(n)$. If the increase of $\chi(n)$ is greater than or equal to that of $n!$ the swing covers the whole interval $(0, 1)$. Beyond these limits it obviously cannot go.

15. The theorems proved in this paper are no doubt capable of further generalisation. I have allowed my investigations to come to an end at this point because it seemed to me that the results which I had obtained were sufficient to enable us to deal effectively with such simple and interesting cases as present themselves naturally in analysis, and because it seems that when the conditions of no one of the three theorems are satisfied it is generally best to attempt to establish the inequality $|R_\mu| < K\varepsilon$ of § 12 (on which the required proof really hangs) *ab initio* in each particular case.*)

*) I hope at some future date to work out more systematically some of the applications of these theorems to the elliptic and elliptic modular functions, the nature of which has been indicated in a general way in some of my illustrations. Considerations of space prevent my attempting this in the present paper. I may however refer to Riemann's fragment ‚Über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen' (Werke, p. 427) and Dedekind's notes (ibid. p. 438), and to papers by H. J. S. Smith ('On some discontinuous series considered by Riemann, Messenger, Vol. XI, p. 1) and by the present writer ('Note on the limiting values of the Elliptic Modular Functions', Quarterly Journal, vol. XXXIV, p. 76). Independently of me, Prof. Bromwich had proved a number of theorems of which the following is an example: *if* φ_n, $\Delta\varphi_n$, $\Delta^2\varphi_n \geqq 0$, $\lim_{t=0} \varphi_n(t) = 1$, *then*

$$\lim_{t=0} \varphi_0 - (1+p)\varphi_1 + \frac{(1+p)(2+p)}{1 \cdot 2}\varphi_2 - \cdots = 2^{-p-1}.$$

This theorem is of course a special case of Theorem I of this paper: but it can be proved independently in a very simple and elementary manner, and it enables us at once to assign the limits of a number of interesting series.

Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

Einleitung.

Ist eine analytische Funktion y der komplexen Veränderlichen z gegeben, die für $z = 0$ den Wert $y = A_0$ annimmt und in der Umgebung dieses Punktes regulär ist, im Inneren des Kreises $|z| < \varrho$ aber gewissen Beschränkungen unterworfen wird, so entsteht die Frage, ob nicht auch dadurch zugleich für die Koeffizienten des Funktionselements

$$y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k,$$

das die Funktion darstellt, Beschränkungen entstehen, welche bestimmt werden können.

Ein spezieller Fall dieser Art von Fragen kommt bei der bekannten Verallgemeinerung vor, die E. Landau für den Picardschen Satz über ganze transzendente Funktionen gegeben hat.*)

Dieser Satz kann nämlich folgendermaßen ausgesprochen werden: Wenn die Funktion y für $z = 0$ den Wert $y = A_0$ annimmt, im Inneren des Einheitskreises regulär ist und die Werte Null und Eins ausläßt, und wenn man den reellen und imaginären Teil des Koeffizienten A_1 als Koordinaten eines Punktes der Ebenen deutet, so muß dieser Punkt im Inneren eines Kreises liegen, dessen Radius man angeben kann.

*) E. Landau, Sitzungsb. d. Berl. Akad. (1904), XXXVIII (pag. 1118) siehe auch A. Hurwitz, Züricher Vierteljahrsschr. XLIX (pag. 242); F. Schottky, Berl. Akad. (1904) XLII (pag. 1244); C. Carathéodory, C.R. Bd. 141 (1905), p. 1213; P. Boutroux, Bull. Soc. Math. Bd. 34 (1906), p. 30.

Während des Druckes dieser Arbeit hat Herr Landau eine ausführliche Darstellung der in Betracht kommenden Fragen publiziert (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. 51, p. 252). Insbesondere wird im § 15 dieser Arbeit ein dem uns hier beschäftigenden analoges Problem auf ein algebraisches rekurrentes Verfahren zurückgeführt.

Auf ähnliche Weise will ich im folgenden die reellen und imaginären Teile der n Koeffizienten

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

als Koordinaten eines Punktes im $2n$-dimensionalen Raume deuten und diesen Punkt den n^{ten} *geometrischen Repräsentanten* der Potenzreihe nennen. Dann wird sich zeigen, daß, wenn die Funktion y vorgeschriebenen Bedingungen, ähnlich wie beim Landau-Picardschen Satze, genügt, dieser Punkt im Inneren oder auf der Oberfläche eines Körpers K_n liegen muß, den man vollständig und explizite bestimmen kann.

Wir werden von dem speziellen Falle ausgehen, wo die Funktion y im Inneren des Einheitskreises regulär ist und einen positiven reellen Teil besitzt, während sie für den Punkt $z = 0$ den Wert $y = 1$ annimmt.

Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{C}_n$ die Kurve, welche von dem Punkt mit den $2n$ Koordinaten

$$\begin{aligned} &2\cos\vartheta, \quad 2\cos 2\vartheta, \cdots, \quad 2\cos n\vartheta, \\ &-2\sin\vartheta, -2\sin 2\vartheta, \cdots, -2\sin n\vartheta \end{aligned}$$

durchlaufen wird, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert, so fällt unter diesen Annahmen der Körper K_n mit dem kleinsten konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ zusammen, der $\mathfrak{C}_n$ enthält.

Umgekehrt ist aber auch jeder Punkt von $\mathfrak{K}_n$ der n^{te} geometrische Repräsentant von mindestens einer Funktion $y(z)$, die den vorgeschriebenen Bedingungen genügt; für die Punkte der Oberfläche ist diese Funktion eindeutig bestimmt, rational und besitzt höchstens n Nullstellen.*)

Die allgemeine Fragestellung wird auf diese spezielle mit Hilfe einer geeigneten konformen Abbildung zurückgeführt; dieser Abbildung entspricht im $2n$-dimensionalen Raume der n^{ten} geometrischen Repräsentanten eine birationale Transformation, und der gesuchte Körper K_n ist nichts anderes als der Transformierte des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$.

§ 1.

Definition des Körpers $\mathfrak{K}_n$.

Wir betrachten zunächst Funktionen des komplexen Argumentes z, die im Inneren *und auf dem Rande* des Einheitskreises

$$|z| \leqq 1$$

regulär sind, für diese Werte von z einen positiven reellen Teil besitzen und für $z = 0$ den Wert Eins annehmen. Eine Funktion, welche allen diesen Bedingungen genügt, läßt sich in der Umgebung von $z = 0$ durch eine Potenzreihe

*) Dieses Resultat ist mit anderen Worten eine Verallgemeinerung und Präzisierung bekannter Hadamard-Borelscher Ungleichheiten.

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + i\bar{c}_k) z^k \tag{1}$$

darstellen, deren Konvergenzradius größer als Eins ist; mit $f(\vartheta)$ bezeichne man den reellen Teil von (1) auf dem Einheitskreise

$$z = e^{i\vartheta};$$

diese Größe, die unserer Annahme gemäß durchweg der Beziehung

$$f(\vartheta) \geqq 0 \tag{2}$$

genügen muß, läßt sich in eine konvergente Fouriersche Reihe

$$f(\vartheta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\vartheta - \bar{c}_k \sin k\vartheta) \tag{3}$$

entwickeln; es gelten also die bekannten Gleichungen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 2, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta = c_k, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta = -\bar{c}_k. \end{cases} \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (5) folgen mit Hilfe von (4) und (2) durch Anwendung des Mittelwertsatzes, und zwar für jedes k, die Beziehungen:

$$|c_k| \leqq 2, \qquad |\bar{c}_k| \leqq 2.$$

Der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion, welche unseren Forderungen genügt, liegt also jedenfalls im Endlichen.

Das Polynom n^{ten} Grades

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + i\bar{c}_k) z^k \tag{6}$$

hat den Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{matrix} c_1, & c_2, & \cdots, & c_n, \\ \bar{c}_1, & \bar{c}_2, & \cdots, & \bar{c}_n \end{matrix} \tag{7}$$

zum n^{ten} geometrischen Repräsentanten und da der reelle Teil der Funktion (6) auf dem Einheitskreise den Wert

$$f(\vartheta) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos k\vartheta - \bar{c}_k \sin k\vartheta)$$

besitzt, so sieht man, daß dieser reelle Teil auf der ganzen Kreisfläche nicht negativ sein kann, wenn für jedes k

$$|c_k| < \frac{1}{2n}, \qquad |\bar{c}_k| < \frac{1}{2n}$$

ist. Da in diesem Falle die Funktion (6) unsere sämtlichen Bedingungen erfüllt, so sieht man, daß gewisse Umgebungen des Anfangspunktes der Koordinaten im $2n$-dimensionalen Raume durch geometrische Repräsentanten unserer Funktionen erfüllt sind; eine solche Umgebung ist z. B. die Kugel vom Radius $\frac{1}{2n}$

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 + \bar{c}_k^2) \leqq \frac{1}{4n^2}. \tag{8}$$

Sind y_1 und y_2 zwei Funktionen, welche unsere sämtlichen Forderungen erfüllen, so gilt das gleiche für jede Funktion y der Schar

$$\begin{cases} y = ty_1 + (1-t)y_2, \\ 0 \leqq t \leqq 1; \end{cases}$$

der Repräsentant P von y durchläuft aber die geradlinige Strecke, welche die Repräsentanten P_1 und P_2 von y_1 und y_2 verbindet, wenn t von 0 bis 1 variiert; diese Strecke besteht also aus lauter geometrischen Repräsentanten unserer Funktionen.

Aus dieser Bemerkung folgt unter anderem, daß auf jedem Radiusvektor des $2n$-dimensionalen Raumes, der vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgeht, ein und nur ein Grenzpunkt π existiert, welcher diejenigen Punkte dieser Geraden, die Repräsentanten einer unserer Funktionen sein können, von den anderen trennt, welche diese Eigenschaft nicht haben. Es sei nun S ein Punkt des Strahles, der den Anfangspunkt O der Koordinaten mit dem Grenzpunkte π verbindet, und es liege π zwischen O und S (Fig. 1). Jeder Punkt Q des Raumes, der von S um weniger als

$$\frac{1}{2n} \frac{\pi S}{O\pi}$$

abweicht, kann unmöglich Repräsentant einer unserer Funktionen sein. Denn die Gerade $Q\pi$ schneidet dann den Kreis vom Radius $\frac{1}{2n}$, den die $2n$-dimensionale Kugel (8) in der Ebene OQS bestimmt (Fig. 1); man kann also von Q aus eine Tangente QT an diesen Kreis legen, welche die Strecke πS in einem inneren Punkte R trifft. Wäre nun Q Repräsentant einer Funktion $y(z)$, die unsere Bedingungen erfüllt, so müßte für jeden Punkt der Strecke QT, folglich auch für R das gleiche gelten und π wäre nicht Grenzpunkt von Repräsentanten auf der Strecke OS.

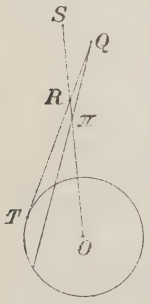


Fig 1.

Man bezeichne mit $\mathfrak{K}_n$ die Punktmenge, die man erhält, wenn man zu den Repräsentanten der unseren Bedingungen genügenden Funktionen die Grenzpunkte π hinzufügt; aus dem vorhergehenden folgt, daß jeder Punkt S, der nicht in $\mathfrak{K}_n$ enthalten ist, um eine endliche angebbare Größe von dieser Menge entfernt ist; da nun die Punktmenge $\mathfrak{K}_n$ keine isolierten Punkte enthält, so sieht man, daß sie perfekt ist.

Sind P_1 und P_2 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{K}_n$, so gehört jeder Punkt der Strecke P_1P_2 auch dieser Menge. Würde nämlich ein Punkt S dieser Strecke außerhalb $\mathfrak{K}_n$ liegen, so müßte im Dreiecke OP_1P_2 eine Parallele $P_1'P_2'$ zu P_1P_2 existieren, welche noch mindestens einen Punkt S' enthält, der nicht zu $\mathfrak{K}_n$ gehört, und dieses ist unmöglich, weil P_1' und P_2' sicher Repräsentanten von Funktionen $y(z)$ sind, die sämtlichen früher gestellten Forderungen genügen.

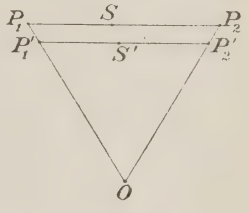


Fig. 2.

Die Punktmenge $\mathfrak{K}_n$ genügt also der Definition, die Minkowski für einen $2n$-dimensionalen konvexen Körper zugrunde legt*): sie liegt nicht ganz in einer $(2n-1)$-dimensionalen Ebene, ist perfekt und enthält jede geradlinige Strecke, deren Endpunkte ihr angehören.

Die Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$ wird aus der Gesamtheit der Grenzpunkte π gebildet, von denen einer auf jedem Radiusvektor durch den Anfangspunkt O der Koordinaten liegt; denn man kann zeigen, und zwar auf ganz analogem Wege wie früher für die äußeren Punkte S, daß, wenn P ein innerer Punkt der Strecke $O\pi$ ist, eine gewisse Umgebung von P aus lauter Punkten von $\mathfrak{K}_n$ besteht und folglich P auch innerer Punkt von $\mathfrak{K}_n$ ist; durch $\mathfrak{O}_n$ wird übrigens der Körper $\mathfrak{K}_n$ vollkommen bestimmt.

§ 2.

Stützebenen.

Eine abgeschlossene Punktmenge im n-dimensionalen Raume besitzt bekanntlich *Stützebenen***), d. h. solche $(n-1)$-dimensionale Ebenen, die mindestens einen Punkt der Menge enthalten und den der Ebene außerhalb liegenden n-dimensionalen Raum in zwei Teile trennen, von denen der eine keinen einzigen Punkt der Menge enthält.

Aus den Untersuchungen von Herrn Minkowski geht hervor, daß bei einem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ durch jeden Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}$ mindestens eine Stützebene geht. Den Gedankengang des folgenden einfachen Beweises für diese Tatsache verdanke ich seiner freundlichen Mitteilung.

*) Geometrie der Zahlen (Leipzig 1896) p. 200.

**) Der Ausdruck ist von Minkowski eingeführt l. c. p. 13.

Es sei π ein beliebiger Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ mit den Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n,$$

ferner sei S ein beliebiger Punkt, der außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$ liegt, und ε die Entfernung zwischen π und S. Der Abstand von S bis zu einem beliebigen Punkte von $\mathfrak{K}$ hat ein von Null verschiedenes Minimum δ, das für einen Punkt π' des Körpers erreicht wird, und es ist jedenfalls

$$\delta \leqq \varepsilon.$$

Die $(n-1)$-dimensionale Ebene, welche π' enthält und die Strecke $\pi' S$ senkrecht schneidet, ist eine Stützebene des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$; denn läge ein Punkt T von $\mathfrak{K}$ außerhalb dieser Ebene und auf derselben Seite wie S, so müßte wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ die ganze Strecke $\pi' T$ aus lauter Punkten dieses Körpers bestehen, und das Minimum des Abstandes zwischen S und $\mathfrak{K}$ wäre nicht für den Punkt π' erreicht, wie sich sofort aus der Betrachtung des Dreiecks $S\pi' T$ ergibt. Da nun folglich π, wenn er kein Punkt dieser Ebene ist, auf der entgegengesetzten Seite wie S zu liegen kommt, so enthält die Strecke πS sicher einen Punkt der konstruierten Stützebene und diese ist um weniger als ε von π entfernt. Wir betrachten nun eine Reihe von Punkten

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, \tag{9}$$

die sämtlich außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$ liegen und gegen π konvergieren, und es sei

$$u_1^{(k)} c_1 + u_2^{(k)} c_2 + \cdots + u_n^{(k)} c_n - d = 0 \tag{10}$$

die Gleichung der auf die soeben geschilderte Weise mit Hilfe des Punktes S_k konstruierten Stützebene. Wenn die Gleichung (10) in der Normalform geschrieben ist, d. h. wenn die Koeffizienten $u_i^{(k)}$ der Bedingung genügen

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i^{(k)})^2 = 1, \tag{11}$$

so stellt die linke Seite von (10) den Abstand des Punktes mit den Koordinaten $c_1, c_2, \cdots$ von der besagten Ebene dar. Bezeichnet man also mit ε_k den Abstand zwischen S_k und dem Grenzpunkte π, dessen Koordinaten γ_i waren, so hat man nach dem vorhergehenden

$$u_1^{(k)} \gamma_1 + u_2^{(k)} \gamma_2 + \cdots + u_n^{(k)} \gamma_n - d < \varepsilon_k;$$

also läßt sich die Gleichung (10) schreiben

$$u_1^{(k)} (\gamma_1 - c_1) + u_2^{(k)} (\gamma_2 - c_2) + \cdots + u_n^{(k)} (\gamma_n - c_n) - h_k = 0 \tag{12}$$

wobei

$$h_k < \varepsilon_k$$

ist und folglich die Gleichung

$$\lim_{k=\infty} h_k = 0 \tag{13}$$

gilt. Da nun wegen (11) alle Größen $u_i^{(k)}$ endlich bleiben, so läßt sich aus den Punkten S_1, S_2, $\cdots$ eine neue Reihe aussondern, für welche die Größen $\lim_{k=\infty} u_i^{(k)}$ existieren, so daß man für jedes

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

Gleichungen wie

$$\lim_{k=\infty} u_i^{(k)} = u_i$$

schreiben kann.

Ich behaupte, daß die Ebene

$$u_1(\gamma_1 - c_1) + u_2(\gamma_2 - c_2) + \cdots + u_n(\gamma_n - c_n) = 0, \tag{14}$$

die den Punkt π enthält, eine Stützebene ist. Im entgegengesetzten Falle würden nämlich zwei Punkte P und P' von $\mathfrak{K}$ existieren, deren Koordinaten, in die linke Seite von (14) eingesetzt, dieser Größe entgegengesetzte Vorzeichen erteilen würden. Dasselbe würde aber dann bei geeigneter Wahl von k in (12) gelten, was mit der Tatsache unvereinbar wäre, daß für jedes k die Gleichungen (12) eine Stützebene darstellen, und hiermit ist der Satz von Minkowski bewiesen.

§ 3.

Bestimmung der Oberfläche.

Wir kehren nun zu dem konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ im $2n$-dimensionalen Raume zurück, den wir im ersten Paragraphen betrachtet haben. Jeder *innere* Punkt von $\mathfrak{K}_n$ ist der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion $y(z)$, deren Konvergenzradius größer als Eins ist, deren reeller Teil im Einheitskreise nicht negativ wird und die für $z = 0$ den Wert Eins annimmt. Ist nun umgekehrt

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + i\bar{c}_k) z^k \tag{15}$$

eine Funktion, deren Konvergenzradius größer *oder gleich* Eins ist und deren reeller Teil im Einheitskreise nicht negativ ist, so liegt für jedes

$$r < 1$$

der Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{cases} c_1 r, & c_2 r^2, \cdots, & c_n r^n, \\ \bar{c}_1 r, & \bar{c}_2 r^2, \cdots, & \bar{c}_n r^n \end{cases}$$

im Inneren des Körpers $\mathfrak{K}_n$ und folglich der Punkt mit den Koordinaten

$$c_1, c_2, \cdots, c_n; \quad \bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n$$

im Inneren oder auf der Oberfläche dieser perfekten Punktmenge; der n^{te} geometrische Repräsentant von (15) ist also jedenfalls ein Punkt von $\mathfrak{K}_n$.

Es sei nun π ein Punkt der Oberfläche von $\mathfrak{K}_n$ mit den Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n; \quad \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots, \bar{\gamma}_n$$

und

$$\left.\begin{aligned} &u_1(c_1-\gamma_1)+u_2(c_2-\gamma_2)+\cdots+u_n(c_n-\gamma_n)\\ &+\bar{u}_1(\bar{c}_1-\bar{\gamma}_1)+\bar{u}_2(\bar{c}_2-\bar{\gamma}_2)+\cdots+\bar{u}_n(\bar{c}_n-\bar{\gamma}_n)\end{aligned}\right\}=0 \tag{16}$$

die Gleichung einer Stützebene durch diesen Punkt. Man normiere die Koeffizienten von (16) so, daß

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k^2+\bar{u}_k^2)=1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k\gamma_k+\bar{u}_k\bar{\gamma}_k)>0$$

sei. Für jeden Punkt von $\mathfrak{K}_n$ mit den Koordinaten c_k, $\bar{c}_k$ ist dann die linke Seite von (16) negativ oder Null, also

$$\sum_{k=1}^{n}(u_kc_k+\bar{u}_k\bar{c}_k)\leqq\sum_{k=1}^{n}(u_k\gamma_k+\bar{u}_k\bar{\gamma}_k), \tag{17}$$

und für innere Punkte ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Da nun π Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so wird man die Größe

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k\gamma_k+\bar{u}_k\bar{\gamma}_k)$$

durch die obere Grenze von

$$\sum_{k=1}^{n}(u_kc_k+\bar{u}_k\bar{c}_k)$$

bestimmen können, wenn der Punkt mit den Koordinaten $(c_k, \bar{c}_k)$ das Innere des Körpers $\mathfrak{K}_n$ durchläuft; nun ist aber jeder solche Punkt der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion $y(z)$, die auf dem Einheitskreise regulär ist und unseren Bedingungen genügt. Man kann also nach Einführung der Bezeichnung

$$\Phi(\vartheta)=\sum_{k=1}^{n}(u_k\cos k\vartheta-\bar{u}_k\sin k\vartheta) \tag{18}$$

mit Hilfe von (5) schreiben

$$\sum_{k=1}^{n}(u_kc_k+\bar{u}_k\bar{c}_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\,\Phi(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{19}$$

Da nun die Beziehungen (2) und (4) d. h.

$$\begin{cases} f(\vartheta) \geqq 0, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 2 \end{cases}$$

auch hier gelten, so folgt aus (19), wenn man mit M das Maximum der Funktion $\Phi(\vartheta)$ für das Intervall von 0 bis 2π bezeichnet, die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) \leqq 2M; \tag{20}$$

es ist also auch die obere Grenze der linken Seite von (20)

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k) \leqq 2M. \tag{21}$$

Die Funktion $\Phi(\vartheta)$ ist im Intervalle von 0 bis 2π stetig und erreicht ihr Maximum M für mindestens einen bestimmten Wert von ϑ, z. B. für $\vartheta = \vartheta_1$, so daß

$$M = \sum_{k=1}^{n}(u_k \cos k\vartheta_1 - \bar{u}_k \sin k\vartheta_1) \tag{22}$$

ist. Andererseits ist die Funktion

$$y = \frac{e^{i\vartheta_1} + z}{e^{i\vartheta_1} - z}$$

im Inneren des Einheitskreises regulär, ihr reeller Teil ist positiv innerhalb dieses Gebietes und sie nimmt für $z = 0$ den Wert 1 an. Der n^{te} geometrische Repräsentant dieser Funktion ist also ein Punkt von $\mathfrak{R}_n$; er hat aber die Koordinaten

$$c_k = 2\cos k\vartheta_1, \qquad \bar{c}_k = -2\sin k\vartheta_1,$$

und es folgt aus (22) für diesen Punkt

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) = 2M.$$

Es ist also wegen (17)

$$2M \leqq \sum_{k=1}^{n}(u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k)$$

und der Vergleich mit (21) liefert

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k) = 2M. \tag{23}$$

Es sei jetzt eine Reihe

$$P_1, P_2, P_3, \cdots$$

von unendlich vielen Punkten des *Inneren* von $\mathfrak{K}_n$ gegeben, die gegen unseren Punkt π konvergieren, und man bezeichne mit

$$c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \cdots, c_n^{(m)}; \qquad \bar{c}_1^{(m)}, \bar{c}_2^{(m)}, \cdots, \bar{c}_n^{(m)}$$

die Koordinaten des Punktes P_m; wir können wegen (17) und (23) schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} \left(u_k c_k^{(m)} + \bar{u}_k \bar{c}_k^{(m)} \right) = 2M - \varepsilon_m^2, \tag{24}$$

wobei ε_m eine von Null verschiedene Größe bedeutet und

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \varepsilon_m = 0$$

ist. Es sei weiter y_m eine auf dem Einheitskreise noch konvergierende Potenzreihe, die allen unseren Bedingungen genügt und deren Repräsentant P_m ist, $f_m(\vartheta)$ der reelle Teil von y_m auf diesem Kreise.

Es gilt nach (19) und (24) die Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\, \Phi(\vartheta)\, d\vartheta = 2M - \varepsilon_m^2. \tag{25}$$

Nun seien mit

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_p$$

die sämtlichen Werte von ϑ zwischen 0 und 2π bezeichnet, für welche

$$\Phi(\vartheta) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \cos k\vartheta - \bar{u}_k \sin k\vartheta)$$

seinen Maximalwert M erreicht; da diese Größe aus einer abgebrochenen Fourierschen Reihe besteht, die mit den Gliedern in $\cos n\vartheta$ und $\sin n\vartheta$ aufhört, so kann sie, was auch die Werte der Konstanten u_k, $\bar{u}_k$ sein mögen, im Intervalle von 0 bis 2π nie mehr als n Maxima überhaupt aufweisen und es ist

$$p \leqq n.$$

Für hinreichend kleine Werte von ε_m oder, was dasselbe ist, für hinreichend große Werte von m werden durch die Bedingung

$$\Phi(\vartheta) \geqq M - \varepsilon_m$$

im Intervalle von 0 bis 2π genau p voneinander getrennte Teilintervalle*)

$$\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \cdots, \delta_p^{(m)}$$

*) oder höchstens $p+1$, von denen aber dann zwei die Endpunkte 0 und 2π enthalten.

definiert; jedes dieser Teilintervalle konvergiert gegen Null, wenn m unbeschränkt wächst. Man bezeichne mit $L_0^{(m)}$ den Wert von

$$\frac{1}{2\pi}\int f_m(\vartheta)\,d\vartheta$$

über das Äußere der sämtlichen Teilintervalle, mit $L_j^{(m)}$ den Wert desselben Integrals für das Intervall $\delta_j^{(m)}$. Es ist wegen (4) für jedes m

$$L_0^{(m)} + L_1^{(m)} + \cdots + L_p^{(m)} = 1; \tag{26}$$

andererseits hat man

$$\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{2\pi} f_m(\vartheta)\,\Phi(\vartheta)\,d\vartheta \leqq 2L_0^{(m)}\left(M - \varepsilon_m\right) + 2M\left(L_1^{(m)} + L_2^{(m)} + \cdots + L_p^{(m)}\right).$$

Aus (25) und (26) folgt also

$$2M - \varepsilon_m^2 \leqq 2M - 2L_0^{(m)}\,\varepsilon_m$$

oder

$$L_0^{(m)} \leqq \frac{\varepsilon_m}{2};$$

folglich ist auch

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} L_0^{(m)} = 0. \tag{27}$$

Aus der Menge der Funktionen y_m kann man nun eine Teilmenge absondern, so daß für jedes

$$j = 1, 2, \cdots, p$$

die $L_j^{(m)}$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren; man hat dann

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} L_j^{(m)} = \lambda_j$$

und wegen (26) und (27)

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1;$$

die λ_j können nach ihrer Definition wegen der Bedingung

$$f_m(\vartheta) \geqq 0$$

niemals negativ sein.

Wir können mit Hilfe der gefundenen Resultate die Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n; \qquad \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots, \bar{\gamma}_n$$

unseres Grenzpunktes π wirklich bestimmen; denn es ist

$$\gamma_k = \operatorname*{Lim}_{m=\infty} c_k^{(m)}, \qquad \bar{\gamma}_k = \operatorname*{Lim}_{m=\infty} \bar{c}_k^{(m)};$$

$$c_k^{(m)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\bar{c}_k^{(m)} = \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta$$

und der Mittelwertsatz liefert, wenn man berücksichtigt, daß die Intervalle $\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \cdots, \delta_p^{(m)}$ mit wachsendem m unendlich klein werden,

$$\begin{cases} \gamma_k = \quad 2\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sin k\vartheta_j. \end{cases}$$

Wenn wir nun bemerken, daß p höchstens gleich n ist, so sehen wir, daß *jeder* Punkt π der Oberfläche $\mathfrak{D}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ die Koordinaten

$$\begin{cases} \gamma_k = \quad 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\vartheta_j \end{cases} \tag{28}$$

besitzt, wobei ϑ_j, λ_j geeignete Konstanten bedeuten, die den Bedingungen

$$\begin{cases} 0 \leqq \vartheta_j \leqq 2\pi, \quad \lambda_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases} \tag{29}$$

genügen.

Sind umgekehrt ϑ_j und λ_j irgend welche $2n$ reelle Zahlen, welche die Bedingungen (29) befriedigen, so stellen die Gleichungen (28) die Koordinaten eines Punktes P von $\mathfrak{K}_n$ dar; denn P ist der n^{te} geometrische Repräsentant der Funktion

$$y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z}, \tag{30}$$

und diese erfüllt unsere sämtlichen Bedingungen: sie ist regulär und ihr reeller Teil ist positiv für

$$|z| < 1,$$

und für $z = 0$ ist $y = 1$.

Läßt man also die Größen

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

innerhalb der Grenzen (29) *unbeschränkt variieren, so wird der Punkt, dessen Koordinaten durch die Gleichungen*

$$(31) \qquad \begin{cases} \gamma_k = \quad 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\vartheta_j \end{cases}$$

gegeben sind, den konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ nie verlassen und es wird jeder Punkt der Oberfläche $\mathfrak{D}_n$ dieses Körpers mindestens für ein System von Werten ϑ_j, λ_j erreicht werden.

§ 4.

Eindeutigkeit.

Es muß nun gezeigt werden, daß die rationalen Funktionen der Form (30) die *einzigen* sind, welche unsere sämtlichen Bedingungen erfüllen und einen Punkt π der Oberfläche $\mathfrak{D}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ zum geometrischen Repräsentanten haben. Man nehme an, daß $y(z)$ eine Funktion sei, welche dies leiste; dann ist die Funktion $y = y(rz)$ für jedes $r < 1$ auch auf dem Einheitskreise regulär und wir können für den reellen Teil dieser letzten Funktion auf dem Einheitskreise die Bezeichnung $f(r, \vartheta)$ einführen. Wir werden von der Bemerkung sofort Gebrauch machen, daß $f(r, \vartheta)$ auch den reellen Teil der ursprünglichen Funktion $y(z)$ auf dem Kreise $re^{i\vartheta}$ darstellt.

Da der Repräsentant von $y(rz)$ im *Inneren* von $\mathfrak{K}_n$ liegt, so hat man die der Gleichung (25) analoge Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \vartheta)\, \Phi(\vartheta)\, d\vartheta = M - \varepsilon^2(r),$$

wobei $\varepsilon(r)$ eine von Null verschiedene positive Größe bedeutet, und es ist, weil der n^{te} geometrische Repräsentant von $y(rz)$ sich stetig mit r ändert,

$$\lim_{r=1} \varepsilon(r) = 0.$$

Nun betrachte man wieder die Intervalle

$$\delta_1(r), \delta_2(r), \cdots, \delta_p(r),$$

innerhalb welcher

$$\Phi(\vartheta) \geqq M - \varepsilon(r)$$

ist, und bezeichne mit $L_j(r)$ den Wert des Integrals

$$\int f(r, \vartheta)\, d\vartheta$$

innerhalb des Intervalls $\delta_j(r)$ genommen. Man kann jedenfalls eine Reihe von wachsenden positiven Größen

$$r_1, r_2, r_3, \cdots \tag{32}$$

bestimmen, welche alle < 1 sind, gegen Eins konvergieren und die Eigenschaft haben, daß für jedes

$$j = 1, 2, \cdots, p,$$
$$\lim_{n=\infty} L_j(r_n) = \lambda_j$$

existiert.

Nun betrachte man die Funktion

$$\overline{y}(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z},$$

wo die λ_j durch die soeben bestimmten Werte gegeben sind und die ϑ_j dieselbe Bedeutung haben wie früher; die Größen λ_j, ϑ_j genügen ihrer Konstruktion nach den Beziehungen (29), so daß $\overline{y}(z)$ unsere sämtlichen Bedingungen ebenfalls erfüllt. Man bezeichne mit $\bar{f}(r, \vartheta)$ den reellen Teil von $\overline{y}(z)$ auf dem Kreise $re^{i\vartheta}$.

Ist nun

$$z = \varrho e^{i\psi}$$

ein willkürlicher Punkt im Inneren des Kreises $|z| < 1$, so sind in der Reihe (33) für hinreichend große n sämtliche $r_n > \varrho$ und es kann $f(\varrho, \psi)$ durch das Poissonsche Integral für einen Kreis mit dem Radius r_n

$$f(\varrho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_n, \vartheta)\,(r_n^2 - \varrho^2)}{r_n^2 - 2 r_n \varrho \cos(\vartheta - \psi) + \varrho^2}\, d\vartheta$$

ausgedrückt werden. Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung von n unabhängig und man bekommt, wenn man n gegen Unendlich konvergieren läßt und das Integral ähnlich wie früher abschätzt (pag. 106),

$$f(\varrho, \psi) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j (1 - \varrho^2)}{1 - 2\varrho \cos(\vartheta_j - \psi) + \varrho^2}.$$

Genau denselben Ausdruck würde man bei der Berechnung von $\bar{f}(\varrho, \psi)$ erhalten, so daß schließlich die Gleichung

$$f(\varrho, \psi) = \bar{f}(\varrho, \psi)$$

in ϱ und ψ identisch erfüllt ist; hieraus folgt endlich, da

$$y(0) = \overline{y}(0) = 1$$

ist,

$$y(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z},$$

d. h. die Beziehung, die wir beweisen wollten.

Zugleich hat sich ergeben, daß die Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ sich auf *eindeutige* Weise durch die Formeln (28) darstellen lassen; jedesmal nämlich, wo die Größen (λ_j, ϑ_j) und $(\lambda'_j, \vartheta'_j)$ in die Formeln eingesetzt dieselben Werte für γ_k, $\overline{\gamma}_k$ liefern würden, müßte nach dem vorhergehenden die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z} = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j \frac{e^{i\vartheta'_j} + z}{e^{i\vartheta'_j} - z}$$

identisch in z erfüllt sein, woraus folgt, daß die λ_j, ϑ_j und λ'_j, ϑ'_j bis auf die Reihenfolge auch identisch sind.

Man hat also den Satz: *Es gibt nur eine Funktion, deren Repräsentant ein gegebener Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ ist, und diese ist rational und höchstens vom n^{ten} Grade.*

§ 5.

Vollständigkeit der Darstellung.

Um auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen d. h. daß der Repräsentant jeder rationalen Funktion, die sich in der Form (30) darstellen läßt, der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ gehört, müssen wir die geometrischen Eigenschaften von $\mathfrak{K}_n$ etwas näher betrachten.

Man bemerke zunächst, daß jeder Punkt der Oberfläche oder des Inneren des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$ als Projektion im $2n$-dimensionalen Raume eines Punktes der Oberfläche $\mathfrak{O}_{n+1}$ (die im $(2n+2)$-dimensionalen Raume liegt) angesehen werden kann. Hieraus folgt, daß die Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}_n$ sich in der Form

$$(33) \qquad \begin{cases} c_k = \quad 2\sum_{j=1}^{(n+1)} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \overline{c}_k = -2\sum_{j=1}^{(n+1)} \lambda_j \sin k\vartheta_j, \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

darstellen lassen, wobei die λ_j alle positiv oder Null und ihre Summe gleich Eins ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}_n$ die Kurve, welche durch den Punkt mit den Koordinaten

$$2\cos\vartheta,\quad 2\cos 2\vartheta,\ \cdots,\quad 2\cos n\vartheta,$$
$$-2\sin\vartheta,\ -2\sin 2\vartheta,\ \cdots,\ -2\sin n\vartheta$$

im $2n$-dimensionalen Raume beschrieben wird, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert. Die Punkte dieser Kurve gehören als Repräsentanten der Funktionen

$$y(z) = \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}$$

sämtlich zu $\mathfrak{K}_n$. Sind

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p$$

die Punkte von $\mathfrak{C}_n$, welche den Werten

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \cdots,\ \vartheta_p$$

von ϑ entsprechen, die in (33) vorkommen, (wobei angenommen wird, daß

$$p \leqq n+1$$

und

$$\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$$

ist), so enthält *jeder* konvexe Körper, dem die Punkte $C_1, C_2, \cdots, C_p$ gehören, auch den Punkt mit den Koordinaten (33); dieses kann ohne weiteres mit Hilfe unserer Definition eines konvexen Körpers und Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ bewiesen werden.

Aus diesen sämtlichen Tatsachen folgt, daß *jeder* Punkt von $\mathfrak{K}_n$ in *jedem* konvexen Körper enthalten ist, dem die Kurve $\mathfrak{C}_n$ angehört, das heißt *daß $\mathfrak{K}_n$ der kleinste konvexe Körper ist, der $\mathfrak{C}_n$ enthält.*

Jede Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ ist also Stützebene von $\mathfrak{K}_n$, sonst würde derjenige Teil $\mathfrak{K}'_n$ von $\mathfrak{K}_n$, der auf derselben Seite der Stützebene wie $\mathfrak{C}_n$ liegt, schon einen konvexen Körper bilden, der $\mathfrak{C}_n$ enthält und der kleiner wäre als $\mathfrak{K}_n$. Ähnlich sieht man, daß jede Stützebene von $\mathfrak{K}_n$ auch Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ sein muß.

Es sei nun ein Punkt P mit den Koordinaten

$$(34)\qquad \begin{cases} \gamma_k = 2\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \quad \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sin k\vartheta_j \\ k = 1, 2, \cdots, n \\ p \leqq n \end{cases}$$

gegeben, wobei die λ_j wie immer positiv sind und zur Summe Eins haben.

Ich will zeigen, daß dieser Punkt ein Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ ist; dieses kann dadurch bewiesen werden, daß wir eine Stützebene von $\mathfrak{K}_n$ oder, was dasselbe ist, von $\mathfrak{C}_n$ konstruieren, die den Punkt P enthält.

Wir betrachten dazu eine Reihe von n getrennten Punkten auf $\mathfrak{C}_n$, unter welchen sämtliche Punkte enthalten sind, die den Werten

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_p$$

in (34) entsprechen.

Jede $(2n-1)$-dimensionale Ebene, welche diese n Punkte enthält, muß durch P gehen. Nun gibt es aber eine solche Ebene von der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) = 2d, \tag{35}$$

welche in jedem der n Punkte die Kurve $\mathfrak{C}_n$ berührt; man braucht nur die Verhältnisse der $2n+1$ Größen u_k, $\bar{u}_k$ und d durch die $2n$ linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} (u_k \cos k\vartheta_j - \bar{u}_k \sin k\vartheta_j) = d, \\ &\sum_{k=1}^{n} (k u_k \sin k\vartheta_j + k\bar{u}_k \cos k\vartheta_j) = 0 \\ &\qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}\right.$$

zu bestimmen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k \cos k\vartheta - \bar{u}_k \sin k\vartheta) = d \tag{36}$$

hat, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert, höchstens $2n$ reelle Wurzeln; er kann also in diesem Intervalle nur für die Werte

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$$

verschwinden, da jedem dieser Werte eine Doppelwurzel entspricht. In der Umgebung eines jeden dieser Werte behält er aber dasselbe Vorzeichen; folglich muß er für alle Werte von ϑ, für welche er nicht verschwindet, ein und dasselbe Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: es stellt (35) die gesuchte Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ dar, welche den Punkt P enthält.

Hieraus folgt nun, daß die Gleichungen (28) *ausschließlich* Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ darstellen können, und da wir im § 4 die Eindeutigkeit der Darstellung für diese Punkte bewiesen haben, so folgt ganz allgemein, daß Gleichungen wie

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \cos k\vartheta_j - \mu_j \cos k\psi_j) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \sin k\vartheta_j - \mu_j \sin k\psi_j) = 0$$

$$k = 1, 2, \cdots, n$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 0 \leqq \vartheta_j < 2\pi, & 0 \leqq \psi_j < 2\pi, \\ \lambda_j \geqq 0, & \mu_j \geqq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, & \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \end{cases}$$

nur dann gelten können, wenn bei geeigneter Anordnung der μ_j, ψ_j

$$\begin{cases} \lambda_j = \mu_j, & \vartheta_j = \psi_j \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

sind.

Wenn man also in den Formeln (28) *die* ϑ_j, λ_j, *bei Berücksichtigung der Bedingungen* (29), *unbeschränkt variiert, so wird die Oberfläche* $\mathfrak{O}_n$ *des Variabilitätsgebietes der Koeffizienten beschrieben, und die Beziehung zwischen den Punkten dieser Oberfläche und den Wertsystemen für die* λ_j, ϑ_j *ist eine eineindeutige.*

Jeder Punkt des Variabilitätsgebietes $\mathfrak{K}_n$ wird ferner erreicht, wenn man die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

durch die andere

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leqq 1$$

ersetzt. Man hat also folgenden Satz:

Jeder Punkt P des Variabilitätsgebietes $\mathfrak{K}_n$ *ist der* n^{te} *geometrische Repräsentant einer und nur einer rationalen Funktion der Form*

$$(37) \qquad \begin{cases} y = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z}, \\ \lambda_j \geqq 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1; \end{cases}$$

für $\lambda_0 = 0$ *liegt der Punkt P auf der Oberfläche* $\mathfrak{O}_n$ *von* $\mathfrak{K}_n$ *und die Funktionen* (37) *sind die einzigen, deren Repräsentant auf* $\mathfrak{O}_n$ *zu liegen kommt.*

§ 6.

Allgemeine Probleme.

Wir wollen jetzt die gefundenen Resultate auf die allgemeinen Probleme anwenden und nehmen an, es sei T ein Gebiet der Ebene der komplexen Veränderlichen u oder auch einer Riemannschen Fläche, welche auf dieser Ebene ausgebreitet ist, und man könne mit Hilfe einer analytischen Funktion $\varphi(y)$ die Halbebene

$$\Re(y) \geqq 0$$

auf dieses Gebiet abbilden; dabei gehe der Punkt $y = 1$ in einen regulären Punkt

$$u = M_0 = m_0 + i\overline{m}_0$$

des Inneren von T über. Die Funktion $\varphi(y)$ kann in der Umgebung des Punktes $y = 1$ in eine konvergente Potenzreihe der Form

$$u = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k (y-1)^k \tag{38}$$

entwickelt werden, wobei

$$|M_1| + 0$$

ist; man kann also die Reihe (38) in der Umgebung von $u = M_0$ umkehren und z. B. schreiben

$$y - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} N_k (u - M_0)^k \tag{39}$$

oder

$$y = \psi(u).$$

Nun sei $u(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z, welche für alle Werte

$$|z| < 1$$

auf das Innere des Gebietes T beschränkt bleibt, in diesem Gebiete regulär ist und für $z = 0$ den Wert $u = M_0$ annimmt; es kann nach den gemachten Voraussetzungen diese Funktion in der Umgebung von $z = 0$ in die konvergente Potenzreihe

$$u = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k \tag{40}$$

entwickelt werden, und wir wollen nach dem Variabilitätsgebiete des n^{ten} geometrischen Repräsentanten dieser Potenzreihe fragen.

Setzt man in (39) für u die gegebene Funktion $u(z)$ ein, so wird y eine Funktion von z sein, welche sämtlichen am Anfange dieser Arbeit

geschilderten Bedingungen genügt. Man wird sie also in die konvergente Potenzreihe

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \tag{41}$$

entwickeln können und der n^{te} geometrische Repräsentant dieser Potenzreihe wird im Inneren oder auf der Oberfläche unseres früheren Körpers $\mathfrak{K}_n$ liegen.

Die Gleichungen (38) und (39), mit (40) und (41) verbunden, liefern jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \left[\sum_{l=1}^{\infty} C_l z^l \right]^j,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \left[\sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l \right]^j,$$

und man kann mit Hilfe dieser letzten Beziehungen, wenn man die Koeffizienten derselben Potenzen von z rechts und links vergleicht, sowohl A_k als ganze rationale Funktion von $C_1, C_2, \cdots, C_k$, wie auch C_k als ganze rationale Funktion von $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ausdrücken.

Die n^{ten} geometrischen Repräsentanten der Potenzreihen (40) und (41) entsprechen also einander in eineindeutiger Weise und die birationale Transformation des $2n$-dimensionalen Raumes, welche diese Abbildung bewirkt, hängt nur von allen reellen und imaginären Teilen der n ersten Koeffizienten $M_1, M_2, \cdots, M_n$ der Potenzreihe (38) ab. Den Variabilitätsbereich K_n der n Koeffizienten $A_1, A_1, \cdots, A_n$ erhält man nun dadurch, daß man auf unseren früheren Körper $\mathfrak{K}_n$ die Transformation ausübt, und die Oberfläche Ω_n von K_n enthält ausschließlich die Repräsentanten von Funktionen der Form

$$\varphi\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n}{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n}\right), \tag{42}$$

wobei $\varphi(y)$ wieder die Funktion bezeichnet, welche die Halbebene auf das Gebiet T abbildet, und die α, β geeignete Konstanten bedeuten.

Alle unsere früheren Sätze lassen sich in geeignet modifizierter Form auf den Körper K_n übertragen. Insbesondere lassen sich die Koordinaten der Oberfläche Ω_n von K_n als rationale Funktionen der früher benutzten Parameter

$$\begin{cases} \lambda_j, \quad \cos k\vartheta_j, \quad \sin k\vartheta_j, \\ \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

ausdrücken. Dadurch, daß die Transformation eine birationale ist, ist man

versichert, daß zwei Punkte von Ω_n, die verschiedenen Werten der Parameter entsprechen, nie zusammenfallen können, und daß folglich die Oberfläche Ω_n sich nicht selbst schneidet und der Körper K_n einfach zusammenhängend ist.

Man kann ferner die Theorie, wie ich es in meiner Comptes Rendus Note (26. Dezember 1905) angedeutet habe, auch auf solche Fälle erstrecken, bei welchen der Punkt $u = M_0$ des Gebietes T singulär ist, die Funktion $u(r)$ aber auf T eindeutig bleibt; dann besitzt die Funktion $u(z)$ zwar auch eine Singularität für $z = 0$, aber die Potenzreihe (41) ist trotzdem regulär in diesem Punkte und dieses genügt, um auch hier den Körper K_n aufzustellen.

Brüssel, den 14. September 1906.

Über polynomische Entwicklungen II.

Von

GEORG FABER in Karlsruhe.

In einem früher veröffentlichten Aufsatze über polynomische Entwicklungen*) habe ich schon auf die Analogie gewisser von mir aufgestellter Reihen mit solchen nach Kugelfunktionen einer komplexen Veränderlichen hingewiesen und in Aussicht gestellt, meine damaligen Entwicklungen so zu erweitern, daß sich auch die Kugelfunktionen unter sie subsumieren. Im folgenden soll dies geschehen. Die Beweise beruhen wieder in erster Linie auf dem Cauchyschen Integralsatze, dann aber auch auf einer von Herrn Hadamard herrührenden Verallgemeinerung desselben, welche den Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Funktion $\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu c_\nu x^\nu$**) und der Funktionen $\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu x^\nu$, $\sum_0^\infty {}_\nu c_\nu x^\nu$ feststellt. Die gefundenen Sätze ergeben u. a. die engsten Beziehungen zwischen einer Reihe nach Kugelfunktionen $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu X_\nu$ und der mit den gleichen Koeffizienten a_ν gebildeten Potenzreihe $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$; insbesondere lassen sich die singulären Stellen der ersteren Funktion sofort angeben, sobald die der letzteren bekannt sind. Die Kugelfunktionen sind dabei, selbst wenn man das Wort in allgemeinster Bedeutung auffaßt und nicht nur die Legendreschen Polynome darunter versteht, nur als Beispiele viel allgemeinerer Polynomenfolgen aufzufassen.

Gleichzeitig erweist sich bei dieser Gelegenheit eine andre Ergänzung meines oben zitierten ersten Aufsatzes über polynomische Entwicklungen

*) Math. Ann. Bd. 57 (1903), p. 389—408, im folgenden stets als I zitiert.

**) Ich unterscheide zwischen der *Reihe* $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ und der *Funktion* $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ und verstehe unter letzterer die Reihe samt ihrer analytischen Fortsetzung.

als notwendig oder zum mindesten als wünschenswert. Ich habe nämlich damals (a. a. O. p. 397) über die Möglichkeit gewisser Nullentwicklungen nur eine Vermutung ausgesprochen, deren Beweis ich nachhole; für denselben benutze ich eine Stelle einer bereits im Jahre 1884 erschienenen, im übrigen andre Ziele verfolgenden Abhandlung des Herrn Pincherle*), der so freundlich war mich darauf aufmerksam zu machen.

§ 1.

Vorbemerkung.

Es sei $c_0, c_1, c_2, \cdots$ eine unendliche Folge reeller oder komplexer, *von Null verschiedener* Zahlen der Art, daß die *beiden* Funktionen

$$f_1(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu \tag{1}$$

und

$$f_2(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{c_\nu} \tag{2}$$

die singuläre Stelle $x = 1$ besitzen, aber regulär und eindeutig bleiben, solange x eine beliebige vom Punkte 1 zum Punkte ∞ gezogene Linie L nicht überschreitet.

Derartige Zahlen c_ν lassen sich leicht angeben, z. B.:

c_ν beliebig für $\nu < m$ (nur nicht gleich Null), $c_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ für $\nu \geqq m$, wenn $\mathfrak{P}(z)$ irgend eine für $|z| \leqq \frac{1}{m}$ konvergente Potenzreihe**) ist, die für keinen der Werte $z = \frac{1}{m}$, $z = \frac{1}{m+1}$, $z = \frac{1}{m+2}, \cdots$ verschwindet. Ferner genügen, wenn α keine positive ganze Zahl ist, die Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{\nu}$ den den c_ν auferlegten Bedingungen. Daß die Funktion $f_1(x)$ in letzterem Falle die gewünschte Eigenschaft hat, ist ohne weiteres klar, $f_2(x)$ aber ist die hypergeometrische Reihe $F(1, 1, -\alpha, -x)$, hat daher auch innerhalb der längs L aufgeschnittenen Ebene keine Singularität.

$F(x)$ sei nun eine analytische Funktion, von der nur vorausgesetzt

*) Annali di Matematica (2) 12 p. 112ff.

**) Unter $\mathfrak{P}(z)$ verstehe ich (wie es seit Weierstrass üblich ist) immer eine nur positive Potenzen von z enthaltende Potenzreihe und zwar nicht jedesmal die gleiche; nur wenn zu Mißverständnissen Anlaß sein könnte, unterscheide ich verschiedene Potenzreihen durch Indizes.

wird, daß der Nullpunkt zu ihrem Regularitätsbereiche gehört; in einer gewissen Umgebung desselben konvergiert daher die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu b_\nu x^\nu. \tag{3}$$

Ist C eine den Nullpunkt umschließende Kurve ohne Doppelpunkt und verhält sich $F(x)$ innerhalb C regulär, so wird nach einem Satze des Herrn Hadamard*) durch das Integral

$$\int_C F(z) f_1\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} \tag{4}$$

eine analytische Funktion $F_1(x)$ definiert, die im Endlichen keine andern Singularitäten hat wie $F(x)$ und deren Entwicklung um den Nullpunkt lautet:

$$F_1(x) = \sum_0^\infty {}_\nu b_\nu c_\nu x^\nu. \tag{5}$$

Um mich kurz auszudrücken, sage ich: $F_1(x)$ entsteht aus $F(x)$ durch die *Hadamardsche Transmutation* T_1. In gleicher Weise liefert die Anwendung der Hadamardschen Transmutation T_2 (die aus T_1 durch Ersatz von f_1 durch f_2 hervorgeht) auf $F_1(x)$ wieder die ursprüngliche Funktion $F(x)$:

$$F(x) = \int_C F_1(z) f_2\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}. \tag{6}$$

Nach dem Hadamardschen Satze könnte es zweifelhaft sein, ob *alle* singulären Stellen von $F(x)$ oder nur ein *Teil* derselben singuläre Stellen von $F_1(x)$ sind; das letztere ist aber ausgeschlossen, da auch $F(x)$ aus $F_1(x)$ durch eine Hadamardsche Transmutation T_2 entsteht und deshalb keine singulären Stellen besitzen kann, die nicht auch solche von $F_1(x)$ sind.

§ 2.

Definition gewisser Polynome durch erzeugende Funktionen. Reihen nach diesen Polynomen.

Die Kurve C, über welche die Integration (4) erstreckt wird, werde als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend (kurz gesagt: völlig singularitätenlos) vorausgesetzt. Das unendliche Gebiet der z-Ebene außerhalb dieser Kurve werde durch die Substitution

$$z = \psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) \tag{7}$$

*) Acta math. 22 (1898).

konform auf das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene abgebildet, so daß dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $\tau = 0$ entspricht. Die Substitution (7) ist dadurch nur insoweit bestimmt, als noch τ durch $\tau \cdot e^{i\vartheta}$, wo $e^{i\vartheta}$ ein willkürlicher Faktor vom absoluten Betrag 1 ist, ersetzt werden kann; ordnet man noch den Punkt $\tau = 1$ irgend einem Punkte der Kurve C zu, so ist auch dieser Faktor bestimmt. Den Kreisen K_ω mit den Gleichungen $|\tau| = \omega$ $(0 < \omega < 1)$ entsprechen Kurven C_ω, die ganz außerhalb $C (= C_1)$ verlaufen. Wegen der über C gemachten Voraussetzungen existiert aber auch eine Zahl ϱ so, so daß $\mathfrak{P}(\tau)$ für $|\tau| < 1 + \varrho$ konvergiert und durch (7) den Kreisen $K_{1+\sigma}$ mit den Gleichungen $|\tau| = 1 + \sigma$ $(0 < \sigma < \varrho)$ ganz innerhalb C verlaufende Kurven $C_{1+\sigma}$ zugeordnet sind.

Wird nun in dem Integrale auf der rechten Seite von (6) die Substitution (7) ausgeführt, so erhält man

$$F(x) = \int_{K_1} F_1(\psi(\tau))\, f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau. \tag{8}$$

Ich betrachte nun die hier auf der rechten Seite auftretende Funktion:

$$f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = f_2\left(\frac{\tau x}{a + \tau\, \mathfrak{P}(\tau)}\right) \frac{\tau}{a + \tau \cdot \mathfrak{P}(\tau)} \left(-\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}'(\tau)\right). \tag{9}$$

Der erste Faktor verhält sich als Funktion von τ betrachtet regulär, solange τ der Ungleichung $|\tau| < 1 + \varrho$ genügt und $\frac{x}{\psi(\tau)} \neq 1$ ist; liegt x innerhalb C_ω und ist $|\tau| < \omega$, so ist letztere Bedingung erfüllt. Die Entwicklung von $f_2\left(\frac{\tau x}{a + \tau\, \mathfrak{P}(\tau)}\right)$ nach steigenden Potenzen von τ erhält man dann am einfachsten, indem man $f_2\left(\frac{\tau x}{a + \tau \cdot \mathfrak{P}(\tau)}\right)$ zuerst in die für kleine Werte von $|\tau|$ sicher konvergente Reihe

$$\sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{c_\nu} \left(\frac{\tau x}{a + \tau\, \mathfrak{P}(\tau)}\right)^\nu \tag{10}$$

entwickelt, darauf die einzelnen Glieder dieser Reihe nach Potenzen von τ ordnet und schließlich sämtliche Koeffizienten der Potenzen τ^ν vereinigt. Da nur die ersten ν Glieder der Reihe (10) die Potenz τ^ν enthalten, während in den späteren Gliedern nur höhere Potenzen von τ vorkommen, wird der Koeffizient von τ^ν ein Polynom ν^{ten} Grades in x: $Q_\nu(x)$. In dem dritten Faktor auf der rechten Seite von (9) konvergiert $\mathfrak{P}'(\tau)$ für $|\tau| < 1 + \varrho$; ebenso läßt sich der zweite Faktor in eine für $|\tau| < 1 + \varrho$ konvergente Potenzreihe entwickeln, da $\psi(\tau)$ im Kreise $|\tau| < 1 + \varrho$ regulären Verhaltens und von Null verschieden ist. Man erhält somit

$$(11)\quad f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)\frac{1}{\psi(\tau)}\,\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=\sum_0^\infty{}_\nu\, Q_\nu(x)\,\tau^\nu\left(-\frac{a}{\tau}+d_0+d_1\tau+d_2\tau^2+\cdots\right)$$

$$=-\frac{a}{c_0\tau}+\sum p_{\nu+1}(x)\cdot\tau^\nu;$$

die Polynome $p_\nu(x)$ sind mit den $Q_\nu(x)$ durch folgende Gleichungen verbunden:

$$(12)\quad p_\nu(x)=-a\,Q_\nu(x)+d_0\,Q_{\nu-1}(x)+d_1\,Q_{\nu-2}(x)+\cdots+d_{\nu-2}\,Q_1(x)+d_{\nu-1}\,Q_0(x).$$

Das nächste Ziel der Untersuchung sind Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu p_\nu(x)$ nach diesen Polynomen; bezüglich der Konvergenz derselben sei folgendes bemerkt: Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so existiert eine Zahl n, so daß für $\nu>n$ und gleichmäßig für alle x innerhalb und auf C_ω: $\sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|}<\frac{1}{\omega}+\varepsilon$ ist; ich drücke dies kürzer aus durch die Bezeichnung:

$$(13)\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|}\leqq\frac{1}{\omega}$$

gleichmäßig für alle x innerhalb und auf C_ω. Daß die Ungleichung (13) für jedes *einzelne* der bezeichneten x gilt, sieht man sofort ein, da ja, falls x in dem erwähnten Gebiete liegt, die Reihe auf der rechten Seite von (11) für $|\tau|<\omega$ konvergiert. Um die *gleichmäßige* Erfüllung der Bedingung (13) nachzuweisen, nehme man zunächst an, daß x *auf* C_ω liege; dem Punkte x entspricht ein bestimmter Punkt t vom absoluten Betrage ω der t-Ebene vermöge der konformen Abbildung:

$$(14)\quad x=\psi(t)=\frac{a}{t}+\mathfrak{P}(t).$$

Substituiert man diesen Wert für x in (11), so geht die linke Seite über in eine analytische Funktion der zwei Veränderlichen t und τ, die im Gebiete $0<|\tau|<1+\varrho$, $0<|t|<1+\varrho$ regulär ist, solange t und τ voneinander verschieden sind. Ersetzt man auf der rechten Seite $p_\nu(x)$ durch seinen Ausdruck in t:

$$(15)\quad p_\nu(x)=\frac{1}{t^\nu}\,\mathfrak{P}_\nu(t),$$

so ist die so entstehende Reihe:

$$-\frac{a}{\tau}+\sum_0^\infty{}_\nu\,\frac{1}{t^\nu}\,\mathfrak{P}_\nu(t)\,\tau^{\nu+1}$$

absolut konvergent, solange $0<|\tau|<|t|<1+\varrho$ ist, selbst wenn man

die Koeffizienten der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(t)$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Daraus folgt:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{|\mathfrak{P}_\nu(t)|}{|t^\nu|}} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|} = \frac{1}{\omega} \tag{16}$$

gleichmäßig für alle $|t| = \omega$, bezw. für alle x auf C_ω. Da der Maximalwert, den der absolute Betrag eines Polynoms auf der Begrenzung eines endlichen zweidimensionalen Kontinuums annimmt, größer ist als irgend ein in einem innern Punkte von S angenommener Wert, so gilt um so mehr gleichmäßig für alle x innerhalb C_ω:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{\omega}. \tag{17}$$

Aus diesen Relationen folgt ohne weiteres: Genügen die Konstanten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ der Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega \qquad (< 1 + \varrho), \tag{18}$$

so *konvergiert die Reihe*

$$\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x) \tag{19}$$

innerhalb C_ω und stellt daselbst eine analytische Funktion dar. Was das Verhalten der Reihe *außerhalb C_ω* betrifft, so kann zunächst nicht geschlossen werden, daß (die Beziehung (18) vorausgesetzt) für alle Punkte außerhalb C_ω *Divergenz* stattfindet. Doch wäre dies sofort einleuchtend, wenn es gelänge statt der Relation (17) die präzisere

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|} = \frac{1}{\omega} \tag{20}$$

gleichmäßig für alle x auf C_ω zu beweisen.

Da der in Rede stehende Nachweis einerseits für das Folgende unwesentlich ist, andrerseits Schwierigkeit bietet, begnüge ich mich damit, das Bestehen der Beziehung (20) für den Fall zu beweisen, daß $f_2\left(\frac{x}{z}\right)$ eine nicht positiv-ganzzahlige Potenz von $\left(1 - \frac{x}{z}\right)$ ist:

$$f_2\left(\frac{x}{z}\right) = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^\alpha. \tag{21}$$

Man setze wieder $x = \psi(t)$; $z = \psi(\tau)$; dann ist $\left(1 - \frac{\psi(t)}{\psi(\tau)}\right)$ als Funktion von τ betrachtet regulär im Kreise $|\tau| = 1 + \varrho$ und hat innerhalb desselben die einzige Nullstelle $\tau = t$; es ist also

$$\left(1 - \frac{\psi(t)}{\psi(\tau)}\right) = \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \mathfrak{P}(\tau), \tag{22}$$

wobei $\mathfrak{P}(\tau)$ im Kreise $|\tau| = 1 + \varrho$ konvergiert und nirgends verschwindet; daher ist auch

$$\left(1 - \frac{\psi(t)}{\psi(\tau)}\right)^{\alpha} = \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} \mathfrak{P}_1(\tau), \tag{23}$$

und hier hat $\mathfrak{P}_1(\tau)$, wie im folgenden auch $\mathfrak{P}_2(\tau)$ und $\mathfrak{P}_3(\tau)$, die beiden soeben hervorgehobenen Eigenschaften mit $\mathfrak{P}(\tau)$ gemein. Die auf der linken Seite von (11) stehende erzeugende Funktion der Polynome $p_\nu(x)$ hat neben $f_2\left(\frac{x}{z}\right)$ noch den Faktor $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\,\frac{1}{\psi(\tau)} = \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{P}_2(\tau)$. Es ist also schließlich:

$$\left(1 - \frac{\psi(t)}{\psi(\tau)}\right)^{\alpha} \frac{1}{\psi(\tau)}\,\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{P}_3(\tau). \tag{24}$$

Der Koeffizient von $\tau^{\nu-1}$ in der Entwicklung der rechten Seite von (24) nach Potenzen von τ ist nach Definition $p_\nu(x)$; mit Benutzung der zuerst von Herrn Darboux in seinem berühmten Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*) angewandten Schlußweise ergibt sich nun:

$$p_\nu(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\nu+2)}{(\nu-1)!}\,\frac{(-1)^{\nu-1}}{t^{\nu-1}}\,\frac{1}{t}\,\mathfrak{P}_3(t)\,(1+\varepsilon_\nu); \tag{25}$$

für alle Punkte x von C_ω, also für $|t| = \omega$, besitzt $|\mathfrak{P}_3(t)\,(1+\varepsilon_\nu)|$ eine von Null verschiedene untere Grenze g wenigstens für $\nu > n$ und eine endliche obere Grenze G. Daraus folgt unmittelbar

$$\lim \sqrt[\nu]{|p_\nu(x)|} = \frac{1}{\omega} \tag{26}$$

gleichmäßig für alle x auf C_ω.

Für die Entwicklung einer innerhalb C_ω regulären analytischen Funktion in eine Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu p_\nu(x)$ ist es gleichgültig, ob (26) oder nur (17) bewiesen ist; um dieselbe auszuführen, erstrecke man das Integral (8) über einen Kreis $K_{\omega'}$ mit einem Radius $\omega' > \omega$, entwickle die unter dem Integralzeichen stehende Funktion (9) nach Potenzen von τ und integriere gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist; so ergibt sich

$$F(x) = \Sigma a_\nu p_\nu(x) \tag{27}$$

und

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} F_1(\psi(\tau))\,\tau^{\nu-1}\,d\tau. \tag{28}$$

*) Journal de Liouville (3) Bd. 4 (1878).

Um weitere Eigenschaften der Reihen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ abzuleiten, vergleiche man sie mit den in (I) aufgestellten Reihen $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$, die man unter der speziellen Annahme $f_2\left(\frac{x}{z}\right) = f_1\left(\frac{x}{z}\right) = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1}$ erhält. Die erzeugende Funktion der $P_\nu(x)$ war dementsprechend: $\frac{1}{1 - \frac{x}{\psi(\tau)}} \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$; aus dieser geht die erzeugende Funktion der $p_\nu(x)$ hervor, wenn man

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{\psi(\tau)}} = \sum_0^\infty \left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)^\nu \quad \text{durch} \quad f_2\left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{c_\nu} \left(\frac{x}{\psi(\tau)}\right)^\nu$$

oder x^ν durch $\frac{x^\nu}{c_\nu}$ ersetzt; d. h. man erhält die $p_\nu(x)$ aus den $P_\nu(x)$ durch die Hadamardsche Transmutation T_2 und die $P_\nu(x)$ aus den $p_\nu(x)$ durch die inverse Transmutation T_1. Beachtet man noch, daß die Funktionen $F_1(x) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ und $F(x) = \sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ durch die gleichen Transmutationen auseinander hervorgehen wie die $P_\nu(x)$ und $p_\nu(x)$, so kann das erhaltene Resultat auch so formuliert werden:

Jede umkehrbare Hadamardsche Transmutation T läßt sich an jeder Reihe $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ ausführen, indem man sie an den einzelnen Polynomen $P_\nu(x)$ ausführt. Da zwei hintereinander ausgeführte Transmutationen T wieder eine solche repräsentieren, so ergibt sich, wenn das Resultat der ersten Transmutation auf $P_\nu(x)$ wieder mit $p_\nu(x)$ bezeichnet wird, daß auch die Reihen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ gliedweise transmutiert werden dürfen. Spezielle Fälle der Transmutation sind Differentiation und Integration.

Da nun einerseits die Funktionen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ in ihren Singularitäten übereinstimmen und andrerseits in (I) bewiesen wurde, daß $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ auf C_ω, wenn $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$ ist, mindestens eine singuläre Stelle besitzt und daß jeder singulären Stelle von $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ auf C_ω um-

kehrbar eindeutig eine singuläre Stelle der Funktion $\sum_0^\infty a_\nu t^{-\nu}$ vom absoluten Betrage ω zugeordnet ist, so gelten diese Sätze auch für die Funktionen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$.

Um diese Sätze in anderer weittragender Weise zu verallgemeinern, erinnere ich daran, daß ihr Beweis aus der Identität

$$(29)\quad \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) = -\sum_0^\infty a_\nu t^{-\nu} + \mathfrak{P}(t) = -\Phi(t) + \mathfrak{P}_1(t) \quad [\text{I}\,(34)\ \text{p. } 398]$$

$$(\omega < |t| < 1 + \varrho)$$

folgte. Gibt es nun irgend eine in das Innere des Kreises $|t| = \omega$ führende Linie L, in deren Punkten sich die Funktion $\Phi(t)$ überall regulär verhält, so entspricht dieser Linie in der x-Ebene eine andere L', in deren Punkten sich die Funktion $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ regulär verhält wegen der Identität (29). Ist dagegen $t = t_0$ ein innerhalb des Kreises $|t| = \omega$ gelegener singulärer Punkt der Funktion $\Phi(t)$, so schließt man, genau wie in I p. 399 bezüglich der Punkte der Konvergenzgrenzen geschehen, daß der entsprechende Punkt $x_0 = \psi(t_0)$ ein singulärer von $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ sein muß und umgekehrt, und zugleich, daß die beiden Singularitäten von gleicher Art sind in dem a. a. O. näher präzisierten Sinne.

D. h. also: die *gegenseitige Zuordnung der Singularitäten der Reihen* $\sum_0^\infty a t^{-\nu}$ *und* $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ *beschränkt sich nicht nur auf die beiden Konvergenzgrenzen, sondern ist auf die analytische Fortsetzung beider Reihen über die ganze Ebene auszudehnen. Das gleiche gilt daher auch für die neu eingeführten Reihen* $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$.

Ferner besteht auch hier der Satz:

Die innerhalb einer Kurve C_ω *konvergente Entwicklung einer Funktion in eine Reihe* $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ *ist nur auf eine Weise möglich.*

Gäbe es nämlich zwei Darstellungen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty a_\nu' p_\nu(x)$ für eine und dieselbe Funktion $F(x)$, so würden auch die zwei Reihen

$\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu P_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu' P_\nu(x)$ eine und dieselbe Funktion $F_1(x)$ darstellen, nämlich jene, welche aus $F(x)$ durch die Transmutation T_1 entsteht. In I p. 395 wurde aber bewiesen, daß die Entwicklung einer Funktion in eine Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu P_\nu(x)$ nur auf eine Weise möglich ist.

Die Divergenz einer Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu p_\nu(x)$, für welche $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$ ist, in jedem Punkte x außerhalb C_ω, kann, wie bemerkt, zunächst nur in dem Falle erschlossen werden, in welchem die Beziehung (26) bewiesen ist; ohne näher zu untersuchen, ob das unter der Annahme, daß $f_2\left(\frac{x}{z}\right) = \left(1-\frac{x}{z}\right)^\alpha$ sei, eingeschlagene Beweisverfahren auch im allgemeinen Falle seine Beweiskraft behält, bemerke ich hier nur, daß man auf anderem Wege leicht einsieht, daß jedenfalls nicht in einem zweidimensionalen Kontinuum außerhalb C_ω Konvergenz stattfinden kann.

§ 3.

Allgemeinere Polynomenfolgen. Darstellungen der Null.

Mit $\chi(x,\tau) = \frac{1}{\tau}\cdot\sum_0^\infty{}_\nu p_\nu(x)\,\tau^\nu$ bezeichne ich kurz die erzeugende Funktion (11) der $p_\nu(x)$, während ich unter $\mathfrak{P}(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots$ irgend eine für $|\tau| < 1+\varrho$ konvergente Potenzreihe verstehe*). Dann sei

$$\chi(x,\tau)\,\tau\,\mathfrak{P}(\tau) = \sum_0^\infty{}_\nu \pi_\nu(x)\,\tau^\nu \tag{30}$$

die erzeugende Funktion neuer Polynome $\pi_\nu(x)$, für die sich ergibt:

$$\pi_\nu(x) = c_0 p_\nu(x) + c_1 p_{\nu-1}(x) + c_2 p_{\nu-2}(x) + \cdots + c_{\nu-1}p_1(x) + c_\nu p_0(x). \tag{31}$$

Genau wie im vorigen Paragraphen die Relationen (17) und (26) gefunden wurden, ergibt sich jetzt:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|\pi_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{\omega} \tag{32}$$

gleichmäßig für alle x auf und innerhalb C_ω und insbesondere, wenn $f_2\left(\frac{x}{z}\right) = \left(1-\frac{x}{z}\right)^\alpha$ vorausgesetzt wird:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|\pi_\nu(x)|} = \frac{1}{\omega} \tag{33}$$

*) Daß p. 117 unter $c_0, c_1, \cdots$ etwas anderes verstanden wurde, stört hier nicht.

gleichmäßig für alle x auf C_ω, zum mindesten wenn $\mathfrak{P}(t)$ für keinen Wert t vom absoluten Betrage ω verschwindet.

Ist $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$, so konvergiert daher die Reihe $\sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x)$ gleichmäßig innerhalb C_ω.

Ein spezieller Fall der $\pi_\nu(x)$ sind folgende mit $\Pi_\nu(x)$ bezeichneten Polynome:

$$\Pi_\nu(x) = c_0 P_\nu(x) + c_1 P_{\nu-1}(x) + \cdots + c_{\nu-1} P_1(x) + c_\nu P_0(x); \tag{34}$$

von den zwei Reihen $\sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty a_\nu \Pi_\nu(x)$ geht die zweite aus der ersten durch die Transmutation T_1 hervor.

Gilt nun die innerhalb C_ω konvergente Darstellung der Null:

$$0 = \sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x), \tag{35}$$

so ist auch

$$0 = \sum_0^\infty a_\nu \Pi_\nu(x) \tag{36}$$

und umgekehrt, da ja die Transmutationen T_1 und T_2 auf Null angewandt wieder die Null ergeben. Setzt man in (36) wieder

$$x = \psi(t), \tag{37}$$

also (vgl. I (3) p. 393)

$$P_\nu(x) = -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t), \tag{38}$$

so erhält man:

$$0 = \sum_0^\infty a_\nu \left(-\frac{c_0}{t^\nu} - \frac{c_1}{t^{\nu-1}} - \cdots - \frac{c_{\nu-1}}{t} - c_\nu + \overline{\mathfrak{P}_\nu(t)} \right) \quad (\omega < |t| < 1+\varrho), \tag{39}$$

wo zur Abkürzung

$$\overline{\mathfrak{P}_\nu(t)} = c_0 \mathfrak{P}_\nu(t) + c_1 \mathfrak{P}_{\nu-1}(t) + \cdots + c_{\nu-1} \mathfrak{P}_1(t) + c_\nu \mathfrak{P}_0(t) \tag{40}$$

gesetzt ist. Sämtliche Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(t)$ und $\overline{\mathfrak{P}_\nu(t)}$ konvergieren für $|t| < 1 + \varrho$ und es existiert eine von t und ν unabhängige Zahl G, so daß

$$\overline{\mathfrak{P}_\nu(t)} < \frac{G}{|1+\varrho'|^\nu} \tag{41}$$

ist, wenn nur $|t| < 1 + \varrho$ und $\varrho' < \varrho$ ist (vgl. I (15) p. 393). Für das Folgende brauchen wir noch, daß sämtliche $\mathfrak{P}_\nu(t)$ kein konstantes Glied besitzen. Dies ergibt sich sofort aus der Gleichung (I (11) p. 392):

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau} = \sum_0^\infty \mathfrak{P}_\nu(t) \tau^\nu. \tag{42}$$

Die linke Seite verschwindet nämlich für irgend ein endliches τ (vom absoluten Betrage $< 1 + \varrho$) und für $t = 0$; (das erste Glied ist gleich Null wegen der im Nenner unendlich werdenden Funktion $\psi(t)$, die zwei andern zerstören sich); die rechte Seite muß daher den Faktor t haben, d. h. jede Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(t)$ beginnt mindestens mit der ersten Potenz von t.

Aus (41) folgt, daß die Reihe $\sum_0^\infty a_\nu \overline{\mathfrak{P}_\nu(t)}$ für $|t| < 1 + \varrho$ absolut konvergiert, so daß man die Reihe auf der rechten Seite von (39) in zwei zerlegen kann und erhält:

$$(43)\quad \sum_0^\infty a_\nu \left(\frac{c_0}{t^\nu} + \frac{c_1}{t^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{t} + c_\nu \right) = \sum_0^\infty a_\nu \overline{\mathfrak{P}_\nu(t)} \quad (\omega < |t| < 1 + \varrho).$$

Die letzte Identität kann aber nur bestehen, wenn sich ihre beiden Seiten auf eine und dieselbe Konstante reduzieren, welche nur Null sein kann, da die rechte Seite für $t = 0$ verschwindet.

Wir haben somit das Resultat:

Besteht für alle x innerhalb C_ω eine der beiden Identitäten:

$$0 = \sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x) \quad \textit{oder} \quad \sum a_\nu \Pi_\nu(x),$$

so gilt auch die andere sowie:

$$(44)\qquad 0 = \sum_0^\infty a_\nu q_\nu(x) \quad \textit{für} \quad |x| < \frac{1}{\omega},$$

wenn

$$(45)\qquad c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu = q_\nu(x)$$

gesetzt wird.

Die a_ν müssen dann jedenfalls die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$(46)\qquad 0 = \sum_0^\infty c_\nu a_\nu, \quad 0 = \sum_1^\infty c_{\nu-1} a_\nu, \cdots, 0 = \sum_p^\infty c_{\nu-k} a_\nu, \cdots.$$

Ehe die weiteren Bedingungen, denen die Koeffizienten a_ν im Falle einer Darstellung der Null $\sum_0^\infty a_\nu q_\nu(x)$ zu genügen haben, untersucht werden, soll gezeigt werden, daß die Nullentwicklung (44) auch die beiden (35), (36) zur Folge hat. Zu diesem Zwecke bilde man mit den Koeffizienten a_ν von (44) (für die $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$ ist) die Reihe $\sum_0^\infty a_\nu \Pi_\nu(x)$, die eine

innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion darstellt; geht man mittels der Substitution (37) wieder in die t-Ebene über, so wird, da die negativen Potenzen von t wegen (46) wegfallen, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \Pi_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \overline{\mathfrak{P}_\nu(t)}$ eine für $|t| < 1 + \varrho$ reguläre und für $t = 0$ verschwindende analytische Funktion von t; da aber jede solche Funktion vermöge der zu (37) inversen Substitution in eine außerhalb $C_{1+\varrho}$ reguläre analytische Funktion von x übergeht, so würde das heißen, daß $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \Pi_\nu(x)$ nicht nur (wie vorausgesetzt) innerhalb, sondern auch auf und außerhalb C_ω regulär, also identisch gleich einer Konstanten ist; letztere kann nur Null sein, da

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \Pi_\nu(x) \underset{x=\infty}{=} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \overline{\mathfrak{P}_\nu(0)} = 0 \text{ ist.}$$

Jede der drei Nullentwicklungen $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \pi_\nu(x)$, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \Pi_\nu(x)$, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu q_\nu(x)$ *zieht daher die beiden anderen nach sich;* ich betrachte deshalb in Kürze nur die letzteren, deren Theorie von Herrn Pincherle*) erledigt ist; trotzdem erlaube ich mir, sie der Vollständigkeit wegen wieder aufzunehmen.

Die Polynome $q_\nu(x)$ sind ein spezieller Fall der $\Pi_\nu(x)$; denn sind die Kurven C_ω Kreise um den Nullpunkt, so wird $P_\nu(x) = -x^\nu$ und $q_\nu(x) = -\Pi_\nu(x)$. Die erzeugende Funktion der $q_\nu(x)$ ist:

$$\frac{1}{1-\tau x}\,\mathfrak{P}(\tau) = \sum_0^\infty{}^\nu \tau^\nu q_\nu(x). \tag{47}$$

Auf Grund der Erwägungen, die zu (33) führten, oder ganz direkt erkennt man, daß

$$\lim_{\nu=\infty} q_\nu(x) = x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{48}$$

ist, solange $|x| > \frac{1}{1+\varrho}$ ist.

Ist daher $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < 1 + \varrho$, so konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu q_\nu(x)$ innerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{\omega}$ und divergiert außerhalb desselben. (Ist $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} > 1 + \varrho$, so versagen die angewandten Schlüsse; es kann dann immer noch die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu q_\nu(x)$ in gewissen Gebieten konvergieren, die

*) a. a. O. Annali di matematica (2) 12, p. 112 ff.

ganz innerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{1+\varrho}$ liegen; doch bedarf es der näheren Untersuchung dieses Falles für unsere Zwecke nicht.)

Ist α_1 die dem absoluten Betrage nach kleinste Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$ und $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < \alpha_1$, so kann die durch $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu q_\nu(x)$ innerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{\omega}$ dargestellte analytische Funktion nicht identisch gleich Null sein. Denn angenommen, es wäre

$$0 \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu q_\nu(x), \tag{49}$$

so multipliziere ich die rechte Seite mit $\frac{1}{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$ und erhalte:

$$0 \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu q_\nu(x) \frac{1}{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}. \tag{50}$$

Nun gilt für $|x| > \frac{1}{|\alpha_1|}$ die Entwicklung:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)} = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \frac{\gamma_3}{x^3} + \cdots \tag{51}$$

mit folgenden Relationen zwischen den Koeffizienten c_ν und γ_ν:

$$\begin{aligned} &\gamma_0 c_0 = 1, \\ &\gamma_0 c_1 + \gamma_1 c_0 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\gamma_0 c_\nu + \gamma_1 c_{\nu-1} + \cdots + \gamma_{\nu-1} c_1 + \gamma_\nu c_0 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{52}$$

Setzt man auf der rechten Seite von (50) für $\frac{1}{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$ die Reihe (51) ein, so erhält man einen für $\left|\frac{1}{\alpha_1}\right| < |x| < \frac{1}{\omega}$ gleichmäßig konvergenten Ausdruck; zu dessen Entwicklung in eine Laurentsche Reihe liefert das ν^{te} Glied $a_\nu q_\nu(x)\left(\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$ den Beitrag $a_\nu x^\nu + \frac{1}{x}\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$, denn die andern Koeffizienten nicht negativer Potenzen von x werden vermöge (52) gleich Null; es muß daher, da eine Laurentsche Reihe nur dann identisch verschwinden kann, wenn ihre sämtlichen Koeffizienten verschwinden: $a_0 = a_1 = \cdots = a_\nu = 0$ sein.

Damit ist gezeigt: *Eine Nullentwicklung* $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu q_\nu(x)$ *oder* $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \Pi_\nu(x)$ *oder* $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \pi_\nu(x)$ *existiert nicht, solange* $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < |\alpha_1|$ *ist.*

Ist dagegen α_i ($|\alpha_i| < 1 + \varrho$) irgend eine Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$, so wird aus (47) für $\tau = \alpha_i$:

$$0 \equiv \sum_0^\infty{}_\nu a_i^\nu q_\nu(x). \tag{53}$$

Wenn α_i eine k_i-fache Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$ ist, so sind für $\tau = \alpha_i$ außer $\frac{1}{1-\tau x} \cdot \mathfrak{P}(\tau)$ auch der $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \cdots, (k_i-1)^{\text{te}}$ nach τ genommene Differentialquotient dieser Funktion gleich Null, also:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_1^\infty{}_\nu \nu \alpha_i^{\nu-1} q_\nu(x), \\
0 &\equiv \sum_2^\infty{}_\nu \nu(\nu-1)\alpha_i^{\nu-2} q_\nu(x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &\equiv \sum_{k_i-1}^\infty{}_\nu \nu(\nu-1)\cdots(\nu-k_i+2)\alpha_i^{\nu-k_i+1} q_\nu(x).
\end{aligned} \tag{54}$$

Natürlich bekommt man weitere Nullentwicklungen, wenn man eine endliche Anzahl der so erhaltenen Entwicklungen mit konstanten Koeffizienten multipliziert und dann addiert. Der Konvergenzbereich ist stets ein Kreis $|x| = \frac{1}{\omega}$ (bez. im Falle der allgemeinen Polynomenreihen $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu \Pi_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu \pi_\nu(x)$ eine Kurve C_ω) und ω ist gleich dem absoluten Betrage einer Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$.

Es soll noch gezeigt werden, daß außer den auf diese Weise erhaltenen weiter keine Darstellungen der Null möglich sind (wobei immer an der Voraussetzung $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1 + \varrho$ festgehalten wird).

Es sei also unter letzterer Annahme

$$0 \equiv \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu q_\nu(x). \tag{55}$$

Man bilde nun mit diesen Koeffizienten a_ν die Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ und das Produkt: $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$*) das für $\frac{1}{\omega} > |x| > \frac{1}{1+\varrho}$ eine reguläre analytische Funktion darstellt. Entwickelt man dieselbe in dem bezeichneten Gebiete in eine Laurentsche Reihe, so werden die Koeffizienten sämtlicher nicht negativen Potenzen von x wegen (46) gleich Null und man erhält:

*) Unter $\mathfrak{P}$ verstehe man in diesem Paragraphen immer die Reihe mit den Koeffizienten c_ν.

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

also

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \frac{\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{für} \quad |x| > \frac{1}{1+\varrho}, \tag{56}$$

d. h. die innerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{\omega}$, um so mehr also innerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{1+\varrho}$ reguläre analytische Funktion $\sum a_\nu x^\nu$ hat außerhalb des ersteren Kreises keine anderen Singularitäten als Pole an Nullstellen von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ und verschwindet im Unendlichen, da der Zähler $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ kein konstantes Glied enthält. Bezeichnet man diese außerhalb des Kreises $|x| = \frac{1}{\omega}$ jedenfalls nur in endlicher Anzahl vorhandenen Nullstellen wieder mit $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots, \frac{1}{\alpha_m}$, so läßt sich, wenn α_i eine k_i-fache Nullstelle ist, die Funktion $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ folgendermaßen in Partialbrüche zerlegen:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \sum_1^m{}^{i}\left(\frac{C_{i1}}{1-\alpha_i x} + \frac{C_{i2}x}{(1-\alpha_i x)^2} + \frac{1\cdot 2\cdot C_{i3}x^2}{(1-\alpha_i x)^3} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots(k_i-1)\,C_{ik_i-1}x^{k_i-1}}{(1-\alpha_i x)^{k_i}}\right), \tag{57}$$

woraus folgt

$$a_\nu = \sum_1^m{}^{i}\left(C_{i1}\alpha_i^\nu + C_{i2}\nu\alpha_i^{\nu-1} + C_{i3}\nu(\nu-1)\alpha_i^{\nu-3} + \cdots + C_{ik_i}\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k_i+2)\alpha_i^{\nu-k_i+1}\right), \text{ w. z. b. w.*)} \tag{58}$$

Damit sind zugleich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gefunden, denen die a_ν genügen müssen, damit die innerhalb C_ω konvergenten Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \Pi_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \pi_\nu(x)$ die Null darstellen.

Um andrerseits eine Funktion $F(x)$, die innerhalb C_ω sich regulär verhält, dagegen auf C_ω mindestens eine singuläre Stelle besitzt, in eine innerhalb C_ω gültige Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \pi_\nu(x)$ $\left(\text{oder speziell } \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \Pi_\nu(x)\right)$ zu entwickeln, erstrecke man das Integral auf der rechten Seite von (8) über eine Kurve K (am einfachsten einen Kreis), die ganz außerhalb des Kreises $|\tau| = \omega$ verläuft, aber so nahe an diesem Kreise, daß in dem

*) Für $\nu < k_i - 1$ sind die Glieder mit negativen Potenzen von α_i wegzudenken.

Ringgebiete zwischen C und dem Kreise keine Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$ liegt. Als Koeffizient a_ν ergibt sich:

$$a_\nu = \int_K F_1(\psi(\tau))\,\tau^{\nu-1}\,\frac{1}{\mathfrak{P}(\tau)}\,d\tau. \tag{59}$$

Andere Entwicklungen $F(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a'_\nu \pi_\nu(x)$ erhält man, wenn man zu der soeben gefundenen noch irgend eine der vorhin ermittelten Nullentwicklungen addiert. Da die Konvergenzgrenzen der Nullentwicklungen Kurven $C_{|\alpha_i|}$ sind (wo die α_i die Nullstellen der Funktion $\mathfrak{P}(\tau)$ bedeuten), so hat die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a'_\nu \pi_\nu(x)$ entweder die gleiche Konvergenzgrenze C_ω wie $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \pi_\nu(x)$, wenn nämlich nur zu Punkten $|\alpha_i| \leqq \omega$ gehörige Nullentwicklungen addiert wurden, oder $\sum_0^\infty {}^\nu a'_\nu \pi_\nu(x)$ hat eine im Innern von C_ω verlaufende Kurve $C_{|\alpha_i|}$ zur Konvergenzgrenze. M. a. W.:

Die Darstellung einer Funktion $F(x)$ durch eine nach Polynomen $\pi_\nu(x)$ fortschreitende Reihe gilt entweder bis zu jener Kurve C_ω, die keine singuläre Stelle von $F(x)$ in ihrem Innern, wohl aber eine solche auf ihrer Begrenzung enthält, oder bis zu einer der Kurven $C_{|\alpha_i|}$.

Liegt daher umgekehrt eine Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \pi_\nu(x)$ vor und ist $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$ keiner der Werte $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots$ so hat die durch die Reihe definierte Funktion auf C_ω mindestens eine singuläre Stelle, und zwar haben dann die *Funktionen* $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu p_\nu(x)$ *und* $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \pi_\nu(x)$ *in gleichen Punkten von* C_ω *Singularitäten genau der gleichen Art.* Zum Beweise unterwerfe ich beide Funktionen der Hadamardschen Transmutation T_1 und zeige, daß die transmutierten Funktionen $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu P_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \Pi_\nu(x)$ in ihren Singularitäten auf C_ω übereinstimmen. Ersetzt man nämlich wieder x durch $\psi(t)$, so geht die erste dieser Funktionen über in $\sum_0^\infty {}^\nu \frac{a_\nu}{t^\nu} + \mathfrak{P}(t)$, die zweite in $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \left(\frac{c_0}{t^\nu} + \frac{c_1}{t^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{t} + c_\nu\right) + \mathfrak{P}_1(t)$. Nun ist die Art der einander entsprechenden Singularitäten von $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu P_\nu(x)$ auf C_ω und von $\sum_0^\infty \frac{a_\nu}{t^\nu}$

auf K_ω die gleiche und zwischen den Singularitäten von $\sum_0^\infty a_\nu \Pi_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty a_\nu \left(\frac{c_0}{t^\nu} + \frac{c_1}{t^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{t} + c_\nu\right)$ besteht derselbe gleiche Zusammenhang. Es bleibt daher nur zu zeigen, daß die Funktionen $\sum_0^\infty \frac{a_\nu}{t^\nu}$ und $\sum_0^\infty a_\nu \left(\frac{c_0}{t^\nu} + \frac{c_1}{t^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{t} + c_\nu\right)$ in der Zahl und der Art ihrer Singularitäten auf K_ω übereinstimmen. Bezeichnet man aber die erste Reihe mit $\Phi(t)$, so ist die zweite gleich $\Phi(t) \cdot \mathfrak{P}(t)$, und da $\mathfrak{P}(t)$ der Voraussetzung nach für $|t| = \omega$ regulär und von Null verschieden ist, so ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen. Des weiteren erkennt man aus dem dargelegten Zusammenhange sofort, daß *auch außerhalb der Kurve C_ω die Funktionen $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ und $\sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x)$ in ihren Singularitäten durchaus übereinstimmen außer in jenen Punkten x_i, die vermöge der Substitution $x = \psi(t)$ den Nullstellen α_i von $\mathfrak{P}(t)$ entsprechen;* letztere Punkte können singuläre Stellen für die Funktion $\sum_0^\infty a_\nu p_\nu(x)$ sein, ohne daß sie es deshalb auch für $\sum_0^\infty a_\nu \pi_\nu(x)$ sein müßten.

§ 4.

Beispiel: Reihen nach Legendreschen Polynomen.

Ein Hauptzweck der vorausgehenden Entwicklungen war weniger, neue und möglichst allgemeine Polynomenfolgen aufzustellen, mit ähnlichen Eigenschaften wie sie die in I gefundenen $P_\nu(x)$ besitzen, als vielmehr durch passende Ergänzungen die dort benutzten Methoden zur funktionentheoretischen Untersuchung von Reihen geeignet zu machen, die nach längst bekannten und in der Analysis eine wichtige Rolle spielenden Polynomen fortschreiten. Es sei daher zum Schlusse gestattet, die allgemeinen Ergebnisse auf die Legendreschen Polynome als Beispiel anzuwenden.

Wenn die Kurven C_ω konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 sind, dann lautet die Substitution, die das Äußere dieser Ellipsen in der z-Ebene auf das Innere von Kreisen der τ-Ebene abbildet:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varrho}{\tau} + \frac{\tau}{1+\varrho}\right), \tag{60}$$

und zwar entspricht, in Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen,

dem Kreise $|\tau| = 1 + \varrho$ die in die Strecke $-1, +1$ ausgeartete Ellipse; um aber nicht immer den Faktor $(1+\varrho)$ schreiben zu müssen, setze ich $\frac{\tau}{1+\varrho} = \tau'$, also

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau'} + \tau'\right). \tag{61}$$

Als Funktion $f_2\left(\frac{x}{z}\right)$ wähle ich

$$\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right) + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{x}{z}\right)^3 + \cdots.$$

Dann geht aus der Funktion $F(z) = \sum_0^\infty b_\nu z^\nu$ durch die Transmutation T_1 die Funktion $F_1(z) = \sum_0^\infty b_\nu \frac{2^\nu \nu!}{1\cdot 3\cdot\ \cdot(2\nu-1)} z^\nu$ hervor. Wenn nun $F(z)$ innerhalb der Ellipse C_ω regulär ist, so gilt für $\omega' < \omega$:

$$F(z) = \underbrace{\int}_{C_{\omega'}} \frac{F_1(z)}{z\sqrt{1-\frac{x}{z}}}\, dz = \underbrace{\int}_{K_{\omega'}} \frac{F_1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau'}+\tau'\right)\right)}{\tau'\sqrt{1-2\tau' x+\tau'^2}} \cdot \frac{\tau'^2-1}{\sqrt{1+\tau'^2}}\, d\tau' \tag{62}$$

$$= \sum_0^\infty a'_\nu p_\nu(x)$$

innerhalb C_ω, wobei

$$a'_\nu = \underbrace{\int}_{K_{\omega'}} F_1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau'}+\tau'\right)\right)\tau'^{\nu-1}\, d\tau' \tag{63}$$

ist. Die erzeugende Funktion der Polynome $p_\nu(x)$ ist in diesem Beispiel folgende:

$$\chi(x,\tau') = \frac{\tau'^2-1}{\tau'\sqrt{1+\tau'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2\tau' x+\tau'^2}} = -\frac{1}{\tau'} + \sum_0^\infty p_{\nu+1}(x)\tau'^\nu.$$

Wählt man für die in § 3 (30) mit $\mathfrak{P}(\tau)$ bezeichnete Potenzreihe diejenige für $\frac{\sqrt{1+\tau'^2}}{\tau'^2-1}$ so erhält man die Legendreschen Polynome X_ν als die an jener Stelle mit $\pi_\nu(x)$ bezeichneten, sowie die Darstellung

$$F(x) = \sum_0^\infty a_\nu X_\nu, \tag{64}$$

wobei

$$a_\nu = \underbrace{\int}_{K_{\omega'}} \frac{F_1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau'}+\tau'\right)\right)}{\tau'\sqrt{1+\tau'^2}}(\tau'^2-1)\, d\tau'. \tag{65}$$

Die hier benutzte Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau)$ hat offenbar keine Nullstelle, für die $|\tau'| < 1$, also $|\tau| < 1 + \varrho$ wäre. Alle mit dem Auftreten solcher Nullstellen zusammenhängenden Komplikationen (insbesondere die Möglichkeit von Nullentwicklungen) fallen daher fort, und indem wir die in § 3 bezüglich der Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \pi_\nu(x)$ gewonnenen Resultate auf den vorliegenden Fall anwenden, gelangen wir zu folgender Aussage:

Jede innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 *reguläre analytische Funktion* $F(x)$ *gestattet daselbst eine Darstellung durch eine Reihe*

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu X_\nu, \tag{66}$$

für welche $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ *eine Zahl* $\omega < 1$ *ist; setzt man* $x = \xi + i\eta$, *so reicht die Konvergenz bis zu der Ellipse, deren Gleichung ist:* $\frac{4\xi^2}{\left(\frac{1}{\omega} + \omega\right)^2} + \frac{4\eta^2}{\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right)^2} = 1$;

außerhalb dieser Ellipse findet Divergenz statt, auf ihr liegt mindestens eine singuläre Stelle von $F(x)$. *Sämtliche*) auf und außerhalb der Konvergenzgrenze gelegenen singulären Punkte* β *von* $F(x)$ *findet man aus den singulären Stellen* α *der Funktion* $\Phi(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ *durch die Substitution*

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right). \tag{67}$$

Die Art der Singularität α *ist die gleiche wie die Art der Singularität* β *derjenigen Funktion* $F_1(x)$, *die aus* $F(x)$ *durch die Transmutation hervorgeht, die aus der Ersetzung von* x^ν *durch* $x^\nu \frac{2^\nu \cdot \nu!}{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}$ *besteht.*

Karlsruhe, Juni 1906.

---

*) Freilich bezieht sich diese Aussage nur auf jene Singularitäten, die in irgend einem endlichen Punkt auf dem *ersten* Blatt der Riemannschen Fläche für die möglicherweise unendlich vieldeutige Funktion $F(x)$ liegen. Man vgl. auch in diesem Zusammenhang: Faber: Über Reihen nach Legendreschen Polynomen (Jahresber. d. D. Math.-Ver. 1907) u. Bemerkungen zu einem funktionentheoretischen Satze des Hrn. Hadamar (ebenda).

Über eine Klasse von nichtanalytischen Flächen konstanter positiver Gaußscher Krümmung.*)

Von

G. Prasad in Benares, Indien.

Der Zweck der vorliegenden Zeilen ist, eine Klasse von nichtanalytischen Flächen konstanter positiver Gaußscher Krümmung zu finden. Meine Methode besteht darin, zuerst eine nichtanalytische Lösung U von

$$U_{uu} + U_{vv} = 0$$

aufzustellen, und dann daraus durch die Picardsche Methode der sukzessiven Approximationen eine nichtanalytische Lösung V von

$$V_{uu} + V_{vv} = - \mathfrak{Sin}\, V$$

herzuleiten: die Fundamentalgrößen

$$E = \mathfrak{Sin}^2 \varrho, \quad F = 0, \quad G = \mathfrak{Cof}^2 \varrho,$$
$$D = D' = \mathfrak{Sin}\, \varrho\, \mathfrak{Cof}\, \varrho, \quad D' = 0,$$

wo $2\varrho = V$ ist, definieren eine Fläche der verlangten Art. Vielleicht darf ich hier erwähnen, daß die vorliegende Arbeit und zwei frühere**) die bisherigen Resultate einer Untersuchung enthalten, die ich auf Anregung Herrn Hilberts, meines hochverehrten Lehrers, unternahm.

a. Nichtanalytische Lösung von $U_{uu} + U_{vv} = 0$.

1. Bezeichne γ ein Gebiet, das durch die Geraden

$$u = -b, \quad u = b,$$
$$v = \quad 0, \quad v = a > 0$$

*) Unter einer nichtanalytischen Fläche verstehe ich eine Fläche, welche nicht eine analytische Fläche im Sinne von Herrn Hilbert (Grundlagen der Geometrie, S. 163) ist.

**) „Über den Begriff der Krümmungslinien“ (Göttinger Nachrichten, Heft 3, 1904); „Über die Hilbertschen Sätze in der Theorie der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung“ (Math. Ann. Bd. 61).

begrenzt ist, dann ist eine in dem Gebiete γ mit Einschluß des Randes nichtanalytische Lösung U von

$$U_{uu} + U_{vv} = 0$$

folgendermaßen definiert:

$$U = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \alpha_m e^{-mv} \cos mu,$$

wo

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(u') \cos mu' du';$$

hierin ist

$$f(u) = f(-u),$$

und für $u \geqq 0$ ist

$$f(u) = \sum_1^\infty \frac{\varphi(u - \bar{\omega}_r)}{r^2},$$

wo

$$\varphi(0) = 0$$

und für $p \neq 0$

$$\varphi(p) = p^4 \cos \frac{1}{p}$$

ist; ferner ist $\{\bar{\omega}_r\}$ die Menge der rationalen echten Brüche.

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, brauchen wir nur den Fall eingehend in Betracht zu ziehen, in dem $v = 0$ ist, weil es ganz klar ist, daß für $v > 0$

$$U_{vv} = \sum_1^\infty m^2 \alpha_m e^{-mv} \cos mu = - U_{uu}$$

ist: es wird genügen zu zeigen, daß

$$\operatorname{Lim}_{v=+0} U_{vv}(u, v) = - U_{uu}(u, 0)$$

ist, weil nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze $\operatorname{Lim}_{v=+0} U_{vv}(u, v)$ gleich der Derivierten von $U_v(u, v)$ nach v in dem Punkte $(u, 0)$ sein muß.

Es ist leicht zu sehen, daß in der Nähe von $v = 0$ U_{vv} sich wie

$$- \frac{\operatorname{Sin} v}{\pi} \int_0^\sigma \frac{M(u, u')\, du'}{\operatorname{Cof} v - \cos u'}$$

verhält, wo

$$M(u, u') = \frac{f''(u + u') + f''(u - u')}{2}$$

ist und σ eine beliebig kleine Konstante bedeutet. Hieraus folgt sofort, daß

$$\operatorname{Lim}_{v=+0} U_{vv}(u, v) = - \operatorname{Lim}_{u'=+0} M(u, u')$$

ist, wenn dieser letzte Limes existiert: also in jedem Punkte, dessen u-Koordinate nicht zu $\{\varpi_r\}$ gehört, ist

$$\lim_{v=+0} U_{vv}(u, v) = -f''(u) = -U_{uu}(u, 0);$$

ferner setzen wir

$$M_1(\varpi_r, u') = M(\varpi_r, u') + \frac{1}{r^2}\cos\frac{1}{u'},$$

dann ist, für $u = \varpi_r$,

$$\lim_{v=+0} U_{vv}(u, v) = -\lim_{u'=+0} M_1(u, u') + \lim_{v=+0}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\pi r^2}\int_0^{\sigma}\frac{\cos\frac{1}{u'}\,du'}{\mathfrak{Cof}\, v - \cos u'}\right)$$

$$= -f''(u) + \lim_{v=+0}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\pi r^2}\int_0^{\sigma}\frac{\cos\frac{1}{u'}\,du'}{\mathfrak{Cof}\, v - \cos u'}\right).$$

Nun ist leicht zu sehen, daß

$$\left|\int_0^{\sigma}\frac{\cos\frac{1}{u'}\,du'}{\mathfrak{Cof}\, v - \cos u'}\right| < \frac{2\sigma^2}{\mathfrak{Cof}\, v - \cos\sigma}$$

ist; hieraus entnehmen wir, daß

$$\lim_{v=+0}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\, v}{\pi r^2}\int_0^{\sigma}\frac{\cos\frac{1}{u'}\,du'}{\mathfrak{Cof}\, v - \cos u'}\right) = 0$$

ist, und damit ist bewiesen, daß für alle Werte von u

$$\lim_{v=+0} U_{vv}(u, v) = -U_{uu}(u, 0).$$

2. Auf Grund der obigen Ausführungen dürfen wir für die Punkte des Gebietes γ (den Rand eingeschlossen) die folgenden Tatsachen aussprechen:

(I) In allen Punkten sind U_u, U_v, U_{uu}, U_{vv} vorhanden; ferner sind die oberen Grenzen von

$$|U|,\ |U_u|,\ |U_v|,\ |U_{uu}|,\ |U_{vv}|$$

kleiner als eine bestimmte endliche Konstante.

(II) In allen Punkten sind U, U_u, U_v kontinuierlich in (u, v).

(III) In allen Punkten, mit Ausnahme der Punkte der Menge $\{(\varpi_r, 0)\}$,

sind U_{uu}, U_{vv} kontinuierlich in (u, v); in jedem Punkte $(\varpi_r, 0)$ hat U_{uu} sowie U_{vv} eine Diskontinuität in bezug auf u.

(IV) In allen Punkten ist

$$U_{uu} + U_{vv} = 0.$$

b. Nichtanalytische Lösung von $V_{uu} + V_{vv} = -\operatorname{Sin} V$.

3. Nehmen wir an, daß a und b genügend klein sind, dann ist eine nichtanalytische Lösung V von

$$V_{uu} + V_{vv} = -\operatorname{Sin} V$$

in dem Gebiete γ mit Einschluß des Randes R folgendermaßen definiert:

$$V = U + \sum_{2}^{\infty} v_n,$$

wo, mit bekannten Bezeichnungen,

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int\int \operatorname{Sin} U\, G(u, v, u', v')\, du'\, dv'$$

und, für $n > 2$,

$$v_n = \frac{1}{2\pi}\int\int \{\operatorname{Sin}(U+v_2+\cdots+v_{n-1}) - \operatorname{Sin}(U+v_2+\cdots+v_{n-2})\}\, G(u,v,u',v')du'dv'$$

ist.

Die Picardsche Methode der sukzessiven Approximationen ist so wohl bekannt*), daß es nicht nötig ist, einen eingehenden Beweis der obigen Aussage hier zu geben. Es genügt zu bemerken, daß, wegen der Aussage (II) des § 2, die folgenden Gleichungen, die der Picardschen Methode zugrunde liegen, gültig sind, wenn $f(u', v')$ gleich

$\operatorname{Sin} U$ oder $\{\operatorname{Sin}(U + v_2 + \cdots + v_{n-1}) - \operatorname{Sin}(U + v_2 + \cdots + v_{n-2})\}$

gesetzt wird:

$$\varphi_u = \int\int f(u', v')\, \frac{\partial G}{\partial u}\, du'\, dv',$$

$$\varphi_v = \int\int f(u', v')\, \frac{\partial G}{\partial v}\, du'\, dv',$$

$$\varphi_{uu} = \int_R f(u', v')\, \frac{\partial}{\partial u} \log\frac{1}{r} \cos\alpha\, ds + \int\int \frac{\partial f}{\partial u'}\, \frac{\partial}{\partial u} \log\frac{1}{r}\, du'\, dv' + \int\int f(u', v')\, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\, du'\, dv',$$

$$\varphi_{vv} = \int_R f(u', v')\, \frac{\partial}{\partial v} \log\frac{1}{r} \sin\alpha\, ds + \int\int \frac{\partial f}{\partial v'}\, \frac{\partial}{\partial v} \log\frac{1}{r}\, du'\, dv' + \int\int f(u', v')\, \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\, du'\, dv',$$

*) Picard, „Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives“ (Journal de Mathématiques, 1890), insbesondere Kapitel I; Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A 7 c (Sommerfeld) Nr. 5.

wo

$$\varphi = \iint f(u', v')\, G(u, v, u', v')\, du'\, dv'$$

ist, α den Winkel zwischen der nach innen gerichteten Normale und der u-Achse bedeutet, und g durch die Gleichung

$$g = G - \log \frac{1}{r}$$

definiert ist.

4. Nehmen wir an, daß a und b genügend klein sind, dann dürfen wir auf Grund der obigen Ausführungen die folgenden Ergebnisse aussprechen, welche für die Punkte des Gebietes γ (den Rand eingeschlossen) gelten:

(I) Die Behauptungen (I), (II), (III) des § 2 bleiben gültig, wenn V an Stelle von U gesetzt wird.

(II) In allen Punkten ist

$$V_{uu} + V_{vv} = - \operatorname{Sin} V.$$

c. Schluß.

5. Trotz der Diskontinuität von V_{uu}, V_{vv}, kann man in der bekannten Weise*) beweisen, daß die Fundamentalgrößen

$$E = \operatorname{Sin}^2 \varrho, \quad F = 0, \quad G = \operatorname{Cos}^2 \varrho,$$
$$D = D'' = \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Cos} \varrho, \quad D' = 0,$$

wo 2ϱ gleich V ist, eine Fläche F definieren, welche überall die konstante positive Gaußsche Krümmung $+1$ hat. Aber diese Fläche ist nicht eine analytische Fläche; denn in keinem Punkte $(\varpi_r, 0)$ ist es möglich, die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y, z so zu legen, daß die Gleichung der Fläche in der Umgebung dieses Punktes wie folgt lautet:

$$z = ax^2 + by^2 + P(x, y),$$

wo a, b Konstanten sind und die Potenzreihe $P(x, y)$ nur Glieder dritter oder höherer Dimension in x, y enthält.

Damit ist die Existenz einer nichtanalytischen Fläche konstanter positiver Gaußscher Krümmung $+1$ vollständig bewiesen.

Es bleibt nur noch zu bemerken übrig, daß F zu einer Klasse von nichtanalytischen Flächen konstanter positiver Gaußscher Krümmung $+1$ gehört und daß die allgemeine Fläche F_m dieser Klasse folgendermaßen definiert ist:

*) Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Bd. 1, S. 120—125; Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, S. 321—341.

Setzen wir, in der Definition von U,

$$\varphi(p) = p^{4+2m} \cos \frac{1}{p^{1+m}} \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

an Stelle von

$$\varphi(p) = p^4 \cos \frac{1}{p},$$

dann erhalten wir eine nichtanalytische Lösung U_m der Potentialgleichung; und F_m ist die Fläche, die dieser Lösung genau in derselben Weise entspricht, wie F der Lösung U.

Benares, den 5. Juli 1906.

Über die Anziehung eines homogenen Ellipsoids.

Von

J. O. Müller in Göttingen.

Um die Anziehung eines homogenen Ellipsoids von der Dichte 1 auf einen inneren und auf einen äußeren Punkt zu ermitteln, sind die verschiedensten Wege eingeschlagen worden.*) Von Dirichlet stammen zwei Methoden: die eine ist eine wirkliche Ableitung und beruht auf der Anwendung des diskontinuierlichen Faktors, die andere gibt einen sehr einfachen Weg an, die fertigen Ausdrücke als Potentiale des Ellipsoids zu verifizieren.**) Man hat nämlich nur für das innere und das äußere Potential V_i und V_a des Ellipsoids die bekannten charakteristischen Eigenschaften des Potentials räumlich verteilter Massen nachzuweisen, die sich in unserm Falle wie folgt aussprechen lassen:

I. Die Funktion V_i und ihre ersten Ableitungen nach den Koordinaten sind stetig im Innern, die Funktion V_a und ihre ersten Ableitungen sind stetig im Äußern des betrachteten Ellipsoids.

II. Die Funktion V_a verschwindet im Unendlichen und wenn R die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkte des Ellipsoids bezeichnet, so ist $R^2 \frac{\partial V_a}{\partial l}$ endlich für $R = \infty$, wo $\frac{\partial V_a}{\partial l}$ die Ableitung von V_a nach einer beliebigen Richtung l bedeutet.

III. Die Funktion V_i genügt im Innern der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta V_i = -4\pi$.

IV. Die Funktion V_a genügt im Äußeren der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V_a = 0$.

V. An der Oberfläche des Ellipsoids stimmen sowohl die Funktionen V_i und V_a wie ihre ersten Ableitungen nach den Koordinaten überein.

*) Außer auf die bekannten Arbeiten von Laplace, Ivory, Gauß, Chasles und Dirichlet, die in Nr. 19 von „Ostwalds Klassikern“ vereinigt vorliegen, mache ich noch auf die Behandlung dieses Gegenstandes in Heines „Handbuch der Kugelfunktionen“ (II. Bd., § 76) und in Halphens „Traité des fonctions elliptiques“ (II. Bd. Kap. 12) aufmerksam.

**) Crelles Journal, XXXII, pag. 80.

Im folgenden werden wir sehen, wie man aus der Dirichletschen *Verifikation* eine *Ableitung* machen kann, indem man die unter III und IV genannten partiellen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen I, II und V integriert und zwar mit Hilfe von Reihenentwicklungen nach Laméschen Produkten.*) Unser Verfahren, das ganz wesentlich auf der Möglichkeit und der Eindeutigkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion zweier Argumente nach Ellipsoidflächenfunktionen beruht, besteht also in einer einfachen Koeffizientenbestimmung und erhebt auf Kunst keinen Anspruch. Eine formale Umformung der erhaltenen Integrale liefert dann die Dirichletschen Ausdrücke für V_i und V_a.

Zunächst erinnere ich nur an einige bekannte Definitionen und Sätze der Geometrie und Potentialtheorie.

1. Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \qquad \Phi(\lambda) \equiv \Phi(x, y, z; \lambda) \equiv \frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda + c^2} - 1,$$

wo $a^2 < b^2 < c^2$ sein möge, so stellt die Gleichung $\Phi = 0$ ein *konfokales System von Flächen zweiten Grades* dar. Genügen die Zahlen ϱ, μ, ν den Ungleichungen

$$-c^2 < \nu < -b^2 < \mu < -a^2 < \varrho,$$

so repräsentiert die Gleichung

$\Phi(x, y, z; \varrho) = 0$ eine Schar von Ellipsoiden (ϱ),

$\Phi(x, y, z; \mu) = 0$ eine Schar von einschaligen Hyperboloiden (μ),

$\Phi(x, y, z; \nu) = 0$ eine Schar von zweischaligen Hyperboloiden (ν).

Eine besondere Rolle werden ein gewisses einschaliges Hyperboloid (μ_0) und ein gewisses zweischaliges (ν_0) spielen, welche den Gleichungen

$$(2) \qquad \Delta\Phi(x, y, z; \mu_0) = 0, \qquad \Delta\Phi(x, y, z; \nu_0) = 0$$

genügen. Aus dieser Definition von μ_0 und ν_0 folgt ohne weiteres die Gleichung

$$(2') \qquad 3\mu_0\nu_0 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,$$

die später gebraucht werden wird. Endlich gilt die Jacobische Identität**):

$$(3) \qquad \Phi(x, y, z; \lambda) = -\frac{(\lambda - \varrho)(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)} \equiv \Psi(\varrho, \mu, \nu; \lambda).$$

---

*) Auch Heine und Halphen benutzen in den zitierten Abschnitten ihrer Werke zur Ableitung von V_i und V_a die Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten, doch handelt es sich da nicht um eine direkte Integration der Differentialgleichungen, sondern um die Umformung der dreifachen Integrale, durch welche V_i und V_a ursprünglich definiert sind.

**) C. G. J. Jacobis Vorlesungen über Dynamik, 26. Vorlesung.

2. Unter den Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta U = 0 \tag{4}$$

gibt es ganze rationale Funktionen L von x, y, z, die bei Einführung der elliptischen Koordinaten ϱ, μ, ν die Form

$$L = \varphi(\varrho) \cdot \varphi(\mu) \cdot \varphi(\nu) \tag{5}$$

haben und „Lamésche Polynome“ heißen.*) Es gibt deren $2n+1$ vom Grade n in x, y, z. Wir wollen sie mit

$$L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, \cdots, L_n^{(2n+1)}$$

bezeichnen und die zugehörigen φ mit

$$\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \cdots, \varphi_n^{(2n+1)}.$$

Mit Hilfe der soeben genannten Jacobischen Identität bilden wir leicht einige der ersten L und φ, die wir später explizite brauchen werden. So ist z. B.

$$[(\lambda + a^2)\Phi(x, y, z; \lambda)]_{\lambda = -a^2} = x^2 = \frac{(\varrho + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

also

$$x = \frac{\sqrt{\varrho + a^2}\sqrt{\mu + a^2}\sqrt{\nu + a^2}}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}},$$

d. h. x stellt sich in der Form (5) dar und genügt außerdem der Differentialgleichung (4), ist somit ein Lamésches Polynom ersten Grades. Das Entsprechende gilt für y und z. Ferner ist nach der Jacobischen Identität:

$$\Phi(x, y, z; \mu_0) = \frac{(\varrho - \mu_0)(\mu - \mu_0)(\nu - \mu_0)}{(\mu_0 + a^2)(\mu_0 + b^2)(\mu_0 + c^2)},$$

$$\Phi(x, y, z; \nu_0) = \frac{(\varrho - \nu_0)(\mu - \nu_0)(\nu - \nu_0)}{(\nu_0 + a^2)(\nu_0 + b^2)(\nu_0 + c^2)},$$

die Bedingung (5) ist also für diese beiden Ausdrücke erfüllt und nach den Gleichungen (2) auch die Bedingung (4). Wir haben somit in

$$\Phi(x, y, z; \mu_0) \quad \text{und} \quad \Phi(x, y, z; \nu_0)$$

zwei neue Lamésche Polynome und zwar Polynome zweiten Grades. Nehmen wir noch das Lamésche Polynom nullten Grades $L_0 = 1$ hinzu, so können wir die folgenden sechs L samt den zugehörigen φ tabellarisch aufführen**):

*) Man vergleiche hierzu z. B. das sechste und siebente Kapitel in Poincarés Vorlesungen „Figures d'équilibre d'une masse fluide“.

**) Bei den L sind gewisse konstante Faktoren weggelassen, auf die es hier nicht ankommt.

$$(6)\quad \begin{cases} L_0 = 1; \quad L_1^{(1)} = x; \quad L_1^{(2)} = y; \quad L_1^{(3)} = z; \\ \qquad\qquad L_2^{(1)} = \Phi(x, y, z; \mu_0); \; L_2^{(2)} = \Phi(x, y, z; \nu_0); \\ \varphi_0(\lambda) = 1; \; \varphi_1^{(1)}(\lambda) = \sqrt{\lambda + a^2}; \; \varphi_1^{(2)}(\lambda) = \sqrt{\lambda + b^2}; \; \varphi_1^{(3)}(\lambda) = \sqrt{\lambda + c^2}; \\ \qquad\qquad \varphi_2^{(1)}(\lambda) = \lambda - \mu_0; \quad \varphi_2^{(2)}(\lambda) = \lambda - \nu_0. \end{cases}$$

Die $\varphi_n^{(k)}(\lambda)$ heißen „Lamésche Funktionen erster Art“. Sie genügen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die n als Parameter enthält, der sogenannten Laméschen Differentialgleichung. Zu jeder Laméschen Funktion erster Art $\varphi_n^{(k)}(\lambda)$ gehört eine „Lamésche Funktion zweiter Art“ $\psi_n^{(k)}(\lambda)$, die durch die Gleichung

$$(7)\qquad \psi_n^{(k)}(\lambda) = \frac{2n+1}{2}\, \varphi_n^{(k)}(\lambda) \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\varphi_n^{(k)}(\lambda)^2 \sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}$$

definiert wird und die derselben Laméschen Differentialgleichung genügt wie $\varphi_n^{(k)}(\lambda)$. Die Produkte

$$\Lambda_n^{(k)} = \psi_n^{(k)}(\varrho) \cdot \varphi_n^{(k)}(\mu)\, \varphi_n^{(k)}(\nu)$$

erfüllen ebenso wie die Laméschen Polynome die Differentialgleichung (4), nur sind sie keine ganzen rationalen Funktionen in x, y, z. Beide Klassen von Produkten bezeichnet man mit dem Namen „Lamésche Produkte“.

Außer diesen aus drei Faktoren gebildeten Produkten $L_n^{(k)}$ und $\Lambda_n^{(k)}$ sind noch die aus zwei Faktoren bestehenden Produkte

$$\mathfrak{L}_n^{(k)} = \varphi_n^{(k)}(\mu) \cdot \varphi_n^{(k)}(\nu)$$

zu erwähnen, welche man „Ellipsoidflächenfunktionen“ nennen kann, da sie für das Ellipsoid dieselbe Rolle spielen wie die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen für die Kugel. Speziell gilt in bezug auf sie der Satz, daß sich eine willkürliche*) Funktion $f(\mu, \nu)$ in eindeutiger Weise in eine Reihe

$$f(\mu, \nu) = \sum \gamma_n^{(k)}\, \mathfrak{L}_n^{(k)}$$

entwickeln läßt.**) Auf diesen Umstand gründet sich die Lösung des inneren und des äußeren Randwertproblems der Gleichung $\Delta U = 0$ für ein vorgegebenes Ellipsoid mit Hilfe der Laméschen Produkte L und Λ. Wir führen nur das Resultat an. Sei $\varrho = 0$ das Ellipsoid unserer konfokalen Schar, für welches das Randwertproblem zu lösen ist, d. h. auf diesem Ellipsoid seien die Werte von U als Funktion von μ und ν vor-

*) Die Einschränkungen für die Willkürlichkeit sind dieselben wie in der Theorie der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen.

**) Die Summen Σ sind hier und im folgenden zu bilden für $k = 1, 2, \cdots, 2n+1$ und $n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$.

geschrieben.*) Wir denken uns diese Funktion $\overline{U}$ in eine Reihe nach Ellipsoidflächenfunktionen entwickelt in der Form

$$\overline{U} = \sum \alpha_n^{(k)} \varphi_n^{(k)}(0)\, \psi_n^{(k)}(0)\, \mathfrak{L}_n^{(k)}(\mu, \nu). \tag{8}$$

Dann wird das innere Randwertproblem gelöst durch die Funktion

$$U_i = \sum \alpha_n^{(k)} \psi_n^{(k)}(0)\, L_n^{(k)}(\varrho, \mu, \nu) \tag{9}$$

und das äußere Randwertproblem durch die Funktion

$$U_a = \sum \alpha_n^{(k)} \varphi_n^{(k)}(0)\, \Lambda_n^{(k)}(\varrho, \mu, \nu). \tag{10}$$

Wir wollen nicht unterlassen, an dieser Stelle ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, daß sich die durch die letzte Gleichung definierte Funktion U_a im Unendlichen „regulär" verhält, d. h. die Bedingung II der Einleitung erfüllt, wie das schon im Begriff des äußeren Randwertproblems enthalten ist.

3. Die Entwicklung der speziellen Funktion $(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)$ nach Ellipsoidflächenfunktionen lautet

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) = \varphi_2^{(1)}(\lambda)\varphi_2^{(2)}(\lambda) + \frac{\varphi_2^{(2)}(\lambda)}{\mu_0 - \nu_0}\mathfrak{L}_2^{(1)}(\mu, \nu) + \frac{\varphi_2^{(1)}(\lambda)}{\nu_0 - \mu_0}\mathfrak{L}_2^{(2)}(\mu, \nu). \tag{11}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung in den von μ und ν unabhängigen Faktor

$$\frac{\lambda - \varrho}{(\lambda - \mu_0)(\lambda - \nu_0)}$$

erhalten wir

$$\frac{(\lambda - \varrho)(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(\lambda - \mu_0)(\lambda - \nu_0)} = \omega(\lambda) - \omega(\varrho),$$

wo

$$\omega(\lambda) = \lambda - \frac{L_2^{(1)}(\varrho, \mu, \nu)}{(\mu_0 - \nu_0)\varphi_2^{(1)}(\lambda)} - \frac{L_2^{(2)}(\varrho, \mu, \nu)}{(\nu_0 - \mu_0)\varphi_2^{(2)}(\lambda)}$$

gesetzt wird und somit

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{(\lambda - \varrho)(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(\lambda - \mu_0)(\lambda - \nu_0)} = \omega'(\lambda) = 1 + \frac{L_2^{(1)}(\varrho, \mu, \nu)}{(\mu_0 - \nu_0)\varphi_2^{(1)}(\lambda)^2} + \frac{L_2^{(2)}(\varrho, \mu, \nu)}{(\nu_0 - \mu_0)\varphi_2^{(2)}(\lambda)^2}, \tag{12}$$

eine Formel, die uns später eine umständliche Rechnung ersparen wird.

4. Die gesuchten Anziehungspotentiale V_i und V_a stimmen nach Bedingung V auf der Oberfläche des Ellipsoids $\varrho = 0$ überein. Es sei dort

$$\overline{V}_i = \overline{V}_a = \pi \varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0) \sum \alpha_n^{(k)} \varphi_n^{(k)}(0)\, \psi_n^{(k)}(0)\, \mathfrak{L}_n^{(k)}(\mu, \nu)$$

ihre Entwicklung nach Ellipsoidflächenfunktionen. Nach (10) ist daher

$$V_a = \pi \varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0) \sum \alpha_n^{(k)} \varphi_n^{(k)}(0)\, \Lambda_n^{(k)}(\varrho, \mu, \nu). \tag{13}$$

Für das innere Potential V_i ist dagegen die Gleichung (9) nicht ohne weiteres

*) Den Umstand, daß eine Funktion F für $\varrho = 0$ zu betrachten ist, deuten wir immer dadurch an, daß wir $\overline{F}$ schreiben.

anwendbar, weil es ja nicht der Laplaceschen sondern der Poissonschen Gleichung genügt. Da wir aber — mit Rücksicht auf (2′) — in der Funktion

$$-\frac{2}{3}\pi\frac{a^2b^2c^2}{\mu_0\nu_0}\Phi(x,y,z;0)$$

ein Integral der Gleichung III besitzen, welches auf dem Ellipsoide $\varrho=0$ überall verschwindet, stellt sich V_i in der Form

$$(14)\quad V_i=-\frac{2}{3}\pi\frac{a^2b^2c^2}{\mu_0\nu_0}\Phi(x,y,z;0)+\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\psi_n^{(k)}(0)L_n^{(k)}(\varrho,\mu,\nu)$$

dar. Indem wir vorläufig die Konvergenz dieser Reihenentwicklungen voraussetzen, haben wir also durch (13) und (14) die Bedingungen I, II, III, IV und die erste Hälfte von V befriedigt. Auch die Ableitungen von V_i und V_a nach μ und ν stimmen schon von selbst überein. Es bleibt also nur noch übrig, die Koeffizienten $\alpha_n^{(k)}$ so zu bestimmen, daß auch

$$\frac{\partial V_i}{\partial\varrho}=\frac{\partial V_a}{\partial\varrho}$$

ist. Zu diesem Zwecke berechnen wir diese beiden Ausdrücke. Nach (3) ist

$$\frac{\partial\Phi(x,y,z;0)}{\partial\varrho}=\frac{\mu\nu}{a^2b^2c^2},$$

also wird mit Rücksicht auf (11)

$$(15)\quad \frac{\partial V_i}{\partial\varrho}=-\frac{2}{3}\pi\frac{1}{\mu_0\nu_0}\Big[\mu_0\nu_0-\frac{\nu_0}{\mu_0-\nu_0}\mathfrak{L}_2^{(1)}(\mu,\nu)-\frac{\mu_0}{\nu_0-\mu_0}\mathfrak{L}_2^{(2)}(\mu,\nu)\Big]$$
$$+\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\psi_n^{(k)}(0)\frac{d\varphi_n^{(k)}(\varrho)}{d\varrho}\mathfrak{L}_n^{(k)}(\mu,\nu).$$

Und weiter haben wir

$$\frac{\partial V_a}{\partial\varrho}=\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{d\psi_n^{(k)}(\varrho)}{d\varrho}\mathfrak{L}_n^{(k)}(\mu,\nu),$$

oder, da nach (7)

$$\frac{d\psi_n^{(k)}(\varrho)}{d\varrho}=\frac{\psi_n^{(k)}(\varrho)}{\varphi_n^{(k)}(\varrho)}\frac{d\varphi_n^{(k)}(\varrho)}{d\varrho}+\frac{2n+1}{2}\frac{1}{\varphi_n^{(k)}(\varrho)\,\varphi_1^{(1)}(\varrho)\,\varphi_1^{(2)}(\varrho)\,\varphi_1^{(3)}(\varrho)}$$

ist,

$$(16)\quad \frac{\partial V_a}{\partial\varrho}=\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\varphi_n^{(k)}(0)\Big[\frac{\psi_n^{(k)}(\varrho)}{\varphi_n^{(k)}(\varrho)}\frac{d\varphi_n^{(k)}(\varrho)}{d\varrho}$$
$$+\frac{2n+1}{2}\frac{1}{\varphi_n^{(k)}(\varrho)\,\varphi_1^{(1)}(\varrho)\,\varphi_1^{(2)}(\varrho)\,\varphi_1^{(3)}(\varrho)}\Big]\mathfrak{L}_n^{(k)}(\mu,\nu).$$

Daher lautet die Gleichung

$$\frac{\partial V_i}{\partial\varrho}=\frac{\partial V_a}{\partial\varrho}$$

nunmehr:

$$-\frac{2}{3}\pi\frac{1}{\mu_0\nu_0}\Big[\mu_0\nu_0-\frac{\nu_0}{\mu_0-\nu_0}\mathfrak{Q}_2^{(1)}(\mu,\nu)-\frac{\mu_0}{\nu_0-\mu_0}\mathfrak{Q}_2^{(2)}(\mu,\nu)\Big]$$
$$+\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\psi_n^{(k)}(0)\frac{\overline{d\varphi_n^{(k)}(\varrho)}}{d\varrho}\mathfrak{Q}_n^{(k)}(\mu,\nu)$$
$$=\pi\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)\sum\alpha_n^{(k)}\varphi_n^{(k)}(0)\Big[\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{\varphi_n^{(k)}(0)}\frac{\overline{d\varphi_n^{(k)}(\varrho)}}{d\varrho}$$
$$+\frac{2n+1}{2}\frac{1}{\varphi_n^{(k)}(0)\varphi_1^{(1)}(0)\varphi_1^{(2)}(0)\varphi_1^{(3)}(0)}\Big]\mathfrak{Q}_n^{(k)}(\mu,\nu),$$

oder vereinfacht

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{\mu_0\nu_0}\Big[\mu_0\nu_0-\frac{\nu_0}{\mu_0-\nu_0}\mathfrak{Q}_2^{(1)}(\mu,\nu)-\frac{\mu_0}{\nu_0-\mu_0}\mathfrak{Q}_2^{(2)}(\mu,\nu)\Big]$$
$$=\sum\frac{2n+1}{2}\alpha_n^{(k)}\mathfrak{Q}_n^{(k)}(\mu,\nu). \tag{17}$$

Hieraus bestimmen sich nun die $\alpha_n^{(k)}$ nach dem Eindeutigkeitssatze wie folgt:

$$\begin{cases}\alpha_0=-\frac{4}{3}; & \alpha_1^{(1)}=\alpha_1^{(2)}=\alpha_1^{(3)}=0;\\ \alpha_2^{(1)}=\frac{4}{15}\frac{1}{\mu_0(\mu_0-\nu_0)}, & \alpha_2^{(2)}=\frac{4}{15}\frac{1}{\nu_0(\nu_0-\mu_0)},\\ \alpha_2^{(3)}=\alpha_2^{(4)}=\alpha_2^{(5)}=0; & \alpha_n^{(k)}=0 \text{ für } n>2.\end{cases} \tag{18}$$

Setzen wir diese Werte in (13) und (14) ein, so erhalten wir

$$V_i=-\frac{2}{3}\pi\frac{a^2b^2c^2}{\mu_0\nu_0}\Psi(\varrho,\mu,\nu;0)+\pi abc\Big[-\frac{4}{3}\psi_0(0)+\frac{4}{15}\frac{\psi_2^{(1)}(0)}{\mu_0(\mu_0-\nu_0)}L_2^{(1)}(\varrho,\mu,\nu)$$
$$+\frac{4}{15}\frac{\psi_2^{(2)}(0)}{\nu_0(\nu_0-\mu_0)}L_2^{(2)}(\varrho,\mu,\nu)\Big], \tag{19}$$

$$V_a=\pi abc\Big[-\frac{4}{3}\psi_0(\varrho)+\frac{4}{15}\frac{\varphi_2^{(1)}(0)}{\mu_0(\mu_0-\nu_0)}\Lambda_2^{(1)}(\varrho,\mu,\nu)$$
$$+\frac{4}{15}\frac{\varphi_2^{(2)}(0)}{\nu_0(\nu_0-\mu_0)}\Lambda_2^{(2)}(\varrho,\mu,\nu)\Big]. \tag{20}$$

Damit ist unsere Aufgabe eigentlich erledigt. Wir haben V_i und V_a berechnet, allerdings zunächst in elliptischen Koordinaten. Wir werden nun diese Ausdrücke noch etwas umformen und zu gleicher Zeit die Cartesischen Koordinaten wieder einführen.

5. Die Größe, welche innerhalb der eckigen Klammer in (19) steht, läßt sich nach der Definition (7) in der Form des bestimmten Integrals

$$-\frac{2}{3}\int_\infty^0\left(1+\frac{L_2^{(1)}(\varrho,\mu,\nu)}{\mu_0-\nu_0}\frac{1}{\varphi_2^{(1)}(\lambda)^2}+\frac{L_2^{(2)}(\varrho,\mu,\nu)}{\nu_0-\mu_0}\frac{1}{\varphi_2^{(2)}(\lambda)^2}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}$$

schreiben, oder nach (12)

$$-\frac{2}{3}\int_{\infty}^{\varrho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{(\lambda-\varrho)(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\nu_0)}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}.$$

Durch partielle Integration geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{2}{3}\frac{abc}{\mu_0\nu_0}\Psi(\varrho,\mu,\nu;0)+\int_{\infty}^{\varrho}\Psi(\varrho,\mu,\nu;\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}};$$

folglich wird

$$V_i=-\pi abc\int_{0}^{\infty}\frac{\Phi(x,y,z;\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}. \tag{21}$$

Ebenso formen wir V_a um mit Hilfe von (7). Zunächst ist

$$V_a=-\frac{2}{3}\pi abc\int_{\infty}^{\varrho}\left(1+\frac{1}{\mu_0-\nu_0}\frac{L_2^{(1)}(\varrho,\mu,\nu)}{\varphi_2^{(1)}(\lambda)^2}+\frac{1}{\nu_0-\mu_0}\frac{L_2^{(2)}(\varrho,\mu,\nu)}{\varphi_2^{(2)}(\lambda)^2}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi abc\int_{\infty}^{\varrho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{(\lambda-\varrho)(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\nu_0)}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}$$

$$=\pi abc\int_{\infty}^{\varrho}\Psi(\varrho,\mu,\nu;\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}.$$

Führen wir jetzt wieder die Cartesischen Koordinaten im Integranden ein, so erhalten wir

$$V_a=-\pi abc\int_{\varrho}^{\infty}\frac{\Phi(x,y,z;\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}. \tag{22}$$

Hierin ist also die untere Integrationsgrenze ϱ die ϱ-Koordinate des Aufpunktes (x,y,z), d. h. die größte — und damit die einzige positive — Wurzel der Gleichung $\Phi(x,y,z;\lambda)=0$, in der λ als die Unbekannte aufzufassen ist.

Die Ausdrücke (21) und (22) sind die bekannten Dirichletschen Integrale.

A Note on the Problem of Three Bodies.

By

J. K. Whittemore of Cambridge, Massachusetts.

In 1772 the prize of the Académie Royale des Sciences de Paris was awarded to Lagrange for an 'Essai sur le Problème des Trois Corps'. This memoir is printed in the sixth volume of the works of Lagrange and there occupies pages 229 to 324. To it is added a note of seven pages by the editor, J. A. Serret. In Lagrange's discussion I have observed an omission, the consideration of which seemed at first likely to lead to the complete solution of the problem in cases other than those discovered by the author. It appears however that no other real solutions exist.

The problem of three bodies was not a new one when discussed by Lagrange. He treated it however from a new point of view, and made one step towards the general solution. The differential equations of the relative motions of three mutually attracting bodies form a system of the twelfth order. Of these equations four integrals are known, the three 'area integrals' and the 'vis viva integral'. There remain to be found eight integrals. Lagrange in his memoir has reduced the problem to the discovery of seven integrals and to one quadrature, but he contributed far more to the discussion of the problem than would appear from this statement. In the words of Serret, 'This memoir deserves to be counted among the most important works of the illustrious author. · · · His method is most remarkable; it shows that the complete solution of the problem requires only that we know at each instant the sides of the triangle formed by the three bodies; the coordinates of each may then be determined without difficulty. As to the solution of the triangle, it depends on three differential equations, of which two are of the second order, the third of order three'.

Lagrange, after considering the general problem, showed that the motion may in certain special cases be completely determined: first, supposing the sides of the triangle to be constant, he found that the triangle must be equilateral, or that the three bodies must be always in a straight line. He had, in connection with the second of these solutions,

a third possibility which however gave no new real solution, but which, if imaginary distances or masses be admitted, gives other solutions. These imaginary solutions had for Lagrange no further interest, and are not considered by him; they have for me an interest however, inasmuch as their existence confirms the justice of the comment I have to make on his treatment. Secondly, assuming that the ratios of the sides of the triangle are constant, but that the actual lengths of these sides may vary, he finds again that the three bodies must be either always at the vertices of an equilateral triangle or always in a straight line. In both of these cases he proves that the motion of each body, relative to either of the others, is the elliptic motion of the two body problem. In this case of constant ratios there appears in Lagrange's discussion no imaginary solution, a fact which might justly cause the reader to suspect the treatment to be in some way incomplete. This gap is I think filled by the following note.

The notation of Lagrange's memoir is not symmetrical and his treatment consequently loses in elegance of form. Serret remarks, 'Preoccupied, assuredly, with the application of his new method which he wished to make to the theory of the moon, Lagrange neglected to introduce into his formulas the symmetry which belonged to his analysis, a symmetry which may be reestablished by a slight change in his notation'. Serret makes in his appendix the necessary changes. In the eighth chapter of the first volume of his 'Mécanique Céleste' Tisserand has reproduced the first part of the memoir of Lagrange, using the symmetrical notation suggested by Serret. In this note I shall use the notation of Tisserand, to whose pages I refer the reader. It is hardly possible to give an idea of the problem considered to one who is quite unfamiliar with the memoir of Lagrange. I have in the following discussion made no attempt to give a detailed account of his treatment, but have assumed such of his results as I shall use.

Let the masses of the three bodies be m, m' and m''; the sides of the triangle be r, r' and r''. Then, if it be assumed that the sides remain in constant ratios, we may write

$$r = A\xi, \quad r' = A'\xi, \quad r'' = A''\xi$$

where ξ is a new variable, and A, A' and A'' are constants. We write

$$2\mu = A'^2 + A''^2 - A^2, \qquad \nu = \frac{1}{A'^3} - \frac{1}{A''^3},$$

$$2\mu' = A''^2 + A^2 - A'^2, \qquad \nu' = \frac{1}{A''^3} - \frac{1}{A^3},$$

$$2\mu'' = A^2 + A'^2 - A''^2, \qquad \nu'' = \frac{1}{A^3} - \frac{1}{A'^3}.$$

It follows

$$A^2 = \mu' + \mu'', \qquad A'^2 = \mu'' + \mu, \qquad A''^2 = \mu + \mu',$$
$$\nu + \nu' + \nu'' = 0.$$

Lagrange finds that the following three equations must be satisfied by ξ:

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d^2\xi^2}{dt^2} - \frac{m[1+(\mu'\nu'-\mu''\nu'')A]+m'+m''}{A^3\xi} + \frac{m\nu}{A^2}\int\frac{\varrho_0 - I\int\frac{dt}{\xi}}{\xi^3}dt - \frac{mk_1}{A^2} = 0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2\xi^2}{dt^2} - \frac{m+m'[1+(\mu''\nu''-\mu\nu)A']+m''}{A'^3\xi} + \frac{m'\nu'}{A'^2}\int\frac{\varrho_0 - I\int\frac{dt}{\xi}}{\xi^3}dt - \frac{m'k_1'}{A'^2} = 0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2\xi^2}{dt^2} - \frac{m+m'+m''[1+(\mu\nu-\mu'\nu')A'']}{A''^3\xi} + \frac{m''\nu''}{A''^2}\int\frac{\varrho_0 - I\int\frac{dt}{\xi}}{\xi^3}dt - \frac{m''k_1''}{A''^2} = 0,
\end{aligned}$$

$$I = m\mu\nu + m'\mu'\nu' + m''\mu''\nu''.$$

In these equations t represents the time; the integrals are indefinite integrals, ϱ_0, k_1, k_1', and k_1'' the constants introduced by the integrations. Lagrange infers, admitting evidently that these equations have the same general solution, that they are identical, and must be the same term by term. We have then the conditions (Cf. Tisserand, vol. I, p. 148)

$$(1)\quad \frac{m[1+(\mu'\nu'-\mu''\nu'')A]+m'+m''}{A^3} = \frac{m+m'[1+(\mu''\nu''-\mu\nu)A']+m''}{A'^3} = \frac{m+m'+m''[1+(\mu\nu-\mu''\nu'')A'']}{A''^3},$$

$$(2)\quad \frac{m\nu}{A^2} = \frac{m'\nu'}{A'^2} = \frac{m''\nu''}{A''^2},$$

$$(3)\quad \frac{mk_1}{A^2} = \frac{m'k_1'}{A'^2} = \frac{m''k_1''}{A''^2},$$

or in place of (2),

$$(4)\quad \varrho_0 = I = 0.$$

The conditions, (1), (2), and (3) lead to the equilateral triangle solution; conditions (1), (3), and (4) to the straight line solution.

The criticism and amendment which I have to make is that equations (A) may be identical without the assumed satisfaction of equations (1), (2), or (4). For suppose the integral in these equations to have the form $\frac{C}{\xi}$. The three equations will then be identical if

$$(5)\quad \int\frac{\varrho_0 - I\int\frac{dt}{\xi}}{\xi^3}dt = \frac{C}{\xi}$$

and

$$(6)\qquad \frac{m[1+(\mu'\nu'-\mu''\nu''+\nu C)A]+m'+m''}{A^3} = \frac{m+m'[1+(\mu''\nu''-\mu\nu+\nu' C)A']+m''}{A'^3} = \frac{m+m'+m''[1+(\mu\nu-\mu'\nu'+\nu''C)A''}{A''^3}.$$

Equation (5) leads, on differentiating twice with respect to t, to the differential equation

$$C\left[\xi^2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right]=I.$$

This equation is clearly satisfied if $C=I=0$, and so contains the case of Lagrange, here spoken of as the straight line solution, for from $C=0$, follows $\varrho_0=0$. If C is not zero, we may write this differential equation in the form

$$(7)\qquad \xi^2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2=\frac{I}{C}.$$

This equation, to contain the general solution of the identical equations (A) must itself be identical with those equations. If the common values of the three members of equation (6) be represented by α, that of the terms of (4) by β, we may write the identical equations (A) in the form

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\xi^2}{dt^2}+\frac{\alpha}{\xi}+\beta=0,$$

or since

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\xi^2}{dt^2}=\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2,$$

(A) may be written

$$(A)\qquad \xi^2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\alpha+\beta\xi=0.$$

Composing this equation with (7), we see that the two are identical when and only when

$$\alpha=-\frac{I}{C},\qquad \beta=0.$$

Multiplying (7) by $2\frac{d\xi}{dt}$ and integrating,

$$\xi^2\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2=\frac{2I}{C}\xi+a$$

where a is a constant of integration. If from this equation the value of dt is substituted in (5), it appears that a may be chosen arbitrarily, or if we unterstand both integrals in (5) to be definite integrals taken from a common lower limit, t_0, a may be expressed as follows in terms of ϱ_0 and ξ_0, the latter being the value of ξ for $t=t_0$,

$$a=\frac{\varrho_0^2}{C^2}-\frac{2I}{C}\xi_0.$$

We have now

$$dt = \frac{\pm \xi\, d\xi}{\sqrt{\frac{2I}{C}\xi + a}}$$

whence, denoting by b an arbitrary constant,

$$3CI^2(b \pm t)^2 = (Ca - I\xi)^2\,(Ca + 2I\xi). \tag{8}$$

We have then for this case a complete solution for ξ, that variable being expressed in terms of two arbitrary constants, ϱ_0 and ξ_0. It is to be noticed that the value of ξ determined from (8) cannot be periodic.

It remains to consider whether the constants, A, A', and A'' can be determined so that this is the solution of a real three body problem.

I shall show that, if the masses are real, the A's cannot be all real; hence that there can be no real motion corresponding to this solution. If from equations (6) we eliminate C, we find after a long reduction, in which we write $A^2 = \mu' + \mu''$, $\frac{1}{A'^3} - \frac{1}{A''^3} = \nu$ etc., and make use of the relation, $\nu + \nu' + \nu'' = 0$,

$$\begin{aligned} m^2\nu^2(\mu+\mu')\,(\mu+\mu'') + m'^2\nu'^2(\mu'+\mu'')\,(\mu'+\mu) \\ + m''^2\nu''^2(\mu''+\mu)\,(\mu''+\mu') \\ - 2m'm''\nu'\nu''\mu(\mu'+\mu'') - 2m''m\nu''\nu\mu'(\mu''+\mu) \\ - 2mm'\nu\nu'\mu''(\mu+\mu') = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

When in this equation we replace ν by its value, $\nu = -(\nu' + \nu'')$, we find the discriminant of the resulting homogeneous quadratic form in ν' and ν'' to be

$$-(\mu'\mu'' + \mu''\mu + \mu\mu')\,(m^2A^2 + m'^2A'^2 + m''^2A''^2)^2.$$

Now it may be seen that

$$\mu'\mu'' + \mu''\mu + \mu\mu' = (A+A'+A'')(A'+A''-A)(A''+A-A')(A+A'-A''),$$

and this expression is, for any real triangle, positive, since A, A' and A'' are proportional to the sides of the triangle, or, when the three bodies lie in a line, it vanishes. Since the discriminant of the equation cannot for real masses and a real triangle be positive, the only real solution, aside from the solution $\nu' = \nu'' = 0$, is that in which the three bodies lie in a line.

The imaginary solution might be found as follows: Equating to $-\frac{I}{C}$ the three members of (6), we have three quadratic equations in C whose coefficients are polynomials in A, A', A'' and m, m', m''. From these three equations C may be eliminated in two ways so that the relations between the three ratios and the three masses are given by two algebraic equations. These equations might be solved for the ratios of A, A' and A'' if the

masses were assumed, or for the ratios of the masses if A, A' und A'' were assumed. This solution possesses then a considerable generality, but is however as I have shown, necessarily imaginary. The equations for C are satisfied by $\nu = \nu' = \nu'' = 0$, but for these values $C = \varrho_0 = 0$; and consequently the equilateral triangle solution is not contained in this. Indeed it should not be, for in that case the integral which we have equated to $\frac{C}{\xi}$, is of the form $\frac{\varrho_0}{\xi^2}$. As I have stated, Lagrange found imaginary solutions, that is to say he found that the equations might be satisfied for constant r's, if he wrote equal to zero a function of the m's and r's which could not vanish for real and positive values of these numbers. He was led to this from the consideration of the possibility, $I = 0$. We note that if in equation (7) we write $I = 0$ this equation, which has led us to imaginary solutions, is satisfied by a constant value of ξ.

Bemerkungen zur Note des Herrn Philip E. B. Jourdain über das Prinzip der kleinsten Aktion.*)

Von

MORITZ RÉTHY in Budapest.

I. Aus der Gleichung (5) des Herrn Jourdain (l. c. pag. 416)

$$(5) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big(2T \frac{d\delta t}{dt} + \delta_1 T + \sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu \Big) dt = 0,$$

wo die q_ν freie Koordinaten bedeuten, und den beiden Annahmen (in den letzten Zeilen von pag. 418), daß

a) die Variationen δq_ν an den Grenzen t_0 und t_1 verschwinden, und

b) die Gleichung

$$\delta_1 T = \sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu$$

zu jeder Zeit stattfindet, folgt mittels der ($\delta_1 T$ definierenden) Identität (4) des Herrn Jourdain (pag. 416) jedenfalls, daß die Bewegung des materiellen Systems die natürliche sein muß.

Die (pag. 418) ohne jedwede Verifikation hingestellte Behauptung, daß im Falle der natürlichen Bewegung aus den Prämissen a) und b) auch das Verschwinden von

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt$$

folge, ist hingegen leider eine irrtümliche.

Aus der Identität (4) des Herrn Jourdain (pag. 416) folgt nämlich die ihr äquivalente Identität

$$(\dagger) \qquad \delta_1 T\, dt + T \delta\, dt \equiv \delta(T dt) + \Big(\sum_\nu q'_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} - 2T \Big) d\delta t - \frac{\partial T}{\partial t} \delta t\, dt.$$

*) Math. Ann. Bd. 62, pag. 413—418.

Da andererseits seine Gleichung (5) bei den Annahmen a) und b) durch die natürliche Bewegung befriedigt wird, so folgt aus ihr (indem man an Stelle von $\sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu$ der Annahme b) gemäß $\delta_1 T\,dt$ setzt und hernach die Identität (†) anwendet) die Gleichung

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta(T dt) + \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_\nu q'_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} - 2T \Big) d\delta t - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial t}\, \delta t\, dt.$$

Demnach verschwindet $\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt$ *bei den Jourdainschen Annahmen* a) *und* b) *ohne weiteres gewiß nicht,* es wäre denn, daß wir es mit dem Lagrangeschen Spezialfall zu tun haben, wo T eine homogene quadratische Funktion der q' ist mit von t explizit unabhängigen Koeffizienten, welcher Fall doch bei Herrn Jourdain ausgeschlossen ist. Die Prämissen a) und b) sind vielmehr im allgemeinen durch die Voraussetzung zu ergänzen, daß

c) die Variation δt mittels der Gleichung definiert sei:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{\partial T}{\partial t}\, \delta t + \Big(2T - \sum q'_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} \Big) \frac{d\delta t}{dt} \Big) dt = 0.$$

Daß der Satz nach dieser notwendigen Ergänzung seine Einfachheit vollständig einbüßt, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

II. Aus den Identitäten (11) und (11*) auf Seite 173 meiner (in den Math. Ann. Bd. 58 erschienenen) Arbeit folgt bei der Bezeichnung (10*) die allgemeine Identität

$$\delta((1+c)Tdt) - d\Big((1+c)T\delta t + \sum_i^n \frac{\partial T}{\partial q'_i}\, \delta' q_i \Big)$$

$$\equiv \Big(c\delta' T + \sum_1^n \Big(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \Big) \delta' q_i \Big) dt,$$

wo c eine willkürliche Konstante und

$$\delta' \equiv \delta - \frac{d}{dt}\, \delta t$$

bedeuten. Treffe ich daher bezüglich δt die Vorschrift*)

---

*) Auf pag. 176 meiner zitierten Arbeit (Z. 5 und 6) ist diese Gleichung (††) gemeint; an Stelle von $\delta' T dt$ in Z. 6 ist nämlich zu schreiben

$$\delta' T\, dt + d(T\delta t).$$

$$(\dagger\dagger) \quad d\left((1+c)T\delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right) + \left(c\delta' T - \sum_1^n Q_i \delta' q_i\right) dt = 0,$$

so folgt daraus die Gleichung

$$\delta((1+c)T dt) = \sum_1^n \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i dt;$$

es ist daher die Gleichung

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad (1+c)\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i dt$$

gewiß wahr, sobald nur δt_0 und δt_1 der aus $(\dagger\dagger)$ folgenden Gleichung

$$(\dagger\dagger)' \quad \left[(1+c)T\delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(c\delta' T - \sum_1^n Q_i \delta' q_i\right) dt = 0$$

gemäß bestimmt werden. Ist aber diese letztere Gleichung für beliebige Zeitpunkte t_1 erfüllt, und werden die Verhältnisse $\frac{\delta q_i}{\delta t}$ den zwischen den q_i' bestehenden Bedingungsgleichungen der Bewegung unterworfen, so verschwindet $\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt$, wie aus $(\dagger\dagger\dagger)$ folgt, dann und nur dann, wenn die Bewegung des materiellen Systems die natürliche ist. Dieser Ausspruch enthält meinen Satz und den des Herrn Voss; die Gleichung $(\dagger\dagger)'$ kann dabei, indem man den Integrand $c\delta' T - \sum Q\delta q = 0$ setzt, in zwei Gleichungen zerlegt werden.

Herr Jourdain will nun (in der ersten Alinea von 3. pag. 417—8) gezeigt haben, daß die mit $\delta' q_i$ bezeichneten Größen $\delta q_i - q_i'\delta t$ ganz allgemein nur dann virtuelle Verrückungen bedeuten könnten, wenn δt verschwindet. Seine Gründe leuchten mir, ich muß es gestehen, nicht ein; insbesondere erscheint mir das Herbeiziehen des Hamiltonschen Prinzips (pag. 418, Z. 3—5) völlig fremdartig und verdächtig.*) Ist

*) In der Fußnote pag. 75, Z. 3 seiner in „Quart. Journ. of Math. 1904" erschienenen Arbeit spricht Herr Jourdain klar aus, daß die in Rede stehende Ableitung des Herrn Voss „two fundamental errors" enthält, von denen der eine der eben dargestellte sein soll. Da beide vermeintlichen Fehler zusammen stehen und fallen, so will ich vom zweiten nicht reden.

doch bei dieser Frage nur der eine Umstand maßgebend, daß die Verhältnisse $\frac{\delta q_i}{\delta t}$ so definiert werden, daß daraus für die Größen $\delta' q_i$ *homogene* lineare Gleichungen von einfacher physikalischer Bedeutung hervorgehn, die dem Wert von δt für sich genommen gar keine Beschränkung auferlegen. In dieser Definition und in den daraus gezogenen Folgerungen möge Herr Jourdain einen inneren Widerspruch direkt (ohne Einmischung fremder Prinzipien) und klar nachweisen.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910.

Die meisten Aufgaben der Elektrostatik sind reduzierbar auf die Ermittelung der Greenschen Massenbelegungen, und es sind daher diese Belegungen für die Theorie der Elektrostatik, sowie überhaupt für die ganze Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit.

Durch neuerdings publizierte Untersuchungen (Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W. Math.-phys. Kl. Jahrg. 1906, S. 483—558) dürfte wohl nun außer Zweifel gesetzt sein, daß in der Theorie des logarithmischen Potentials für jedwede geschlossene Kurve die dem Innen- und Außenraum entsprechenden beiden Greenschen Belegungen reduzierbar sind auf eine einzige Belegung, auf die sogenannte „Grundbelegung“, und daß Analoges auch gelte in der Theorie des Newtonschen Potentials für jedwede geschlossene Oberfläche.

Immerhin lassen die in Rede stehenden Untersuchungen bis jetzt noch vieles zu wünschen übrig. Demgemäß stellt die Gesellschaft folgende Aufgabe:

> Es soll eine Arbeit geliefert werden, durch welche jene Theorie der „Grundbelegung“ in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

Preis 1500 Mark.

Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen.

Zweite Abhandlung*): Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung.

Von

Erhard Schmidt in Bonn.

§ 1.

Das Problem.

Den Gegenstand dieser Untersuchung bildet die für $a \leqq s \leqq b$ durch Bestimmung der reellen stetigen Funktion $\varphi(s)$ zu erfüllende Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

wo der „Kern“ $K(s,t)$ und $f(s)$ als für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktionen gegeben sind. Es erweist sich eine parallele Behandlung der für $a \leqq t \leqq b$ zu erfüllenden Integralgleichung

$$g(t) = \psi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\psi(s)\,ds \tag{2}$$

als zweckmäßig, wo $g(t)$ die gegebene und $\psi(t)$ die gesuchte reelle stetige Funktion bedeuten.

Für identisch verschwindende $f(s)$ und $g(t)$ sollen jede Lösung der Gleichung (1) eine *Nulllösung in s* und jede Lösung der Gleichung (2) eine *Nulllösung in t* des Kernes heißen.

Die linearen Integralgleichungen sind zuerst von Fredholm mittels seiner berühmten Reihen vollständig gelöst worden. Hilbert**) hat eine Auflösungsmethode mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen mit

*) Diese Abhandlung kann ohne Kenntnis der vorangehenden ersten gelesen werden.

**) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“, 4te und 5te Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1906.

unendlich vielen Variabelen gegeben. Eine auf die Annahme der Symmetrie des Kernes sich stützende neue Auflösung wurde in meiner Dissertation*) und im zweiten Kapitel der vorangehenden Abhandlung**) entwickelt, während im dritten Kapitel gezeigt wurde, wie sich jede Integralgleichung auf eine symmetrische zurückführen läßt. Hier soll eine ganz elementare neue Auflösungsmethode auseinandergesetzt werden, welche auch dem numerischen Gebrauche sich anpassen läßt, und deren Grundzüge unmittelbar darauf wiederkehren werden, um den Zugang zu den *nicht linearen* Integralgleichungen und den *Verzweigungen* ihrer Lösungen zu eröffnen. Die Integralgleichung wird zunächst in zwei durch besondere Voraussetzungen über den Kern charakterisierten speziellen Fällen gelöst, und dann der allgemeine Fall in diese beiden speziellen zerspalten.

§ 2.

Erster spezieller Fall.

Es bestehe die Ungleichung

$$\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2\,ds\,dt < 1. \tag{3}$$

Wir definieren wie in § 6 meiner ersten Abhandlung

$$K^1(s,t) = K(s,t),$$

$$K^2(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K(r,t)\,dr,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$K^\nu(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K^{\nu-1}(r,t)\,dr,$$

$$\vdots$$

Denkt man sich dann $K^{n+1}(s,t)$ als n-faches Integral über ein Produkt von $n+1$ Kernen explizite ausgedrückt, so erhellt:

$$K^{\mu+\nu}(s,t) = \int_a^b K^\mu(s,r)\,K^\nu(r,t)\,dr.$$

Aus

$$K^n(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K^{n-1}(r,t)\,dr$$

*) „Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener", Inauguraldissertation, Göttingen 1905.

**) Math. Ann. 63, S. 433—476.

folgt gemäß der Ungleichung von Schwarz (erste Abhandlung § 1)

$$(K^n(s,t))^2 \leqq \int_a^b (K(s,r))^2 dr \cdot \int_a^b (K^{n-1}(r,t))^2 dr,$$

$$\int_a^b\int_a^b (K^n(s,t))^2 ds\, dt \leqq \int_a^b\int_a^b (K(s,r))^2 ds\, dr \cdot \int_a^b\int_a^b (K^{n-1}(r,t))^2 dr\, dt.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich

$$\int_a^b\int_a^b (K^n(s,t))^2 ds\, dt \leqq \Big[\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\, dt\Big]^n. \tag{4}$$

Nun ist für $\nu \geqq 3$

$$K^\nu(s,t) = \int_a^b\int_a^b K(s,r)\, K^{\nu-2}(r_1,r_2)\, K(r_2,t)\, dr_1\, dr_2$$

und mithin nach der Schwarzschen Ungleichung, welche auch für mehrfache Integrale gültig bleibt,

$$(K^\nu(s,t))^2 \leqq \int_a^b\int_a^b (K^{\nu-2}(r_1,r_2))^2 dr_1\, dr_2 \cdot \int_a^b\int_a^b (K(s,r_1)\, K(r_2,t))^2 dr_1\, dr_2.$$

Gemäß der Ungleichung (4) ist also

$$(K^\nu(s,t))^2 \leqq \Big[\int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\, dt\Big]^{\nu-2} \cdot \int_a^b (K(s,r_1))^2 dr_1 \cdot \int_a^b (K(r_2,t))^2 dr_2.$$

Diese allgemein gültige Ungleichung erlaubt aus der besonderen Voraussetzung (3) die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} K^\nu(s,t)$ zu schließen.

Definieren wir

$$\Gamma(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} K^\nu(s,t),$$

so ist

$$\Gamma(s,t) = K(s,t) + \int_a^b K(s,r)\, \Gamma(r,t)\, dr, \tag{5}$$

$$\Gamma(s,t) = K(s,t) + \int_a^b \Gamma(s,r)\, K(r,t)\, dr. \tag{6}$$

Auf Grund dieser Gleichungen kann durch Einführung von (7) in (8) und (8) in (7) leicht verifiziert werden, daß die Gleichungen

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s,t)\,f(t)\,dt \tag{8}$$

wechselseitig auseinander folgen. Ebenso folgen auch die Gleichungen

$$g(t) = \psi(t) - \int_a^b K(s,t)\,\psi(s)\,ds\,, \tag{9}$$

$$\psi(t) = g(t) + \int_a^b \Gamma(s,t)\,g(s)\,ds \tag{10}$$

wechselseitig auseinander. Unter der zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Voraussetzung (3) hat also die Integralgleichung (7) *immer eine und nur eine Lösung*, welche durch die Gleichung (8) gegeben wird und identisch verschwindet, sobald $f(s)$ identisch Null ist. Dasselbe gilt von der Integralgleichung (9), deren Lösung durch die Gleichung (10) dargestellt wird. *Der Kern hat also weder Nulllösungen in s noch in t.*

§ 3.

Zweiter spezieller Fall.

Es sei der Kern darstellbar als eine endliche Summe von Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t:

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t).$$

Die Integralgleichung (1) ist in diesem Falle gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho_\nu\,\alpha_\nu(s), \tag{11}$$

$$\varrho_\mu = \int_a^b \beta_\mu(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m). \tag{12}$$

Durch Einführung von (11) in (12) erhält man

$$\varrho_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho_\nu \int_a^b \alpha_\nu(s)\,\beta_\mu(s)\,ds = \int_a^b f(s)\,\beta_\mu(s)\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m). \tag{13}$$

Die Integralgleichung (1) und das Gleichungssystem (13), (11) folgen also

wechselseitig auseinander, und damit ist die Integralgleichung auf *m gewöhnliche lineare Gleichungen* (13) *mit den m Unbekannten* ϱ_μ zurückgeführt. Die Diskussion dieser Gleichungen und der sich ergebenden Lösbarkeitsgesetze der Integralgleichung soll, um Wiederholungen zu vermeiden, erst im nächsten Paragraphen nach Befreiung von den spezialisierenden Voraussetzungen über den Kern folgen.

§ 4.

Der allgemeine Fall.

Es sei $K(s,t)$ eine *beliebige* für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion. Es sei ferner eine endliche Anzahl *linear unabhängiger* reeller stetiger Funktionen von s und ebenso vieler *linear unabhängiger* reeller stetiger Funktionen von t

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s),\ \cdots,\ \alpha_m(s);$$
$$\beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \cdots,\ \beta_m(t)$$

so bestimmt, daß

$$\int_a^b \int_a^b \left(K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t) \right)^2 ds\,dt < 1 \tag{14}$$

wird. Eine stets mögliche Herstellung eines solchen Systems von Funktionenpaaren ist im vierten Kapitel der ersten Abhandlung auseinandergesetzt worden. Dort wird nämlich das Problem der Variationsrechnung gelöst, bei vorgeschriebener Anzahl die Funktionenpaare so zu bestimmen, daß das obige Doppelintegral zum Minimum wird, und es wird bewiesen, daß durch Verfügung über die Größe der vorgeschriebenen Anzahl jenes Minimum unter jede Grenze herabgedrückt werden kann. Zum Zwecke *numerischer* Rechnung wird es im allgemeinen nicht angezeigt sein, die Funktionenpaare, wie l. c., aus den Paaren adjungierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ zu bilden. Es wird sich dann häufig empfehlen, etwa als Funktionen von s die Koeffizienten, und als Funktionen von t die zugehörigen trigonometrischen Funktionen der ersten Glieder in der Fourier-Entwicklung des Kernes nach t zu wählen, wenn nicht noch andere Entwicklungen sich aus der gegebenen Form des Kernes als vorteilhaft darbieten. Wie das Folgende zeigt, werden sich die numerischen Schwierigkeiten um so mehr reduzieren, je geringer die Anzahl der benutzten Funktionenpaare ist, und je kleiner das Doppelintegral (14) über das Fehlerquadrat der Approximation des Kernes durch die Produktsumme ist.

Man setze

$$K_1(s,t) = K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t),$$

$$\Gamma_1(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} K_1^{\nu}(s,t),$$

wo die Summe auf der rechten Seite wegen (14) gemäß § 2 absolut und gleichmäßig konvergiert. Dann läßt sich die Gleichung (1) schreiben:

$$(15)\quad f(s) + \int_a^b \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t) \right) \varphi(t)\,dt = \varphi(s) - \int_a^b K_1(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Wendet man die Formeln (7), (8) an, um $\Gamma_1(s,t)$ statt $K_1(s,t)$ einzuführen, und ordnet dann ein wenig um, so geht (15) über in die Gleichung:

$$(16)\quad f(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\,f(r)\,dr$$

$$= \varphi(s) - \int_a^b \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left(\alpha_\nu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\,\alpha_\nu(r)\,dr \right) \beta_\nu(t) \right] \varphi(t)\,dt.$$

Diese Gleichung ist von der § 3 behandelten Form.

Für später ist die Feststellung von Wichtigkeit, daß auch die Funktionen $\alpha_\nu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\,\alpha_\nu(r)\,dr$ linear unabhängig sind. Denn wäre

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} c_\nu \left(\alpha_\nu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\,\alpha_\nu(r)\,dr \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=m} c_\nu\,\alpha_\nu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r) \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=m} c_\nu\,\alpha_\nu(r) \right) dr,$$

so wäre auch, da die Gleichungen (7) und (8) *wechselseitig* auseinander folgen,

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} c_\nu\,\alpha_\nu(s),$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\alpha_\nu(s)$.

Nach Vorausschickung dieser Bemerkung schreiten wir zur Anwendung des in § 3 angegebenen Auflösungsverfahrens.

Die Gleichung (16) ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem:

$$(17)\quad \varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r) f(r)\, dr + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho_\nu \left(\alpha_\nu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\, \alpha_\nu(r)\, dr\right),$$

$$(18)\quad \varrho_\mu = \int_a^b \beta_\mu(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m).$$

Durch Einführung von (17) in (18) erhält man

$$(19)\quad \varrho_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho_\nu \left[\int_a^b \alpha_\nu(s)\, \beta_\mu(s)\, ds + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\, \alpha_\nu(r)\, \beta_\mu(s)\, dr\, ds\right]$$

$$= \int_a^b \left(\beta_\mu(t) + \int_a^b \Gamma_1(r,t)\, \beta_\mu(r)\, dr\right) f(t)\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m).$$

Die Integralgleichung (1) und das Gleichungssystem (19), (17) sind also gleichbedeutend.

Ebenso wird die Integralgleichung (2) umgeformt in das Gleichungssystem

$$(20)\quad \varrho'_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho'_\nu \left[\int_a^b \alpha_\mu(t)\, \beta_\nu(t)\, dt + \int_a^b \Gamma_1(r,t)\, \alpha_\mu(t)\, \beta_\nu(r)\, dr\right]$$

$$= \int_a^b \left(\alpha_\mu(s) + \int_a^b \Gamma_1(s,r)\, \alpha_\mu(r)\, dr\right) g(s)\, ds \qquad \mu = (1, 2, \cdots, m),$$

$$(21)\quad \psi(t) = g(t) + \int_a^b \Gamma_1(r,t)\, g(r)\, dr + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \varrho'_\nu \left(\beta_\nu(t) + \int_a^b \Gamma_1(r,t)\, \beta_\nu(r)\, dr\right).$$

Die Determinante Δ der m linearen Gleichungen (19) mit den m Unbekannten ϱ_μ und die Determinante Δ' der m linearen Gleichungen (20) mit den m Unbekannten ϱ_μ' unterscheiden sich nur durch Vertauschung von Reihen und Kolonnen.

Es sei nun Δ und mithin auch Δ' von Null verschieden.

Dann lassen sich die Gleichungen (19) nach den Unbekannten ϱ_μ auf eine und nur eine Weise auflösen, und die Einführung der erhaltenen Werte in (17) liefert die gesuchte Funktion $\varphi(s)$; ist insbesondere $f(s)$ identisch gleich Null, so muß auch $\varphi(s)$ identisch verschwinden. Ebenso lassen sich die Gleichungen (20) nach den Unbekannten ϱ'_μ auf eine und nur eine Weise auflösen, und die Einführung der erhaltenen Werte in (21) liefert die gesuchte Funktion $\psi(t)$; ist insbesondere $g(t)$ identisch gleich Null, so muß auch $\psi(t)$ identisch verschwinden.

Die Integralgleichungen (1) *und* (2) *haben also in diesem Falle stets eine und nur eine Lösung, während weder in s noch in t Nullösungen existieren.*

Jetzt machen wir die Annahme, *daß* Δ *und mithin auch* Δ' *verschwinden, und zwar vom Range* $m - n$ *seien.*

Bezeichnet man dann mit a_{ik} das k^{te} Element der i^{ten} Zeile von Δ, so können n m-gliedrige Größenreihen

$$\begin{matrix} p_{1,1}\ p_{1,2} \cdots p_{1,m}, \\ p_{2,1}\ p_{2,2} \cdots p_{2,m}, \\ \vdots \\ p_{n,1}\ p_{n,2} \cdots p_{n,m} \end{matrix}$$

bestimmt werden, welche folgenden beiden Forderungen genügen:

I. Es bestehen die nm Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} p_{\mu k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, m \\ \mu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

II. Die Größenreihen sind linear unabhängig, d. h. bei nicht sämtlich verschwindenden c_μ besteht kein Gleichungssystem von der Form

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu p_{\mu,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m).$$

Aus I und II ergibt sich auf Grund des Ranges der Determinante:

III. Die Gesamtheit aller Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

wird durch die Formel

$$x_k = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu p_{\mu k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

dargestellt, wo die c_μ verfügbare Koeffizienten bedeuten.

Ebenso können n m-gliedrige Größenreihen

$$\begin{matrix} q_{1,1}\ q_{1,2} \cdots q_{1,m}, \\ q_{2,1}\ q_{2,2} \cdots q_{2,m}, \\ \vdots \\ q_{n,1}\ q_{n,2} \cdots q_{n,m} \end{matrix}$$

bestimmt werden, welche folgenden beiden Forderungen genügen:

I'. Es bestehen die nm Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_{i,k}\, q_{\mu,i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, m \\ \mu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

II'. Die n Größenreihen sind linear unabhängig.

Aus I' und II' ergibt sich bei Berücksichtigung des Ranges der Determinante:

III'. Die Gesamtheit aller Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_{ik}\, x_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

wird durch die Formel

$$x_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, q_{\mu,i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

dargestellt, wo die c_μ verfügbare Koeffizienten bedeuten.

Um nun zunächst die Nulllösungen in s zu bestimmen, setze man in den Gleichungen (19) und (17) $f(s)$ identisch gleich Null. Dann folgt wegen III

$$\varrho_k = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, p_{\mu,k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m).$$

Durch Einführung dieser Formeln in (17) ergibt sich, daß die *Gesamtheit* aller Nulllösungen in s dargestellt wird durch die Formel

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, \varphi_\mu(s), \tag{22}$$

wo die c_μ willkürliche Koeffizienten bedeuten und

$$\varphi_\mu(s) = \sum_{k=1}^{k=m} p_{\mu,k} \left(\alpha_k(s) + \int_a^b \Gamma_1(s, r)\, \alpha_k(r)\, dr \right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{23}$$

ist. Die n Funktionen $\varphi_\mu(s)$ sind offenbar selbst auch Nulllösungen in s, und zwar bilden sie ein *linear unabhängiges, vollständiges System von Nulllösungen in* s, d. h. sie sind linear unabhängig, und die Gesamtheit aller Nulllösungen in s läßt sich durch sie linear homogen mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen. Die letztere Behauptung ist in der Formel (22) bewiesen; wäre ferner bei nicht sämtlich verschwindenden c_μ

$$0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, \varphi_\mu(s) = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\alpha_k(s) + \int_a^b \Gamma_1(s, r)\, \alpha_k(r)\, dr \right) \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, p_{\mu,k} \right),$$

so wäre wegen der Seite 166 bewiesenen linearen Unabhängigkeit der Funktionen

$$\alpha_k(s) + \int_a^b \Gamma_1(s, r)\, \alpha_k(r)\, dr \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

$$0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} c_\mu\, p_{\mu,k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

im Widerspruch zu II.

Ebenso ergeben die Gleichungen (20), (21) ein gleichfalls aus n Funktionen bestehendes *linear unabhängiges, vollständiges System von Nulllösungen in* t, welches durch die Formeln

$$\psi_\mu(t) = \sum_{k=1}^{k=m} q_{\mu k} \left(\beta_k(t) + \int_a^b \Gamma_1(r, t)\, \beta_k(r)\, dr\right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{24}$$

dargestellt wird.

Nach Bestimmung der Nulllösungen kehren wir zum allgemeinen Fall der Inhomogenität der Integralgleichung (1) zurück. Damit die Gleichungen (19), auf welche diese sich reduziert, lösbar sind, müssen ihre linken Seiten n notwendigen und in ihrer Gesamtheit hinreichenden linearen homogenen Bedingungsgleichungen genügen, welche auf folgende Weise zu erhalten sind: Um etwa die μ^{te} Bedingungsgleichung zu bilden, multipliziere man für $i = 1, 2, \cdots, m$ die rechte Seite der i^{ten} Gleichung (19) mit $q_{\mu i}$ und setze die Summe über alle i gleich Null. So ergeben sich für die Lösbarkeit der Integralgleichung (1) die n notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen

$$0 = \int_a^b \psi_\mu(t)\, f(t)\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{25}$$

wo die Funktionen $\psi_\mu(t)$ das durch die Formeln (24) gegebene *linear unabhängige, vollständige* System von Nulllösungen in t durchlaufen.

Ebenso ergeben sich für die Lösbarkeit der Integralgleichung (2) die n notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen

$$0 = \int_a^b \varphi_\mu(s)\, g(s)\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{26}$$

wo die Funktionen $\varphi_\mu(s)$ das durch die Formeln (23) dargestellte *linear unabhängige, vollständige* System von Nulllösungen in s durchlaufen.

Zum Schluß sollen die Hauptresultate dieses Paragraphen kurz in folgenden Sätzen zusammengefaßt werden:

Die linear unabhängigen, vollständigen Systeme von Nulllösungen in s

und Nulllösungen in t des Kernes $K(s, t)$ sind stets endlich und von gleicher Anzahl.

Ist diese Anzahl Null, d. h. gibt es überhaupt keine Nulllösungen, so hat die Integralgleichung (1) *und ebenso auch die Integralgleichung* (2) *stets eine und nur eine Lösung.*

Ist die Anzahl von Null verschieden, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung der Lösbarkeit der Integralgleichung (1) *in der Orthogonalität von $f(s)$ zu allen Nulllösungen in t, und aus einer Lösung ergibt sich die Gesamtheit aller durch Hinzuaddieren aller Nulllösungen in s. Ebenso besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Integralgleichung* (2) *in der Orthogonalität von $g(t)$ zu allen Nulllösungen in s, und aus einer Lösung ergibt sich die Gesamtheit aller durch Hinzuaddieren aller Nulllösungen in t.*

Alle diese fundamentalen Theoreme sind zuerst von Fredholm mittels seiner berühmten Reihen bewiesen worden. Das hier auseinandergesetzte einfache Beweisverfahren hat durch die Formeln (23), (24) auch Aufschluß über die Gestalt der Nulllösungen gegeben.

§ 5.

Der lösende Kern.

Es lohnt der Mühe, im Falle nicht verschwindender Determinante Δ die Lösung in Formeln etwas weiter durchzuführen.

Man bezeichne mit A_{ik} die Adjunkte des k^{ten} Koeffizienten der i^{ten} Zeile von Δ, löse die Gleichungen (19) auf und führe die erhaltenen Formeln in (17) ein. Dann geht das Gleichungssystem (19), (17) über in das Gleichungssystem

$$\varrho_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} A_{\mu k}\int_a^b \Big(\beta_\mu(t) + \int_a^b \Gamma_1(r, t)\,\beta_\mu(r)\,dr\Big) f(t)\,dt, \tag{27}$$

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s, t)\, f(t)\, dt, \tag{28}$$

wo

$$\Gamma(s, t) = \Gamma_1(s, t) + \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\mu=1}^{\mu=m} A_{\mu k}\Big(\alpha_k(s) + \int_a^b \Gamma_1(s, r)\,\alpha_k(r)\,dr\Big)\Big(\beta_\mu(t) + \int_a^b \Gamma_1(r, t)\,\beta_\mu(r)\,dr\Big)$$

gesetzt ist. Die Integralgleichung (28) stellt die Lösung der Integralgleichung (1) eindeutig dar.

Ebenso wird die Lösung der Integralgleichung (2) durch die Integralgleichung

$$\psi(t) = g(t) + \int_a^b \Gamma(s, t)\, g(s)\, ds \tag{29}$$

eindeutig dargestellt.

Die Funktion $\Gamma(s, t)$ wird der *lösende Kern des Kernes* $K(s, t)$ genannt. Durch Einführung von (1) in (28) und (28) in (1) folgen leicht die Gleichungen

$$K(s, t) = \Gamma(s, t) - \int_a^b K(s, r)\, \Gamma(r, t)\, dr, \tag{30}$$

$$K(s, t) = \Gamma(s, t) - \int_a^b K(r, t)\, \Gamma(s, r)\, dr. \tag{31}$$

Diese Gleichungen können auch zur Definition des lösenden Kernes dienen, da sich aus ihnen wiederum das wechselseitige Auseinanderfolgen von (1) und (28) und ebenso auch von (2) und (29) ergibt. Der lösende Kern ist ferner eindeutig definiert. Denn betrachtet man t als Parameter, so genügt $\Gamma(s, t)$ als Funktion von s der Integralgleichung (30), welche vom Typus der Integralgleichung (1) ist, und daher, weil Δ gemäß Voraussetzung nicht verschwindet, nur eine einzige Lösung hat. Auch der „lösende Kern“ ist von Fredholm eingeführt worden.

§ 6.

Transformation des Kernes.

In diesem Paragraphen soll ein Theorem bewiesen werden, das in der Theorie der nicht linearen Integralgleichungen von wesentlicher Bedeutung ist.

Es mögen die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_n(s),$$
$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \cdots,\ \psi_n(t)$$

vollständige Systeme linear unabhängiger Nulllösungen des Kernes $K(s, t)$ in s und in t bilden. Wir setzen

$$Q(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s)\, q_\nu(t) + K(s, t), \tag{32}$$

wo die $p_\nu(s)$ und $q_\nu(t)$ reelle stetige Funktionen bedeuten.

Ferner setze man

$$A_{\mu\nu} = \int_a^b \psi_\mu(r)\, p_\nu(r)\, dr,$$

$$B_{\mu\nu} = \int_a^b \varphi_\mu(r)\, q_\nu(r)\, dr.$$

Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der neue Kern $Q(s,t)$ keine Nulllösungen mehr hat, darin, daß keine der beiden n-reihigen Determinanten $|A_{\mu\nu}|$ und $|B_{\mu\nu}|$ verschwindet. Berücksichtigt man, daß alle Nulllösungen in s von $K(s,t)$ in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \varphi_\nu(s)$$

darstellbar sind, und alle Nulllösungen in t in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu \psi_\nu(t),$$

so kann, wie leicht ersichtlich, das eben ausgesprochene Kriterium auch in die Forderung formuliert werden, daß $K(s,t)$ weder eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t, noch eine zu allen q_ν orthogonale Nulllösung in s hat.

Beweis. Die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt unmittelbar aus ihrer zweiten Formulierung. Denn gäbe es z. B. eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t des Kernes $K(s,t)$, so wäre sie, wie die Verifikation in die Augen springen läßt, auch eine Nulllösung in t des Kernes $Q(s,t)$.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, d. h. daß ihr Erfülltsein Nulllösungen von $Q(s,t)$ ausschließt. Nehmen wir also an, der Kern $Q(s,t)$ habe eine Nulllösung in s, $\varphi(s)$:

$$0 = \varphi(s) - \int_a^b Q(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu(s) \int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{33}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\psi_\mu(s)\,ds$ und integriert von a bis b, so verschwindet die linke Seite. Man erhält also die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_{\mu\nu} \int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (\mu = 1,2,\cdots,n).$$

Hieraus folgen wegen des vorausgesetzten Nichtverschwindens der Determinante $|A_{\mu\nu}|$ die Gleichungen

$$\int_a^b q_\nu(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (\nu = 1,2,\cdots,n). \tag{34}$$

Es müßte also wegen (33), (34) $\varphi(s)$ auch von $K(s,t)$ eine Nulllösung in s sein, welche wegen (34) zu allen q_ν orthogonal wäre, im Widerspruch zur zweiten Formulierung unserer Bedingung. q. e. d.

Wählen wir z. B. als Funktionen p_ν irgend ein vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen in t des Kernes $K(s, t)$ und als Funktionen q_ν irgend ein vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen in s, so ist unsere notwendige und hinreichende Bedingung, wie ihre zweite Formulierung zeigt, erfüllt. Denn wäre $\chi(s)$ eine zu allen p_ν orthogonale Nulllösung in t von $K(s, t)$, so müßte auch $\chi(s)$ zu allen Funktionen von der Form $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu p_\nu$ orthogonal sein, wo die c_ν beliebige Konstanten bedeuten. Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit des Systems der p_ν sind in dieser Form aber alle Nulllösungen in t von $K(s, t)$ enthalten, und mithin auch $\chi(s)$. Es müßte also $\chi(s)$ zu sich selbst orthogonal sein, was unmöglich ist. *Wenn also die vollständigen Systeme linear unabhängiger Nulllösungen in s und in t des Kernes $K(s, t)$ von der Anzahl n sind, so läßt sich dieser Kern durch Hinzufügung von n Produkten einer stetigen Funktion von s mit einer stetigen Funktion von t in einen solchen Kern transformieren, der keine Nulllösungen mehr hat. Durch Hinzufügung von weniger als n solchen Produkten kann dies nicht erreicht werden.* Denn diesen Fall erhält man bei der spezialisierenden Voraussetzung, daß einige der n Funktionen p_ν identisch gleich Null sein müssen. Dann aber verschwindet die Determinante $|A_{\mu\nu}|$.

Schlußbemerkung.

Es ändert sich nichts in den eben auseinandergesetzten Sätzen und Beweisen, wenn $s, t, r, \cdots$ Punkte eines n-dimensionalen, ganz im Endlichen liegenden, aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Gebildes in einem $n+m$-dimensionalen Raum bedeuten und $ds, dt, dr, \cdots$ die entsprechenden Elemente.

Auch Unstetigkeiten können in dem in § 16 der vorangehenden Abhandlung kurz angegebenen und in § 12 näher ausgeführten Umfange zugelassen werden.

Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen der automorphen Funktionen.)

Von

F. Klein in Göttingen.

I. Festlegung der Differentialgleichung. Das Oszillationstheorem. Das Polygon auf der η-Kugel.

1. Die folgenden Betrachtungen sollen der Bequemlichkeit halber an das Beispiel einer möglichst einfach gewählten Differentialgleichung geknüpft werden. Wir verstehen unter $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Werte, die folgenden Ungleichungen unterworfen sein sollen:

$$a > b > c; \quad 0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1.$$

Die Differentialgleichung, die wir betrachten wollen, sei dann folgende:

$$(1) \quad y'' + y'\left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c}\right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B) = 0.$$

Wir haben hier vier singuläre Punkte:

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

und a, b, c entsprechend die Exponentenpaare:

$$\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix};$$

die Exponenten δ', δ'', die zum singulären Punkte ∞ gehören, berechnen sich aus den Formeln:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2, \qquad \delta'\delta'' = A,$$

und ihre Differenz $\delta' - \delta''$ soll gleich der Größe δ sein, für welche wir bereits eine Ungleichung aufstellten. Die beiden zum einzelnen singulären Punkte, z. B. zu a, gehörigen Fundamentallösungen von (1) nenne ich Y_α^a, Y_0^a; sie sind nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Tritt der Grenzfall ein, daß α zu 0 wird, so fallen diese Lösungen in die eine Y_0^a zusammen und es tritt dann daneben in bekannter Weise eine neue Lösung mit logarithmischem Glied, welche mit $Y_{\log}^a$ bezeichnet sein soll.

2. Ich knüpfe übrigens durchweg an die Bezeichnungsweisen und Auffassungsweisen an, von denen ich in meinen alten Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in diesen Annalen und insbesondere in meinem hierauf bezüglichen, von E. Ritter 1894 publizierten autographierten Vorlesungsheft Gebrauch gemacht habe.*) Die Größe B nenne ich den *akzessorischen Parameter*, und es handelt sich nun im folgenden um diejenigen Fragestellungen, welche ich in dem genannten Hefte als „eigentlich transzendente" bezeichnet habe, nämlich um die Festlegung des akzessorischen Parameters B einerseits durch das *Oszillationstheorem*, andererseits durch die *Existenztheoreme der automorphen Funktionen*.

3. Das Oszillationstheorem legt den Parameter B fest, indem es einer *einzelnen* reellen Lösung von (1) bestimmte Bedingungen auferlegt. In seiner ursprünglichen Fassung setzt dasselbe ein Intervall der x-Achse als gegeben voraus, — es möge $\overline{mn}$ heißen —, das keinerlei singulären Punkt enthält. Wir verlangen, daß eine Lösung y von (1) existieren soll, für welche der Quotient $\frac{y}{y'}$ bei $x = m$ und bei $x = n$ je einen vorgegebenen reellen Wert annimmt, und die innerhalb des Intervalls $\overline{mn}$ eine vorgegebene Zahl von Malen (die auch Null sein kann) verschwindet; das Oszillationstheorem behauptet, daß durch diese Forderungen der Parameter B gerade eindeutig bestimmt sei. Das Oszillationstheorem läßt sich aber, wenn die Exponentendifferenzen der in Betracht kommenden singulären Punkte reell sind und *zwischen* 0 und 1 liegen (NB. mit Ausschluß dieser Grenzen), auch auf solche Intervalle ausdehnen, die sich an singuläre Punkte heranziehen. Ich darf dann nur, z. B. bei $x = a$, nicht den Wert von $\frac{y}{y'}$ vorschreiben, sondern muß angeben, mit welcher linearen Kombination $Y_\alpha^a - \lambda Y_0^a$ das y proportional sein soll. In dem Grenzfalle, den wir hier mit betrachten wollen, daß nämlich $\alpha = 0$ wird, tritt eine wirkliche Beschränkung ein: das y muß, wenn anders die Aussage des Oszillationstheorems bestehen bleiben soll, dem Y_0^a proportional sein (es darf, in der Reihenentwicklung des y bei $x = a$, kein logarithmisches Glied auftreten). Man sehe wegen dieser Einzelheiten und der Beweise die Arbeiten von Bôcher im American Bulletin von 1898, 1899, bez. das

*) Im Verlag bei Teubner und neuerdings (1906) dort in unverändertem Abdruck neu ausgegeben. Siehe auch das Referat in Bd. 46 dieser Annalen.

zusammenfassende Referat Bôchers in Bd. II der mathematischen Encyklopädie (Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen).

4. In der Theorie der automorphen Funktionen hinwieder betrachtet man den Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ irgend *zweier* Partikularlösungen von (1), bez. das *Kreisbogenviereck*, auf welches dieses η die Halbebene der unabhängigen Variablen x (sagen wir, die „positive" Halbebene x) abbildet. Die Ecken dieses Vierecks, die den singulären Punkten a, b, c, ∞ entsprechen, sollen mit a', b', c', ∞' bezeichnet sein; sie weisen bez. die Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ auf. Man vergleiche die schematische Figur:

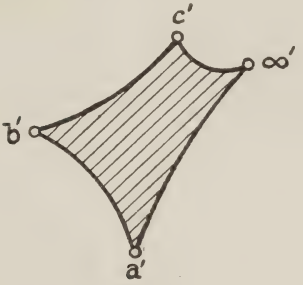


Fig. 1.

Es ist für weitergehende Untersuchungen bekanntlich zweckmäßig, dieses Kreisbogenviereck nicht in der η-*Ebene*, sondern auf der η-*Kugel* gelegen zu denken und dann von raumgeometrischen Konstruktionen Gebrauch zu machen. Ich werde mich dabei immer kurzweg der Nichteuklidischen (projektiven) Maßbestimmung bedienen, deren Fundamentalfläche die η-Kugel ist. So ist, wenn weiterhin in diesem Zusammenhange von der Drehung um eine Achse durch einen bestimmten Winkel die Rede ist, dies immer im zugehörigen Nichteuklidischen Sinne gemeint (Drehung = Kollineation, bei der die η-Kugel in sich übergeht und die Achse Punkt für Punkt festbleibt).

5. Hier mögen, um gewisse spätere Auseinandersetzungen zu erleichtern, gleich folgende Ausführungen Platz finden. Man betrachte die vier Ebenen, in denen die Seiten $\infty' a'$, $a' b'$, $b' c'$, $c' \infty'$ des auf der Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks gelegen sind, und folgeweise die vier Raumgeraden, in denen sich zwei aufeinanderfolgende dieser vier Ebenen beziehungsweise schneiden. Ich nenne diese vier Raumgeraden die zu den Eckpunkten a', b' c', ∞' des Vierecks gehörigen *Achsen*. Jede dieser Achsen schneidet die Kugel noch in einem zweiten Punkte, und dieser mag beziehungsweise a'', b'', c'', ∞'' genannt werden. Was haben die Werte, die η in diesen verschiedenen Punkten annimmt, mit den zu den singulären Punkten a, b, c, ∞ gehörigen Fundamentallösungen von (1) zu tun?

Um hierauf zu antworten, überlege man, daß eine positive Umkreisung der Punkte a, b, c, ∞ der x-Ebene eine Drehung der η-Kugel um die Achsen $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $\infty'\infty''$ beziehungsweise von der Amplitude $2\alpha\pi$, $2\beta\pi$, $2\gamma\pi$, $2\delta\pi$ liefert (wobei der Sinn der Drehung für einen in a', bez. b' oder c' oder ∞' befindlichen Beobachter positiv ist). Hiermit halte man zusammen, daß bei den genannten Umkreisungen die Quotienten

$$\frac{Y_\alpha^a}{Y_0^a}, \quad \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}, \quad \frac{Y_\gamma^c}{Y_0^c}, \quad \frac{Y_{\delta'}^\infty}{Y_{\delta''}^\infty}$$

die Faktoren

$$e^{2i\pi\alpha}, \quad e^{2i\pi\beta}, \quad e^{2i\pi\gamma}, \quad e^{2i\pi\delta}$$

erhalten. Wir schließen: *in den Punkten a', b', c', ∞' der η-Kugel verschwinden beziehungsweise die Lösungen Y_α^a, Y_β^b, Y_γ^c, $Y_{\delta'}^\infty$, in den Punkten a'', b'', c'', ∞'' aber beziehungsweise die Lösungen Y_0^a, Y_0^b, Y_0^c, $Y_{\delta''}^\infty$.* Dabei müssen wir, da unser Viereck die Abbildung der positiven Halbebene x sein soll, alle vieldeutigen Funktionen so verstehen, wie sie bei analytischer Fortsetzung über diese Halbebene hin herauskommen.

6. Um das Gesagte in bestimmte Formeln zu fassen, will ich $Y_{\delta'}^\infty$ und $Y_{\delta''}^\infty$ bevorzugen. Es sei, bei analytischer Fortsetzung über die positive Halbebene x hin,

$$Y_\alpha^a \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \lambda_1 Y_{\delta''}^\infty, \quad Y_0^a \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \lambda_2 Y_{\delta''}^\infty$$

proportional, ebenso

$$Y_\beta^b \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \mu_1 Y_{\delta''}^\infty, \quad Y_0^b \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \mu_2 Y_{\delta''}^\infty,$$
$$Y_\gamma^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_1 Y_{\delta''}^\infty, \quad Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_2 Y_{\delta''}^\infty.$$

Wir setzen nun

$$\eta = \frac{Y_{\delta'}^\infty}{Y_{\delta''}^\infty}$$

und schließen, *daß dieses η in den Punkten*

$$a', a''; \quad b', b''; \quad c', c''; \quad \infty', \infty''$$

beziehungsweise die Werte annimmt:

$$\lambda_1, \lambda_2; \quad \mu_1, \mu_2; \quad \nu_1, \nu_2; \quad 0, \infty.$$

II. Unsere Fragestellung. Beispiel einer Differentialgleichung mit sechs singulären Punkten.

1. Ich erinnere nunmehr daran, daß ich in verschiedenen früheren Arbeiten die Aufmerksamkeit darauf lenkte (vergl. die obengenannte Autographie), wie sich die Oszillationsbedingungen, denen die einzelne reelle Partikularlösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Intervall $\overline{mn}$ der x-Achse genügt, in der Gestalt des zugehörigen

Kreisbogenpolygons der η-Ebene (oder η-Kugel) widerspiegeln. Man hat vor allem den Satz, daß auf jede Halboszillation des y eine Selbstüberschlagung des dem Intervall $\overline{mn}$ entsprechenden Stücks der korrespondierenden Seite des Kreisbogenpolygons kommt. Diese Überlegungen sollen hier an dem Beispiel der Differentialgleichung (1) in etwas veränderter Fassung wieder aufgenommen werden. Und zwar soll es sich um besondere Fälle der folgenden allgemeinen Fragestellung handeln:

Die Theorie der automorphen Funktionen (im weitesten Sinne genommen, worüber unten nähere Ausführungen) verlangt, über die in den linearen Differentialgleichungen auftretenden akzessorischen Parameter so zu verfügen, daß die entsprechenden Figuren auf der η-Kugel (im vorliegenden Fall unser Kreisbogenviereck) gewisse ausgezeichnete Eigenschaften erhält; wie weit kann man diese Forderungen mit dem Oszillationstheorem in Verbindung bringen, bez. die zugehörigen Existenztheoreme der automorphen Theorie aus dem Oszillationstheorem beweisen?

Es handelt sich also um eine Fortsetzung der Untersuchungen, die den Abschluß der Autographie von 1894 bilden. Wenn ich heute, nach so langer Zeit, auf diese Fragestellungen zurückkomme, so liegt dies daran, daß Hr. Hilbert neuerdings im Verfolg seiner Untersuchungen über Integralgleichungen zu hierher gehörigen Ansätzen gelangt ist (wie sogleich ausgeführt werden soll), und daß wir im Anschlusse daran letzthin in gemeinsamen Seminarübungen, an denen auch Hr. Minkowski teilnahm, die einschlägigen Fragen eben an dem einfachen Beispiel der Differentialgleichung (1) mit unseren fortgeschrittenen Studenten durchgesprochen haben. Ich hoffe sehr, daß hier Ansätze gewonnen sind, deren Verfolg zu einer vollen Aufklärung der bei der vorbezeichneten allgemeinen Fragestellung vorliegenden außerordentlich interessanten Verhältnisse führen kann.

2. Vorab möchte ich noch darauf hinweisen, daß ich den Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen der automorphen Funktionen bereits 1890 in einer Note in den Göttinger Nachrichten („Zur Theorie der Laméschen Funktionen", p. 90/93 daselbst) an einem anderen einfachen Beispiel kurz berührt habe.

Es handele sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit sechs reellen Verzweigungspunkten:

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad \infty,$$

deren jeder die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ aufweist, so daß wir als zugehörige Exponenten die folgenden wählen können:

$$\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{Bmatrix}.$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$(2)\quad y''+\frac{y'}{2}\left(\frac{1}{x-a}+\cdots+\frac{1}{x-e}\right)+\frac{y}{(x-a)\cdots(x-e)}\left(\frac{x^3}{2}+Bx^2+B'x+B''\right)=0.$$

Die Theorie der automorphen Funktionen behauptet, *daß man die drei hier auftretenden akzessorischen Parameter B, B', B'' auf eine und nur eine Weise so festlegen kann, daß die Abbildung der positiven Halbebene x in der η-Ebene folgende Gestalt annimmt:*

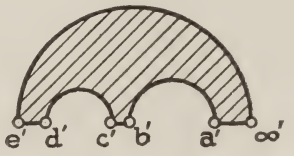


Fig. 2.

Man übersieht sofort, daß die Abbildung der gesamten x-Ebene, wofern man in ihr Einschnitte von a nach b, von c nach d und von e nach ∞ längs der reellen x-Achse anbringt, durch folgende Figur gegeben wird:

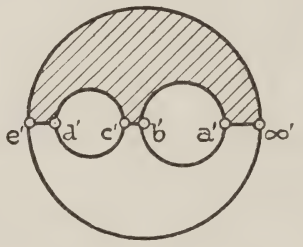


Fig. 3.

in der drei Vollkreise $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$, $\widehat{e'\infty'}$ auftreten. Es heißt dies, daß alle Partikularlösungen von (2), wenn man längs der x-Achse von a nach b und dann von b nach a zurückgeht — oder auch von c nach d und von da nach c zurück, bez. von e nach ∞ und von da nach e zurück — gerade eine Halboszillation ausführen. Solcherweise ist die automorphe Angabe also in mannigfacher Weise von seiten des Oszillationstheorems zu fassen. (Die Ausdehnung des Oszillationstheorems auf Intervalle, die zwischen zwei Verzweigungspunkten, mit den Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 hin- und hergehen, tritt schon in meiner ersten Arbeit über das Oszillationstheorem auf (1881, Math. Ann. Bd. 18; Über Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind).)

III. Über den besonderen Fall der Differentialgleichung (1) mit den Exponentendifferenzen (0, 0, 0, 0). (Hilbertsche Entwickelungen, automorphe Obertheoreme.)

1. Auf die *Beweise,* welche Hilbert für das Oszillationstheorem aus der Theorie der Integralgleichungen gewinnt, kann hier nicht eingegangen werden; man vergl. übrigens einige hierher gehörige Auseinandersetzungen, welche Hr. Hilb neuerdings in Bd. 63 dieser Annalen (p. 38 ff.: Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie) gegeben hat. Es soll hier nur von der besonderen Verbindung zwischen dem Oszillationstheorem und der Theorie der automorphen Funktionen die Rede sein, welche Hilbert für denjenigen Fall der Differentialgleichung (1) aufgefunden hat, *wo die Exponentendifferenzen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sämtlich Null sind* (also bei allen singulären Punkten logarithmische Glieder auftreten).

Wir wählen, dieser Annahme entsprechend, bei

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

als Exponenten

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

und haben so die Differentialgleichung:

$$(3) \qquad y'' + y'\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}(x+B) = 0.$$

Das zugehörige Kreisbogenviereck hat vier Spitzen, wie schematisch durch folgende Figur veranschaulicht sei:

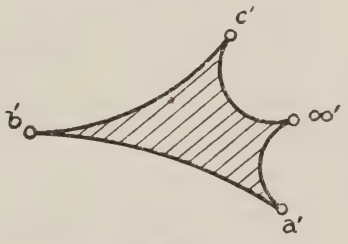


Fig. 4.

und es handelt sich nun, gemäß dem einfachsten Ansatze aus der Theorie der automorphen Funktionen, darum, den akzessorischen Parameter B so zu bestimmen, *daß das Viereck von einem durch die vier Ecken gehenden Orthogonalkreis umschlossen wird.*

2. Bemerken wir gleich, daß letztere Forderung sich von selbst in folgende zwei spaltet:

a) daß die vier Ecken überhaupt auf einem Orthogonalkreis gelegen sein sollen,

b) daß dieser Orthogonalkreis von keiner Seite des Kreisbogenvierecks durchsetzt werden soll (andernfalls erhält man die von mir so genannten, sogleich zu erläuternden automorphen Obertheoreme).

Ich erinnere ferner daran (cf. Fricke in den Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 412), daß die vier Ecken eines Kreisbogenvierecks mit lauter Nullwinkeln von selbst immer auf einem Kreise liegen; nur ist es im allgemeinen kein Orthogonalkreis.

Wir könnten nun auf die Erörterungen über das Kreisbogenviereck auf der Kugel zurückgreifen, die in I, 5 gegeben worden sind. Wir würden dann bemerken, daß im vorliegenden Falle die Punkte a' und a'', b' und b'', c' und c'', ∞' und ∞'' beziehungsweise zusammenfallen, so daß die vier Achsen des Vierecks in *Kugeltangenten* verwandelt sind. Ich komme hernach hierauf beiläufig zurück, begnüge mich aber übrigens im vorliegenden Falle, wo die geometrischen Verhältnisse so besonders einfach sind, damit, das Kreisbogenviereck in der Ebene zu betrachten.

3. Gemäß den Angaben in I, 3 dürfen wir das Intervall $\overline{mn}$ der x-Achse, auf welches das Oszillationstheorem bezogen werden soll, im vorliegenden Falle nur so bis an singuläre Punkte der Differentialgleichung heranerstrecken, daß wir für die in Betracht kommende Partikularlösung y das Auftreten logarithmischen Verhaltens ausschließen, d. h. (mit Rücksicht auf die Werte der Exponenten) verlangen, daß die Partikularlösung im betreffenden singulären Punkt endlich bleibt.

Das Neue an dem nunmehr zu besprechenden Hilbertschen Ansatze ist nun, daß das Intervall $\overline{mn}$ nicht nur in dem so geschilderten Sinne beiderseits bis an singuläre Punkte herangezogen wird, sondern *daß es zugleich über einen singulären Punkt hinübergezogen wird.* Ich will der bequemeren Zeichnung wegen für diesen im Intervall gelegenen singulären Punkt den Punkt b wählen (an sich könnte ein beliebiger anderer singulärer Punkt genommen werden); wir haben dann nachstehendes Intervall:

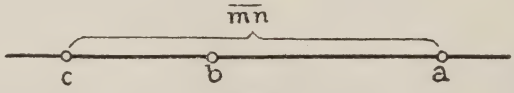


Fig. 5.

Und zwar wird nicht etwa verlangt, daß die in Betracht zu ziehende Partikularlösung y in dem in der Mitte gelegenen singulären Punkt (also in b) endlich ist, vielmehr nur, *daß sie über diesen Punkt hinüber in charakteristischer Weise diskontinuierlich fortgesetzt werden soll.*

Die Regel hierfür ist einfach folgende: Hat y rechts von b die Darstellung:

(4) $$y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(x-b)\cdot\mathfrak{P}_2(x-b)$$

(wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen mit reellen Koeffizienten sind), so soll links von b die Darstellung gelten:

(4′) $$y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(b-x)\cdot\mathfrak{P}_2(x-b).$$

Der Verlauf von y wird also schematisch durch folgende Figur gegeben sein:

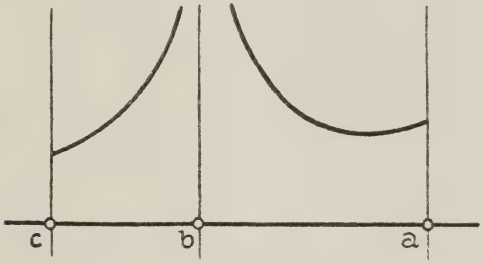


Fig. 6.

(y bei a und c endlich, bei b mit der charakteristischen Unstetigkeit behaftet).

4. Da wir y bei $x = b$ in der vorstehenden Figur positiv unendlich genommen haben, so ist $\mathfrak{P}_2(x-b)$ in der Nähe von $x = b$ negativ (was sogleich zur Geltung kommen wird). Andererseits haben wir die Figur so skizziert, daß weder zwischen a und b, noch zwischen b und c eine Nullstelle von y liegt. Das Oszillationstheorem würde gestatten, in eines dieser beiden Segmente eine beliebige Anzahl von Nullstellen zu verlegen (wobei dann das andere Segment, wie man zeigen kann, von Nullstellen frei bleibt). Aber dies führt, beim Übergange zum η-Viereck, zu den bereits in Aussicht gestellten „Obertheoremen“ und mag hier vorläufig noch ausgeschlossen sein.

Die Hilbertsche Behauptung ist nun, daß dem Auftreten einer solcherweise definierten Partikularlösung y von (3) bei unserem Kreisbogenviereck genau das Vorhandensein eines umschließenden Orthogonalkreises entspricht.

5. Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung auf folgende Weise einsehen. Wir stellen neben das definierte y diejenige Partikularlösung (y), welche in der Nähe von b durch $\mathfrak{P}_2(x-b)$ gegeben ist, also bei $x = b$ endlich ist und sich ohne Diskontinuität über b hinüber fortsetzt. Bei $x = a$ und bei $x = c$ wird dieses (y) — weil es doch von der dort endlich bleibenden Lösung y verschieden ist — notwendig unendlich werden.

Wir setzen nun im Intervalle $\overline{ab}$

(5) $$\eta = \frac{y}{(y)}$$

und haben für alle anderen Punkte der Halbebene x — weil wir doch

ein zusammenhängendes Abbild dieser Halbebene in der η-Ebene entwerfen wollen — unser η durch analytische Fortsetzung *über die genannte Halbebene hin* zu erklären. Es kommt dies wegen der charakteristischen Unstetigkeit, die wir in die Definition der reellen Funktion y beim Übergange von $\overline{ab}$ zu $\overline{bc}$ aufgenommen haben, darauf hinaus, daß wir im Intervalle $\overline{bc}$ setzen müssen:

$$\eta = \frac{y + i\pi(y)}{(y)} = \frac{y}{(y)} + i\pi. \tag{5'}$$

Unser η ist also im Intervalle $\overline{bc}$ nicht mehr reell, sondern hat den konstanten imaginären Bestandteil $i\pi$.

Jetzt ist es leicht, das Kreisbogenviereck der η-Ebene, welches der positiven Halbebene x entspricht, seiner allgemeinen Gestalt nach festzulegen. Wir überlegen zunächst, daß unser η, wenn x längs der reellen Achse von b bis a geht — nach den Angaben, die wir über das Verhalten von y und (y) an den beiden Enden gemacht haben — auf reellem Wege von $-\infty$ bis 0 läuft. Und zwar handelt es sich nur um die einfach durchlaufene Strecke von $-\infty$ bis 0, nicht um eine einfache oder mehrfache Umspannung der ganzen reellen Achse. Denn sonst müßte y im Inneren des Intervalles $\overline{ab}$ Nullstellen haben, was wir doch ausdrücklich ausgeschlossen haben. Wir überlegen ferner, daß für die Differenz $\eta - i\pi$, wenn x längs der reellen Achse von b bis c geht, genau dasselbe gesagt werden kann. Damit haben wir für das Kreisbogenviereck der η-Ebene folgende zwei Begrenzungskanten festgelegt:

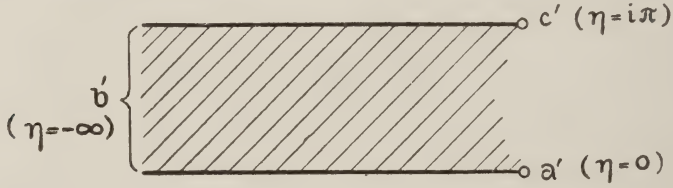


Fig. 7.

und das Viereck hat notwendigerweise eine Gestalt folgender Art:

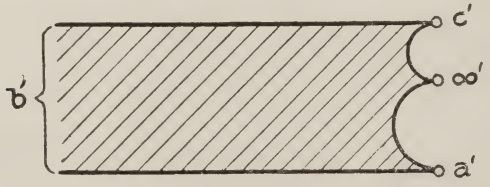


Fig. 8.

Hier sieht man, *daß die Ecken a', b', c', ∞' in der Tat auf einem Orthogonalkreise liegen, der das Viereck nirgends durchsetzt*, nämlich auf der geraden Linie, welche die Punkte a', ∞', c' verbindet, w. z. b. w.

6. Hiermit ist das Grundtheorem der automorphen Funktionen im vorliegenden Falle erledigt. Was aber die in Aussicht gestellten *Obertheoreme* angeht, so entstehen dieselben, wenn man der Partikularlösung y außer ihrem Verhalten an den Stellen a, b, c im Intervalle $\overline{ab}$ bez. $\overline{bc}$ eine beliebige Anzahl von Nullstellen auferlegt. Es handelt sich dann, allgemein zu reden, um Kreisbogenvierecke mit den Winkeln (0, 0, 0, 0), welche ihren Orthogonalkreis ein- oder mehreremal durchsetzen. Die Obertheoreme besagen (wenn ich es zunächst in dieser unbestimmten Form ausdrücken darf), daß man den akzessorischen Parameter B in (3) immer auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß ein sich selbst überschlagendes Viereck von bestimmtem Typus herauskommt. (Daß Obertheoreme dieser Art existieren, habe ich bereits in einer Vorlesung über lineare Differentialgleichungen, die ich 1890/91 hielt, nach verschiedenen Richtungen ausgeführt; diese Vorlesung ist s. Z ebenfalls autographiert worden; ich habe sie aber, da sie vielfach nur vorläufige Ideen enthielt, nie in den Buchhandel gebracht: trotzdem findet man gelegentliche Zitate daraus, z. B. auch in dem bereits genannten Bôcherschen Encyklopädieartikel.)

7. Um dies genauer auszuführen, will ich dem y zunächst zwischen b und c eine (und nur eine) Nullstelle auferlegen. Gleichzeitig möge Fig. 8 durch die folgende äquivalente, aber für den vorliegenden Zweck bequemere Figur ersetzt sein:

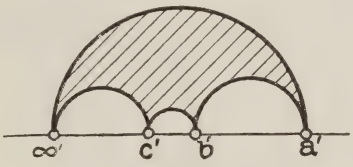


Fig. 9.

Dem neuen y muß ein Viereck entsprechen, das sich von dem so gezeichneten außer durch zweckmäßige Verschiebung der Punkte a', b', c', ∞' dadurch unterscheidet, daß sich die Kreisbogenseite $\overline{b'c'}$ einmal überschlägt. Dies ist nicht anders möglich (aus allgemeinen gestaltlichen Gründen), als wenn sich die gegenüberstehende Seite $a'\infty'$ auch einmal überschlägt. Wir erhalten ein Viereck von folgendem Typus:

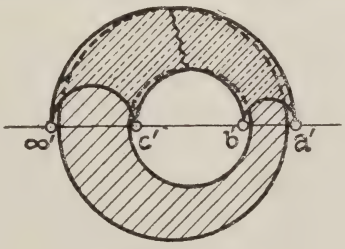


Fig. 10.

von dem wir sagen, daß es aus dem Grundtypus, Fig. 9, *durch Einhängung eines Kreisringes quer zu den Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ entstanden sei* (durch Einhängung eines Kreisringes entlang einem Verzweigungsschnitt, der die Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ quer verbindet). — Vermehrt man jetzt die Zahl der Nullstellen, welche y im Intervalle $\overline{bc}$ besitzen soll, so kommt das darauf hinaus, daß dem Polygon in der geschilderten Weise eine entsprechend größere Zahl von Kreisringen eingehängt werden soll. *Hiermit haben wir über eine erste unendliche Serie von Oberpolygonen, und über die Aussage der entsprechenden Obertheoreme, eine volle Übersicht.*

Die zweite (ebenso unendliche) Serie kommt hervor, wenn wir dem y im Intervalle $\overline{ab}$ Nullstellen in wachsender Zahl auferlegen. Wieder handelt es sich darum, einem Grundviereck vom Typus der Fig. 9 Kreisringe in beliebiger Zahl einzuhängen, dieses Mal quer zu $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'\infty'}$, also entlang etwa dem in folgender Figur gezeichneten Verzweigungsschnitte:

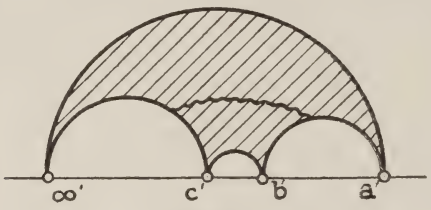


Fig. 11.

Als „Kreisring“ ist hier natürlich ein Ebenenteil bezeichnet, der sich durchs Unendliche zieht und die über $\overline{a'b'}$ bez. $\overline{c'\infty'}$ stehenden Kreise von außen umgibt.

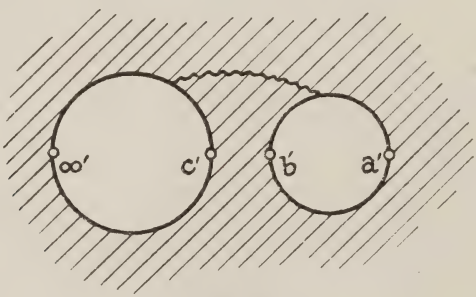


Fig. 12.

8. Es erübrigt noch zu bemerken, daß die Polygone, welche von den Obertheoremen geliefert werden, wenn man sie nach dem Gesetz der Symmetrie unbegrenzt vervielfältigt, unendlich-vielblättrige Überdeckungen ihrer Ebene liefern, so daß man mit ihnen aus der Theorie der *eindeutig umkehrbaren* und überhaupt der *endlichdeutig umkehrbaren automorphen Funktionen* heraustritt. Es ist ein Schritt in das allgemeine Gebiet hinein,

das ich überhaupt der Aufmerksamkeit des Mathematikers nachdrücklich empfehlen möchte: man fragt nach den Nichteuklidischen Abmessungen, die das einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entsprechende Kreisbogenpolygon — oder allgemeiner: der ihr entsprechende Fundamentalbereich —, besitzen mag, insbesondere nach der funktionalen Abhängigkeit, die zwischen diesen Abmessungen und den Werten der akzessorischen Parameter der Differentialgleichung besteht.

IV. Inangriffnahme des allgemeinen Falles der Differentialgleichung (1). (Die Involutionsbedingung.)

1. Es soll sich nunmehr darum handeln, für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (1), wo die α, β, γ, δ sämtlich > 0 (aber < 1) sind, ebenfalls einen Zusammenhang zwischen der Forderung, daß das Kreisbogenviereck einen Orthogonalkreis haben soll, und dem Oszillationstheorem herzustellen. Wir werden eine Regel erhalten, die im Grenzfalle (0, 0, 0, 0) natürlich in den unter III. gegebenen Hilbertschen Ansatz übergeht. Aber die Sache ist doch wesentlich komplizierter als in diesem Grenzfalle und bedarf dementsprechend einiger Vorbereitung.

2. Wir denken uns das Kreisbogenviereck jetzt, wie bereits unter I, 4 erörtert, auf der η-Kugel gelegen. Wir werden einen Orthogonalkreis haben, sobald die vier Seitenebenen des Vierecks in einen Punkt zusammenlaufen (dessen Polarebene hinsichtlich der η-Kugel aus dieser dann den gewünschten Orthogonalkreis ausschneidet). Je nachdem der in Rede stehende Schnittpunkt außerhalb der Kugel, auf der Kugel oder innerhalb derselben liegt, haben wir einen eigentlichen (reellen) Orthogonalkreis, einen Orthogonalkreis, der sich auf einen Punkt zusammenzieht, oder auch einen imaginären Orthogonalkreis. Wir werden im folgenden die Figuren immer für den ersten dieser drei Fälle entwerfen, der für die Theorie der automorphen Funktionen der interessanteste ist und in der Tat bei dem unter III behandelten Spezialfall von selbst vorliegt. Man beachte, daß der Kegel, der sich in diesem Falle vom Schnittpunkte der vier Ebenen an die Kugel legen läßt, reell ist und also die projektive Maßbestimmung, die man für die Ebenen und Strahlen des Punktes auf diesen Kegel gründen kann, hyperbolisch ausfällt.

Statt der vier Seitenebenen betrachten wir jetzt die vier Achsen, die wir oben mit $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $\infty'\infty''$ bezeichneten, d. h. die Durchschnittsgeraden der aufeinander folgenden Ebenen. Jede dieser Achsen wird gemäß ihrer Definition von der vorangehenden und der nachfolgenden geschnitten, z. B. die Achse $\infty'\infty''$ (die wir fernerhin auszeichnen wollen) einerseits von $c'c''$, andererseits von $a'a''$. Schneiden sich

aber die vier Seitenebenen des Vierecks in einem Punkte, so laufen auch $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in diesem Punkte zusammen (durch den dann natürlich auch $b'b''$ geht). Umgekehrt ist ersichtlicherweise das Zusammenlaufen von $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in einem Punkt die hinreichende Bedingung dafür, daß es einen gemeinsamen Schnittpunkt der vier Ebenen gibt. *Wir werden also das Zusammenlaufen der drei Achsen verlangen.*

3. Ich werde diese geometrische Forderung jetzt in besonderer Weise analytisch ausdrücken. Nach den unter I, 6 gegebenen Entwickelungen gehören zu den Punkten

$$c',\ c'';\quad \infty',\ \infty'';\quad a',\ a''$$

als zugehörige η-Werte

$$\nu_1,\ \nu_2;\quad 0,\ \infty;\quad \lambda_1,\ \lambda_2.$$

Dabei wissen wir, daß einerseits c', c'', andererseits a', a'' mit ∞', ∞'' je in einer Ebene liegen. Die beiden Ebenen bilden miteinander den (Nichteuklidischen) Winkel $\delta\pi$. Ich will nun die Ebene $\infty'\infty''a'a''$ — oder vielmehr den Kreis, in welchem sie die η-Kugel schneidet — als „Meridian der reellen Zahlen" wählen. Dann sind λ_1, λ_2 reelle Größen und ich schreibe, um dies hervorzuheben:

$$\lambda_1 = l_1,\quad \lambda_2 = l_2. \tag{6}$$

Dagegen sind ν_1, ν_2 Produkte reeller Größen n_1, n_2 in den Faktor $e^{-i\pi\delta}$:

$$\nu_1 = n_1 e^{-i\pi\delta},\quad \nu_2 = n_2 e^{-i\pi\delta}. \tag{6'}$$

Man denke sich nun die Ebene $\infty'\infty''c'c''$ um die Achse $\infty'\infty''$ in den Meridian der reellen Zahlen hinübergedreht. So entstehen aus c', c'' zwei Punkte auf diesem Meridian, die wir der Kürze wegen ebenfalls c', c'' nennen wollen; die Anordnung soll folgende sein:

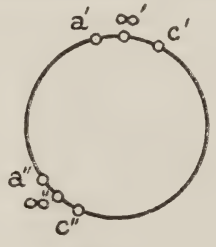


Fig. 13.

Dabei gehören zu den Punkten ∞', ∞''; a', a''; c', c'' dieser Figur die reellen η-Werte $0, \infty$; l_1, l_2; n_1, n_2. Wir haben nicht mehr und nicht minder zu verlangen, *als daß die in der Figur zu konstruierenden Verbindungsgeraden* ∞', ∞''; $a'a''$; c', c'' *in einen Punkt zusammenlaufen*; anders ausgedrückt: *daß die Punktepaare* ∞', ∞''; a', a''; c', c'' *auf dem Kegelschnitte drei Paare einer Involution bilden.* Nun drückt sich aber letzteres in bekannter Weise durch die *Involutionsbedingung*

(7) $$l_1 l_2 = n_1 n_2$$

aus, womit wir die analytische Formulierung für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises haben.

4. Diese Bedingung verwandelt sich nun vermöge I, 6 sofort in eine Aussage über die gegenseitigen Beziehungen der zu den singulären Punkten ∞, a und c gehörigen Fundamentallösungen von (1). Um diese Aussage bequem zu fassen, empfiehlt sich noch eine bestimmte Verabredung über die Festlegung der zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentallösungen, — eine Verabredung, die dem Wesen nach mit der Hilbertschen Festsetzung für den Fall (0, 0, 0, 0) stimmt, die in den Formeln (4), (4′) ihren Ausdruck fand, und die andererseits das genaue Äquivalent ist für die gerade eben vollzogene Drehung um die Achse $\infty' \infty''$, durch die c', c'' auf den Meridian der reellen Zahlen zu liegen kamen. Wir setzen nämlich fest:

Mögen $Y^{\infty}_{\delta'}$, $Y^{\infty}_{\delta''}$ für (hinreichend große) positive reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty a}$ durch Formeln folgender Art erklärt sein:

(8) $$Y^{\infty}_{\delta'} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \qquad Y^{\infty}_{\delta''} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right),$$

unter $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten verstanden, so soll für (hinreichend große) negative reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty c}$ folgende Definition gelten:

(8′) $$Y^{\infty}_{\delta'} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \qquad Y^{\infty}_{\delta''} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right).$$

Hiernach müssen diejenigen Funktionswerte, die sich aus den Lösungen (8) durch analytische Fortsetzung über die positive x-Halbebene hin für das Intervall $\overline{\infty c}$ ergeben, fortan mit

$$e^{-i\pi\delta'} \cdot Y^{\infty}_{\delta'} \quad \text{bez.} \quad e^{-i\pi\delta''} Y^{\infty}_{\delta''}$$

bezeichnet werden.

Nun haben wir früher (in I, 6) festgesetzt, daß in der positiven Halbebene x

$$Y^{c}_{\gamma} \text{ mit } Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_1 Y^{\infty}_{\delta''}, \qquad Y^{c}_{0} \text{ mit } Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_2 Y^{\infty}_{\delta''},$$

proportional sein solle. Wir werden das jetzt für das reelle Intervall $\overline{\infty c}$, indem wir dieses als Begrenzung der Halbebene auffassen, gemäß (8′) dahin aussprechen, daß

$$Y^{c}_{\gamma} \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_1 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y^{\infty}_{\delta''},$$
$$Y^{c}_{0} \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_2 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y^{\infty}_{\delta''},$$

oder, was dasselbe ist, daß

$$Y^{c}_{\gamma} \text{ mit } Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_1 \cdot e^{i\pi\delta} \cdot Y^{\infty}_{\delta''},$$
$$Y^{c}_{0} \text{ mit } Y^{\infty}_{\delta'} - \nu_2 \cdot e^{i\pi\delta} \cdot Y^{\infty}_{\delta''}$$

proportional sein solle.

Aber $v_1 e^{i\pi\delta}$ und $v_2 e^{i\pi\delta}$ sind gerade die reellen Beträge, die wir in (6′) mit n_1 und n_2 bezeichnet haben (während in (6) für die an sich reellen Größen λ_1, λ_2 die Bezeichnungen l_1, l_2 eingeführt wurden). So resumiert sich also die Sachlage folgendermaßen:

Definiert man $Y_{\delta'}^{\infty}$, $Y_{\delta''}^{\infty}$ für das Intervall $\overline{\infty a}$ durch die Formeln (8), *für das Intervall $\overline{\infty c}$ durch die Formeln* (8′), *so werden die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen mit reellen Verbindungen der $Y_{\delta'}^{\infty}$, $Y_{\delta''}^{\infty}$ proportional. Nämlich*

$$Y_{\alpha}^{a} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - l_1 Y_{\delta''}^{\infty}, \qquad Y_0^a \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - l_2 Y_{\delta''}^{\infty}$$

und

$$Y_{\gamma}^{c} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - n_1 Y_{\delta''}^{\infty}, \qquad Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - n_2 Y_{\delta''}^{\infty}.$$

Unser Kreisbogenviereck wird dann und nur dann einen Orthogonalkreis haben, wenn zwischen den so definierten Größen l, n die Involutionsbedingung (7) *besteht.*

5. Die so gewonnene Aussage ist an sich so einfach wie möglich; sie ist auch ausschließlich auf die reellen Lösungen von (1) bezogen; sie hat aber doch noch nicht die Form, welche für einen Ansatz im Sinne des Oszillationstheorems brauchbar ist. Denn das Oszillationstheorem bezieht sich immer auf eine *einzelne* Lösung von (1), während hier sechs Lösungen nebeneinander betrachtet werden. Wir werden das Resultat also noch weiter umsetzen müssen, wie in den folgenden beiden Abschnitten geschehen soll.

Vorher bemerken wir noch, daß die Bedingung, die wir in III für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises in dem besonderen Falle (0, 0, 0, 0) erhielten, mit dem nunmehr gewonnenen allgemeinen Resultat übereinstimmt. Man knüpfe, um dies zu sehen, etwa an Fig. 13 an. Im Falle (0, 0, 0, 0) sind hier die Achsen $\infty'\infty''$, $a'a''$, $c'c''$ alle drei *Tangenten* des Meridians der reellen Zahlen. Sollen dieselben außerdem durch einen Punkt gehen, so ist das, gemäß der Entstehung der Figur, nur so möglich, daß die Achsen $a'a''$ und $c'c''$ zusammenfallen. Beachten wir noch, daß wir jetzt für jeden singulären Punkt nur eine (doppeltzählende) Fundamentallösung haben, zu der als zweite Lösung eine solche mit logarithmischem Gliede tritt. Die (doppeltzählenden) Fundamentallösungen für die Punkte a und c werden mit Y_0^a und Y_0^c, die Fundamentallösung für den Punkt ∞ mit Y_1^{∞} zu bezeichnen sein. Die zum Punkte ∞ gehörige Lösung $Y_{\log}^{\infty}$ wird, im Sinne von (8), (8′) oder von (4), (4′), so zu definieren sein, daß sie sowohl im Intervalle $\overline{\infty a}$ als im Intervalle $\overline{\infty c}$ reell ausfällt. Wir haben dann:

Soll ein Orthogonalkreis vorhanden sein, so müssen die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen Y_0^a und Y_0^c derselben linearen Verbindung von Y_1^{∞} und $Y_{\log}^{\infty}$ proportional sein.

Und das ist gerade der Sinn der Fig. 6. Nur ist dort statt des Punktes ∞, den wir hier auszeichneten, als Vergleichspunkt der Punkt b gewählt, für den sich das Sachverhältnis bequemer zeichnen ließ.

V. Vorbereitungen zur Adaptierung des gewonnenen Ansatzes an das Oszillationstheorem. (Abwicklung des Vierkants; Fortsetzung der reellen Lösungen von (1) über die singulären Punkte hinweg.)

1. Um die in IV. erhaltene Involutionsbedingung der Form nach an den Ansatz des Oszillationstheorems anzupassen, werden wir jetzt unsere geometrische Betrachtung und die analytische Behandlung parallel zueinander in gewisser Weise weiter entwickeln.

2. Die Fig. 13 entstand, indem wir die Achse $c'c''$ so um die Achse $\infty'\infty''$ herumdrehten, daß sie, gleich der Achse $a'a''$, in die Ebene der reellen η-Werte fiel. Indem wir durchweg mit Nichteuklidischen Vorstellungen operieren, wollen wir uns vorstellen, daß unser ganzes Vierkant wie ein starrer Körper dieser Drehung unterworfen werde. Dann ist in Fig. 13 das Stück $\infty'c'$ des Meridians der reellen Zahlen eine *Abwicklung* der gleichbenannten Seite unseres auf der η-Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks (während das Stück $a'\infty'$ des Meridians von Hause aus eine Seite des Kreisbogenvierecks ist). Wir wollen mit dieser Abwicklung nun fortfahren, indem wir das Vierkant in seiner neuen Lage um $c'c''$ drehen, bis die Punkte b', b'' desselben in zwei Punkte des Meridians der reellen Zahlen fallen, die wir der Kürze wegen ebenfalls mit b', b'' bezeichnen. Dann drehen wir das Vierkant um die so erhaltene neue Achse $b'b''$ und bringen wieder a', a'' auf den Meridian der reellen Zahlen, wo sie jetzt a_1', a_1'' genannt werden sollen. Folgeweise drehen wir um a_1', a_1'' und erhalten zwei Punkte ∞_1', ∞_1'' unseres Meridians, usw. usw. *Wir bekommen auf unserem Meridian eine unendliche Reihe von Punktepaaren:*

$$a', a''; \quad \infty', \infty''; \quad c', c''; \quad b', b''; \quad a_1', a_1''; \quad \infty_1', \infty_1''; \quad \cdots,$$

die wir natürlich auch nach der negativen Seite unbegrenzt fortsetzen können, und damit eine unbegrenzte Abwicklung der Peripherie unseres Kreisbogenvierecks auf unseren Meridian. Man vergleiche folgende (schematische) Figur:

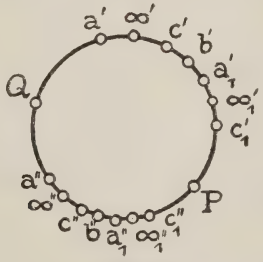


Fig. 14.

3. Schließlich ist auf solche Weise jedes der vier Segmente $\overline{a\infty}$ $\overline{\infty c}$, $\overline{cb}$, $\overline{ba}$ der reellen x-Achse unendlich oft auf den Meridian der reellen η-Werte übertragen. Und da jeder vollen Abrollung unseres Vierkants eine bestimmte Nichteuklidische Bewegung entspricht, die unseren Meridian in sich überführt, so gehen die unendlich vielen reellen Werte von η, die solcherweise dem einzelnen reellen x zugeordnet sind, aus dem einzelnen η durch wiederholte Anwendung einer bestimmten reellen linearen Substitution hervor: *Das reelle x ist eine linear-automorphe Funktion des reellen η.* Schließlich häufen sich, wenn die Verhältnisse so liegen, wie sie in der Figur gewählt sind, die zu demselben x gehörigen η-Punkte nach rechts und links hin gegen zwei Grenzpunkte P und Q, die in der Figur bereits markiert sind; es sind dies die Fixpunkte der in Rede stehenden linearen Substitution.

4. Ist nun bei unserem Kreisbogenviereck insbesondere ein Orthogonalkreis vorhanden, so hat das zur Folge, daß alle die unendlich vielen Punktepaare

$$\cdots a', a''; \quad \infty', \infty''; \quad c', c''; \cdots$$

zu P und Q harmonisch sind. Umgekehrt können wir infolgedessen die Bedingung, daß ein Orthogonalkreis vorhanden sei, auf sehr verschiedene Weisen aussprechen, worauf wir im Schlußabschnitt zurückkommen.

5. Wir wollen vorab den analytischen Ansatz ebenso weit fördern. Da ist das erste Hilfsmittel, daß wir in Übereinstimmung mit (8), (8′) eine Verabredung treffen, welche genau der festgesetzten Abwickelung unseres Vierecks auf den Meridian der reellen Zahlen entspricht. Wir werden jetzt nämlich nicht nur $Y_{0'}^{x}$, $Y_{0''}^{x}$ auf der reellen x-Achse so definieren, daß sie beiderseits vom Punkte ∞ reell sind, sondern in entsprechender Weise hinsichtlich der Umgebungen der Punkte a, b, c die zu a, b, c gehörigen Fundamentallösungen. Wir setzen also z. B. für $x = a$:

rechts von a:

$$Y_{\alpha}^{a} = (x-a)^{\alpha}\mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_{0}^{a} = \mathfrak{P}_2(x-a), \tag{9}$$

und links von a

$$Y_{\alpha}^{a} = (a-x)^{\alpha}\mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_{0}^{a} = \mathfrak{P}_2(x-a), \tag{9′}$$

unter $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten verstanden.

6. Durch diese Verabredung erreichen wir in der Tat, daß wir jede reelle Lösung y von (1) entlang der reellen x-Achse über jeden singulären Punkt mit einer charakteristischen Unstetigkeit reell fortsetzen können. Ist z. B., wenn wir von rechts an a herankommen,

$$y = c_\alpha Y_{\alpha}^{a} + c_0 Y_{0}^{a},$$

so werden wir durch eben diese Formel das y links von a erklären etc. etc.

Schließlich können wir so die einzelne reelle Lösung y für unbegrenzt wiederholte, positive oder negative Durchlaufung der genannten x-Achse immer weiter verfolgen.

7. Um von hier aus Anschluß an die Figur (14) zu erhalten, haben wir nur das in I, 6 vorgeführte η:

$$\eta = \frac{Y_{\delta'}^{\infty}}{Y_{\delta''}^{\infty}}$$

im Sinne der nun getroffenen Verabredungen unbegrenzt an der reellen X-Achse entlang zu verfolgen.

VI. Riccati-Kurven.

1. Die soeben gegebene geometrische und analytische Entwicklung gehen, wie gesagt, durchaus parallel, aber der nähere Vergleich wird schleppend, weil den einfach unendlich vielen reellen Werten von η *zweifach* unendlich viele reelle Lösungen von (1):

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

gegenüberstehen. Wir werden diesen Umstand vermeiden, wenn wir jetzt statt der Lösungen von (1) die Lösungen der zugehörigen *Riccatischen Gleichung*

$$z = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 y'_1 + c_2 y'_2} \tag{10}$$

ins Auge fassen.

Den Inbegriff vermöge (10) zusammengehöriger reeller Werte von z und x nenne ich *Riccati-Kurve*. Die Riccati-Kurven ziehen sich vermöge der in V getroffenen Festsetzungen über die singulären Werte $x = a, b, c, \infty$ reell hinweg. Und dabei liegen insofern besonders anschauliche Verhältnisse vor, als durch jeden nicht singulären Punkt der Ebene (z, x), — d. h. durch jeden Punkt, dessen x von a, b, c, ∞ verschieden ist —, nur *eine* Riccati-Kurve geht. Die Ebene (z, x) wird, von diesen singulären Stellen abgesehen, die besonderer Untersuchung bedürfen, von den Riccati-Kurven gerade einfach überdeckt. Dabei enthält die Formel (10) ohne weiteres ein übrigens wohlbekanntes geometrisches Gesetz: *Die durch* (10) *gegebenen einfach unendlich vielen Riccati-Kurven schneiden eine beliebige* (*nicht singuläre*) *Vertikale* $x = X$ *in einer Punktreihe, die zu den Werten* $\frac{c_1}{c_2}$ *projektiv ist.* — Wir können natürlich ebenso wohl sagen, daß die Punktreihe den Werten $-\frac{c_2}{c_1}$ projektiv sei.

2. Man schreibe jetzt in (10) für $-\frac{c_2}{c_1}$ den Buchstaben η, also:

$$z = \frac{y_1 - \eta y_2}{y_1' - \eta y_2'}, \tag{11}$$

wo η reell sein soll. Die durch den einzelnen Wert dieses η festgelegte Riccati-Kurve schneidet die x-Achse da, wo $y_1 - \eta y_2 = 0$ ist, wo also η gerade gleich dem Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ ist. Hiermit aber nimmt der soeben ausgesprochene Satz die folgende einfache Form an, welche die volle Verbindung mit der Betrachtung von V, speziell der Figur (14), herstellt:

Ordnet man jedem reellen Punkte der x-Achse diejenige Riccati-Kurve (11) *zu, die durch ihn hindurchgeht, so schneidet die Schar der Riccati-Kurven eine beliebige nicht singuläre Vertikale $x = X$ in einer Punktreihe, welche zu der entsprechenden, in* (14) *auf dem Meridian der reellen Zahlen gelegenen Punktreihe direkt projektiv ist.*

3. Hiernach lassen sich alle Einzelheiten der Figur 14 auf die Schar unserer Riccati-Kurven übertragen. Beispielsweise entsprechen den Punkten $a', a_1', \cdots$ der Fig. 14 die Schnittpunkte, welche unsere Vertikale $x = X$ bei immer wiederholter Durchlaufung der gesamten x-Achse mit derjenigen Riccati-Kurve hat, die der Lösung y_α^a von (1) entspricht. Alle die Forderungen, die wir hinsichtlich der involutorischen Lage der Punktepaare von Fig. 14 erhoben, übertragen sich, etc. etc.

4. Mehr beiläufig will ich geltend machen, daß sich das Oszillationstheorem in seiner ursprünglichen Fassung (I, 3) in besonders einfacher Weise auf die Riccati-Kurven überträgt. In der Tat, wenn dasselbe in den Endpunkten eines Intervalls $\overline{mn}$ der x-Achse die Werte vorschreibt, die der Quotient $\frac{y}{y'}$ für ein geeignetes y annehmen soll, so heißt das jetzt einfach, daß eine Riccati-Kurve existieren soll, die für $x = m$ und $x = n$ vorgegebene Ordinaten z aufweist, d. h. die zwei gegebene Punkte der Ebene (x, z) verbindet. Den Nullpunkten aber, die man dem y im Intervalle $\overline{mn}$ auferlegen mag, entsprechen direkt Nullpunkte des z, also Schnittpunkte der Riccati-Kurve mit der x-Achse.

VII. Endgültige Adaptierung der Involutionsbedingung (7) an das Oszillationstheorem.

1. Gemäß IV, 5 wird die Aufgabe, die wir noch zu lösen haben, darin bestehen, daß wir die Involutionsbedingung (7) in eine Bedingung für eine *einzelne* Lösung von (1), oder vielmehr jetzt für eine *einzelne* Riccati-Kurve umsetzen.

Dies läßt sich nunmehr folgendermaßen erreichen:

2. Ich scheide aus der Betrachtung der Fig. 14 zunächst alle Punkte aus, die mit b oder c oder ∞ bezeichnet sind, d. h. ich betrachte nur die Punkte $a', a_1', a_2', \cdots$ und $a'', \cdots$. Will ich von den Punkten $a', a_1', a_2', \cdots$ aus die Grenzelemente P, Q der Figur festlegen, so werde

ich vier aufeinanderfolgende Punkte, etwa a', a_1', a_2', a_3' gebrauchen. P und Q sind die Fixpunkte derjenigen Kollineation unseres Kegelschnittes (d. h. des Meridians der reellen η-Werte) in sich, bei der a' in a_1', a_1' in a_2', a_2' in a_3' übergeht. Man konstruiere jetzt (auf unserem Kegelschnitt) zu a' hinsichtlich P und Q den vierten harmonischen Punkt. *Dann deckt sich die Involutionsbedingung* (7) *mit der Forderung, daß dieser vierte harmonische Punkt mit a'' zusammenfällt.*

3. Es erübrigt, diese Forderung in die Sprache der Riccati-Kurven zu übertragen. *Wir verlangen, daß eine mit bestimmten Unstetigkeiten behaftete Riccati-Kurve bei $x = a$ bestimmte Grenzbedingungen befriedige.* Die Kurve soll bei $x = a$ gemäß der Formel

$$z = Y_\alpha^a : \frac{d\, Y_\alpha^a}{dx}$$

beginnen. Wir verfolgen den Verlauf der Kurve, indem wir viermal hintereinander an der x-Achse entlang laufen (wobei wir an den singulären Stellen a, b, c, ∞ die ein für alle Mal verabredeten Diskontinuitäten anbringen). Auf einer beliebig anzunehmenden nicht singulären Vertikalen $x = X$ mögen dabei vier Schnittpunkte mit der Riccati-Kurve entstehen, die ich a', a_1', a_2', a_3' nenne. Ich suche mir jetzt auf der Vertikalen die Doppelelemente P, Q derjenigen Kollineation, welche a' in a_1', a_1' in a_2', a_2' in a_3' überführt. Ich konstruiere mir ferner hinsichtlich dieser P, Q auf der Vertikalen zu a' den vierten harmonischen Punkt, den ich a'' nenne. Ich unterbreche jetzt den stetigen Verlauf meiner Riccati-Kurve, indem ich von a_3' zu a'' überspringe und nun längs der x-Achse zurückgehe, bis ich zum ersten Male nach $x = a$ gelange. *Die Forderung ist, daß ich bei $x = a$ in*

$$z = Y_0^a : \frac{d\, Y_0^a}{dx}$$

hineinmünde. Dann und nur dann hat das Kreisbogenviereck auf der η-Kugel einen Orthogonalkreis.

4. Hiermit ist das Ziel erreicht, das ich mir in der gegenwärtigen Arbeit gesteckt habe. Es bleibt zu untersuchen, ob die Hilbertschen Methoden ausreichen, das Oszillationstheorem für ein so kompliziertes Bedingungssystem, wie wir es gerade aufstellten, zu beweisen. Der Fall, der dabei zunächst interessiert, ist der, wo die gesuchte Riccati-Kurve im Inneren der Intervalle $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{c\infty}$, $\overline{\infty a}$ *keinen* Schnittpunkt mit der x-Achse aufweist. Zeigt sich, daß man im einzelnen Intervall statt dessen noch irgend eine Anzahl von Schnittpunkten vorschreiben kann, so treten neben das automorphe Grundtheorem noch entsprechende Obertheoreme.

Zum Schluß möge folgende Andeutung gestattet sein. Die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen, d. h. die Theorie der *eindeutigen* automorphen Funktionen bezieht sich nur auf solche Fälle der Differentialgleichung (1), bei denen α, β, γ, δ die reziproken Werte ganzer Zahlen sind. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß der Beweis des formulierten Oszillationstheorems von diesem Umstande abhängen sollte (vielmehr wird es wahrscheinlich genügen, daß die reellen Größen α, β, γ, δ zwischen Null und Eins liegen). Wir werden also, wenn es gelingt, die Oszillationsbetrachtung durchzuführen, in doppeltem Sinne über die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen hinausgeführt: einmal, indem sich eventuell Obertheoreme neben das Grundtheorem stellen, dann aber, weil Werte der α, β, γ, δ miterledigt werden, die aus der genannten Theorie naturgemäß herausfallen.

Göttingen, im April 1907.

Über die Kongruenzaxiome der Geometrie.

Von

Eugen Meyer in Charlottenburg.

§ 1.

Die Abbildung der hyperbolischen und elliptischen Geometrie auf den Euklidischen Raum, die Hr. Klein auf Grund von Cayleys projektiver Maßbestimmung entwickelt hat*), erfordert bekanntlich, daß in dem Euklidischen Raum eine ovale bezw. nullteilige Fläche**) 2. O. als absolutes Gebilde zum Zwecke einer projektiven Maßbestimmung angenommen wird, und im ersteren Falle lediglich diejenigen Punkte als eigentliche Punkte der Geometrie betrachtet werden, die innerhalb der Fläche liegen. Dabei fällt aber diesem absoluten Gebilde eine dreifache Aufgabe zu:

1) Es bestimmt als Punktgebilde durch die ihm mit einer beliebigen Geraden, dem Träger einer Punktreihe, gemeinsamen Punkte auf dieser eine projektive Maßbestimmung für die Strecken;

2) es bestimmt als Ebenengebilde durch die ihm mit einer beliebigen Geraden, dem Träger eines Ebenenbüschels, gemeinsamen Ebenen in diesem Büschel eine projektive Maßbestimmung für die Winkel;

3) es trennt die eigentlichen Punkte von den idealen.

Daß in einer solchen Abbildung es *dieselbe* Fläche ist, der diese drei Aufgaben zufallen, ist nun, wenn man sich auf den allgemeineren Standpunkt stellt, den die neuesten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie einnehmen, ebensowenig notwendig wie, daß es gerade immer eine Fläche 2. O. ist. Es ist vielmehr der wesentliche Inhalt der in der hyperbolischen und elliptischen Geometrie geltenden Axiome der Kongruenz, des Parallelismus und des Archimedischen Axioms, also derjenigen Axiome, die man als die „metrischen“ bezeichnen könnte, daß

*) Mathem. Annalen Bd. 4, S. 573—625.

**) Vgl. Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie II, Göttingen 1893, S. 62 f., 144 f.

eine solche Abbildung gerade in der oben bezeichneten Weise möglich ist. Inzwischen hindert nichts, einmal die Frage zu stellen, welche Axiome in einer Geometrie gelten, wenn man statt des einen absoluten Gebildes drei verschiedene voraussetzt. Man wird dabei je nach der Art dieser Gebilde und ihrer gegenseitigen Lage recht verschiedene Geometrien erhalten, und es werden gewisse Beschränkungen notwendig sein, damit diese Geometrien noch als der unsrigen „nächststehende“*) gelten können.

Solche Geometrien sind nun in der Tat schon behandelt worden. So hat schon Hr. Hilbert in seiner ersten Veröffentlichung über die geometrischen Axiome**) gezeigt, daß die Gültigkeit seiner Axiomgruppen der Anordnung, der Verknüpfung und der Stetigkeit die notwendige und hinreichende Bedingung ist für die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung der Gebilde der Geometrie auf das Innere eines „nirgends konkaven Körpers“ des Euklidischen Raumes, derart, daß der Begrenzungsfläche dieses Körpers die Funktionen 1) und 3) zufallen. Und wir werden sehen, daß auch die von Hrn. Hilbert konstruierte Geometrie, in welcher der erste Kongruenzsatz für Dreiecke nicht gilt***), ein Beispiel für die genannten Geometrien darstellt.

Indessen hat man gar nicht erst nötig, künstlich geschaffene Systeme heranzuziehen; die gewöhnliche Euklidische Geometrie kann schon als ein Beispiel angesehen werden. Bezeichnet man nämlich, wie es gewöhnlich geschieht, die imaginären Kreispunkte als ihr „Absolutes“ (wir beschränken uns hier wie auch im folgenden der Einfachheit halber auf ebene Geometrien), so ist dies ungenau. Schon Hr. Klein hat darauf hingewiesen†), daß der Kegelschnitt, als dessen Ausartung die beiden Punkte anzusehen sind, nur als Liniengebilde sich in diese Punkte aufgelöst hat, als Punktgebilde aber in die doppelt zu zählende Verbindungsgrade der beiden Punkte degeneriert ist. Wir haben also hier zwei wohl zu unterscheidende absolute Gebilde, eine doppelt zu zählende Grade für die Aufgaben 2) und 3), ein Punktepaar für 1), wenn man in 2) statt des Ebenenbüschels für die ebene Geometrie das Strahlenbüschel eingeführt denkt.

Man sieht dies noch deutlicher, wenn man durch das „Absolute“ nicht eine Maßzahl für Strecken und Winkel bestimmt, sondern durch das Absolute lediglich festlegt, was man unter kongruenten Strecken und

*) Vgl. D. Hilbert in seinem Pariser Vortrage „Mathematische Probleme“. 4. Problem.

**) D. Hilbert, Über die grade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. Math. Ann. Bd. 46, S. 91. = Grundlagen der Geometrie 2. Aufl., Leipzig 1903, S. 83.

***) Grundl. d. Geom. 2. Aufl. S. 20 ff.

†) Math. Ann. Bd. 4, a. a. O. § 13.

Winkeln verstehen will, also — unter Beschränkung auf Kegelschnitte als absolute Gebilde — an Stelle von 1) und 2) festsetzt:

1) Alle diejenigen Strecken mit dem Anfangspunkt P sollen „kongruent“ heißen, deren Endpunkte auf einem den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_s$ in dessen Schnittpunkten mit der Polaren von P doppelt berührenden Kegelschnitt liegen.

2) Alle diejenigen Winkel mit dem einen Schenkel $\mathfrak{L}$ sollen kongruent heißen, deren zweite Schenkel einen den absoluten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_w$ derartig doppelt berührenden Kegelschnitt umhüllen, daß die den beiden Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten durch den Pol von $\mathfrak{L}$ gehen.*)

Bei dieser Auffassung nämlich sieht man, daß das Absolute $\mathfrak{K}_s$ für die Streckenkongruenz die imaginären Kreispunkte sind und jene doppelt berührenden Kegelschnitte die Kreise, während das Absolute $\mathfrak{K}_w$ für die Winkelmessung die doppelt gezählte unendlich ferne Grade ist, und jene doppelt berührenden Kegelschnitte Punktepaare auf der Geraden, als Liniengebilde (Kurven 2. Klasse) gedacht. $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ berühren einander hier gleichfalls doppelt, so daß der vorliegende Fall auch als durch eine Partikularisation — die aber jetzt dualistisch ist — desjenigen aufgefaßt werden kann, in welchem $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ nicht degenerierte, einander doppelt berührende Kegelschnitte sind. Mit dieser Auffassung stimmt denn auch die Tatsache zusammen, daß es in der Euklidischen Geometrie Ähnlichkeitstransformationen gibt; denn diese werden immer dann und nur dann vorhanden sein, wenn $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ nicht zusammenfallen.

Im folgenden wollen wir uns nun auf den Fall der ebenen Geometrie beschränken und ferner annehmen, daß die absoluten Gebilde allgemeine oder degenerierte Kegelschnitte $\mathfrak{K}_s$, $\mathfrak{K}_w$ und $\mathfrak{K}_i$ sind, denen bezw. die zu Anfang mit 1), 2) und 3) bezeichneten Aufgaben zufallen. Die Entfernung zweier Punkte und der Winkel zweier Geraden sei dann in der üblichen Weise durch den mit einer beliebigen, aber fest gewählten Konstanten multiplizierten Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses definiert, das durch $\mathfrak{K}_s$ bezw. $\mathfrak{K}_w$ auf der Verbindungslinie der Punkte bezw. für den Scheitel des Winkels bestimmt wird. Der Wert des Logarithmus und die Konstante seien in bekannter Weise so gewählt, daß jeder Strecke und jedem Winkel eine einzige reelle Zahl zugeordnet ist. Für eine solche Geometrie gelten dann die Axiome der Anordnung und Verknüpfung, die ersteren zutreffenden Falls mit der für die elliptische Geometrie nötigen

*) Zur Definition der Kongruenz von Strecken und Winkeln, die nicht einen Endpunkt bezw. einen Schenkel gemeinsam haben, zieht man dann in unmittelbar ersichtlicher Weise die Axiome III_2 bezw. III_5 heran. Ich beziehe mich hier wie im folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, stets auf das in Hilberts Festschrift, 2. Aufl. gegebene Axiomensystem.

Modifikation*) (nämlich immer dann, wenn $\mathfrak{K}_s$ nullteilig ist). Damit auch die Axiome der Kongruenz, mit Ausnahme desjenigen für Dreiecke III_6, und die Axiome der Stetigkeit gelten, muß man, wie eine leichte Überlegung zeigt, sich im Falle, daß $\mathfrak{K}_s$ oder $\mathfrak{K}_w$ oder beide einteilig sind, auf die Punkte beschränken, die innerhalb $\mathfrak{K}_s$ und innerhalb $\mathfrak{K}_w$ liegen, und annehmen, daß $\mathfrak{K}_i$ mit $\mathfrak{K}_s$ zusammenfällt.

Indem wir uns diese Bedingungen auferlegen, erhalten wir Geometrien, in denen alle Axiome mit Ausnahme des Kongruenzaxioms III_6 gültig sind.**) Ich hoffe, daß die nachfolgenden Überlegungen geeignet sind, den vollen Inhalt jenes Kongruenzaxioms III_6 aufzudecken und zu zeigen, daß dieses allein das „Axiom der Bewegung" ist, während die übrigen Kongruenzaxiome auch bestehen können, ohne daß eine „Bewegung" überhaupt möglich ist.

§ 2.

Dem Kongruenzaxiome III_6 können wir folgende Form geben:

Ist ein beliebiges Dreieck ABC und die Strecke $A_1B_1 \equiv AB$ gegeben, so existieren stets zwei und nur zwei Dreiecke, denen die Seite A_1B_1 gemeinsam ist, so daß

$$B_1C_1 \cong BC, \qquad C_1A_1 \cong CA,$$
$$\sphericalangle ABC \cong A_1B_1C_1, \quad \sphericalangle BCA \cong B_1C_1A_1, \quad \sphericalangle CAB \cong C_1A_1B_1.^{***})$$

Solche Dreiecke nennen wir kongruent. —

Es seien nun in der Euklidischen Ebene die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ (mit der obigen Bedeutung) festgelegt. Messen wir dann Strecken und Winkel mit der durch $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ definierten Maßbestimmung und bezeichnen wir zwei Strecken oder Winkel als kongruent, wenn sie gleiche Länge bezw. gleiche Größe haben, so läßt sich folgender Satz beweisen:

Sind ABC und $A_1B_1C_1$ zwei Dreiecke, deren in gleichem Umlaufsinn aufeinander folgende Seiten und Winkel paarweise kongruent sind, und gibt

*) Vgl. Hilberts Festschrift, 2. Aufl. S. 24 oder: Annales de l'École Normale (3). 17. S. 205f.

**) Wegen einer Modifikation des Axioms I_1 vgl. das Folgende.

***) Vgl. hierzu J. Mollerup, Studier over den plane Geometris Aksiomer. Diss. Kopenhagen 1903, S. 36. Im wesentlichen stimmt diese Form des Kongruenzaxioms mit derjenigen bei M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 109, VIII. Grundsatz, überein. Auch diejenige, die Hr. F. Schur nach Peanos Fondamenti di Geometria in Math. Ann. Bd. 55, S. 275 unter 4 mitteilt, ist im Grunde dieselbe, doch wird hier die Kongruenz durch die Möglichkeit der Überführung mittels Bewegung definiert.

es keine Kollineation, welche die Ebene in sich, die Punkte A_1, B_1, C_1 in bezw. A, B, C und gleichzeitig $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ in sich überführt, so sind die beiden Dreiecke durch Festlegung der Punkte A und A_1 und der Halbstrahlen AB und A_1B_1 eindeutig bestimmt.

In der Tat: es gibt wegen der Kongruenz der Dreieckswinkel eine Kollineation, welche die Punkte A_1, B_1, C_1 in bezw. A, B, C und $\mathfrak{K}_w$ in sich selbst überführt. Sie transformiere $\mathfrak{K}_s$ in $\overline{\mathfrak{K}}_s$. Diese Kollineation — eine Bewegung bei der Nicht-Euklidischen Maßbestimmung mit dem Absoluten $\mathfrak{K}_w$ — ist aber dadurch eindeutig bestimmt, daß man von ihr fordert, sie solle den Punkt A_1 in den Punkt A und die unbegrenzte Grade A_1B_1 in die Grade AB überführen. Trifft nun (vgl. Fig. 1) A_1B_1 $\mathfrak{K}_s$ in F_1 und G_1, AB aber $\mathfrak{K}_s$ in F und G, $\overline{\mathfrak{K}}_s$ in $\overline{F}$ und $\overline{G}$, so bestimmen die drei Punktepaare $(AA), (F\overline{F}), (G\overline{G})$ auf dieser Graden zwei zusammenliegende projektive Punktreihen. Wegen der Kongruenz der Dreiecksseiten ist aber:

$$(FABG) = (F_1A_1B_1G_1) = (\overline{F}AB\overline{G}),$$

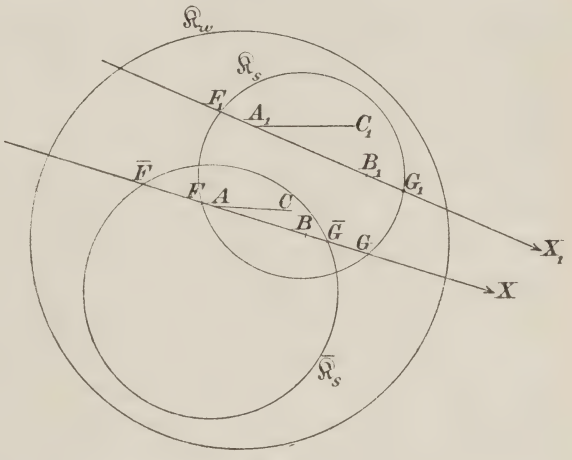


Fig. 1.

und hieraus geht hervor, daß B als zweiter Doppelpunkt jener Projektivität schon eindeutig bestimmt ist. Auf analoge Weise können wir zeigen, da unser Satz in bezug auf Punkte und Linien, Winkel und Strecken vollkommen dualistisch in sich ist, daß auch der Winkel BAC eindeutig bestimmt ist. Und da die obige Kollineation den Halbstrahl A_1C_1 in AC transformiert, so sieht man ebenso wie oben, daß auch die Punkte B_1 und B auf diesen Halbstrahlen und damit die beiden Dreiecke eindeutig bestimmt sind.

Unser Satz besagt also, daß, wenn es für den Fall nicht zerfallender $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ Paare kongruenter Dreiecke mit gleichem Umlaufsinn gibt, die nicht durch eine „Bewegung", d. h. durch eine $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ gleichzeitig in Ruhe lassende lineare Transformation in sich übergeführt werden können, ein solches Paar schon durch Fixierung zweier homologer Ecken und zweier durch diese gehenden Halbstrahlen, auf denen ein Paar homologer Seiten liegen soll, eindeutig bestimmt ist.

§ 3.

Wir besprechen nun einzelne Fälle:

a) $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ zerfallen nicht, sind beide einteilig oder beide nullteilig und berühren einander doppelt.

Dann gibt es, wie bekannt, ∞^1 Kollineationen, die $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ gleichzeitig in sich überführen*), und zu jedem Dreieck gibt es ∞^1 kongruente. Da sich aber bei einer dieser Transformationen jeder Punkt A auf demjenigen Kegelschnitt bewegt, der zu der durch $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ bestimmten Büschelschar gehört und durch A geht, so ist es wenigstens auf diese Weise nicht immer möglich, das Dreieck so zu verlegen, daß eine seiner Ecken in einen beliebig vorgeschriebenen Punkt fällt. Daß es aber *auf keine Weise* immer möglich ist, zeigt der Lehrsatz in § 2. Denn, wenn $ABC \cong A_1B_1C_1$ sein soll und in keiner der eben genannten Kollineationen sich ABC und $A_1B_1C_1$ einander entsprechen, so gibt es zu den ∞^3 verschiedenen Dreiecken, die in A eine Ecke und auf dem Halbstrahl AB eine Seite haben, nur höchstens ∞^1 Dreiecke (den Strahlen durch A_1 entsprechend) mit einer Ecke in A_1, die ihnen kongruent sein könnten. Wir sehen also:

Es läßt sich eine in sich widerspruchsfreie ebene Geometrie aufstellen, in welcher die ebenen Axiome der Gruppe I, ferner die Axiome II, III — mit Ausnahme von III_6 — und V gültig sind, in welcher ferner das Parallelenpostulat der hyperbolischen oder der elliptischen Geometrie gilt, und zu jedem beliebigen Dreieck ABC unendlich viele kongruente sich herstellen lassen, die Forderung aber nicht immer erfüllbar ist, daß eine Ecke eines dieser kongruenten Dreiecke in einen vorgeschriebenen Punkt fällt. Ferner gibt es in dieser Geometrie sowohl Dreiecke, deren Winkel paarweise kongruent sind, ohne daß es die Seiten sind (ähnliche Dreiecke), als auch solche, deren Seiten paarweise kongruent sind, ohne daß es die Winkel sind

Das Letztere folgt daraus, daß es Kollineationen gibt — und zwar ∞^3 —, die nur einen der beiden Kegelschnitte in sich überführen.**)

*) Vgl. Hermite, Crelles Journ. Bd. 47, S. 312; Klein, Math. Ann. Bd. 4, S. 601; R. Sturm, Math. Ann. Bd. 26, S. 476.

**) Saccheri hat den Satz aufgestellt (vgl. Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 84): Wenn es auch nur ein einziges Paar nicht kongruenter Dreiecke mit paarweise gleichen Winkeln gibt, so ist das Euklidische Parallelenpostulat gültig. Der oben in a) bewiesene Satz ist nun zugleich ein Beweis für die Behauptung, *daß dieser Satz von Saccheri sich ohne Zuhilfenahme des Kongruenzaxioms III_6 nicht beweisen läßt.* In der Tat zitiert auch Saccheri bei seinem Beweis den 4. Satz des 1. Buchs von Euklids Elementen (a. a. O. S. 84, Z. 6. v. u.).

b) $\mathfrak{K}_s$ zerfällt in ein Paar konjugiert-imaginärer Geraden, $\mathfrak{K}_w$ in ein Paar auf diesen Geraden liegender konjugiert-imaginärer Punkte.

Es gibt dann ∞^2 Kollineationen, die das durch $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ bestimmte Dreieck invariant lassen. Man kann also zu jedem Dreieck ABC ein kongruentes so bestimmen, daß eine Ecke in einen beliebig vorgeschriebenen Punkt fällt; aber es läßt sich durch den Beweis eines Satzes, der dem in § 2 aufgestellten ganz analog ist, zeigen, daß es nicht immer möglich ist, eine Ecke A in einen beliebig vorgeschriebenen Punkt A_1 und gleichzeitig die Seite AB auf einen beliebig vorgeschriebenen durch A_1 gehenden Halbstrahl zu verlegen.

Indem ich den Satz nicht noch einmal wiederhole, gebe ich lediglich den von dem obigen abweichenden Anfang des Beweises.

Sind nämlich (vgl. die schematische Fig. 2) P und Q die imaginären Punkte, in die K_w zerfällt, O der Schnitt der imaginären Graden, in die $\mathfrak{K}_s$ degeneriert, A und A_1 beliebig gegebene reelle Punkte, L und L_1 mit bezw. A und A_1 inzidente reelle Geraden, und führt diejenige Kollineation, die das Dreieck OPQ invariant läßt und A_1 in A transformiert, L_1 nicht in L über, so transformieren wir die Ebene in sich vermöge einer Kollineation, die O und die Gerade PQ in Ruhe läßt, A_1 in A, L_1 in L überführt. Durch sie möge P und Q in P' bezw. Q' übergehen.

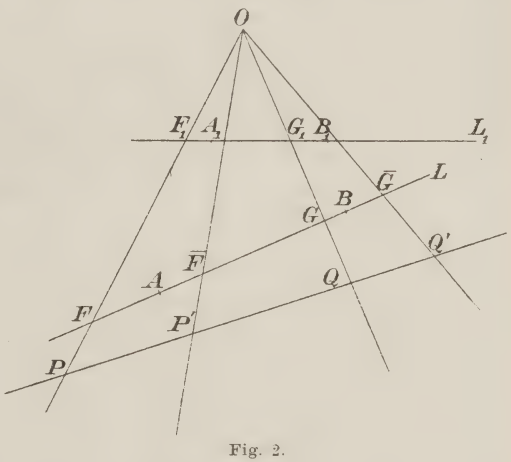


Fig. 2.

Schneiden dann OP und OQ L und L_1 in bezw. F, G, F_1, G_1; OP' und OQ' aber L in $\bar{F}$ und $\bar{G}$, so bestimmen die Punktepaare (AA), $(F\bar{F})$, $(G\bar{G})$ auf L eine Projektivität, und wenn nun im Sinne der vorliegenden Geometrie $AB \cong A_1B_1$ ist, so muß

$$(FABG) = (F_1A_1B_1G_1) = (\bar{F}AB\bar{G})$$

sein. Der Fortgang des Beweises ist dann ganz analog dem oben unter a) gegebenen.

Die Verbindungslinie der beiden konjugiert-imaginären Punkte P und Q ist das Bild der idealen Geraden der Geometrie. Aber hier gibt es auch ein ideales Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Schnitt O der

imaginären Geraden ist, in die $\mathfrak{K}_s$ zerfällt. Wie man niemals, wenn man auf einer beliebigen Graden fortgesetzt dieselbe Strecke abträgt, zu einem Punkte gelangt, der auf der idealen Geraden liegt, so gelangt man, wenn man einen Strahl wiederholt nach derselben Richtung um denselben Winkel dreht, niemals zu einem Strahl, der durch den idealen Punkt geht. Das „Monodromieaxiom" ist hier nicht erfüllt. Es gibt in dieser Geometrie die zum Parallelismus duale Erscheinung: ist eine Gerade L und ein beliebiger nicht auf L liegender Punkt P gegeben, so existiert nicht nur eine und nur eine Gerade durch P, die mit L keinen Punkt gemeinsam hat; sondern auch ein und nur ein Punkt auf L, der sich mit P nicht durch eine Grade verbinden läßt. Diese Geometrie ist also in ihren projektiven und ihren metrischen Eigenschaften vollkommen in sich dual. Also:

Es läßt sich eine in sich widerspruchsfreie Geometrie aufstellen, in welcher die ebenen Axiome der Gruppe I mit Ausnahme von I_1, ferner die Axiome II, III mit Ausnahme von III_6, IV und V gelten, und sich jeder Punkt einer beliebigen gegebenen Geraden außer einem einzigen mit einem gegebenen Punkt, der nicht auf jener Geraden liegt, durch eine einzige Gerade verbinden läßt. Zu jedem beliebigen Dreieck gibt es jedesmal unzählig viele, die nur in den Seiten, oder nur in den Winkeln, oder in Seiten und Winkeln mit ihm übereinstimmen, aber von der letzten Art gibt es „im allgemeinen") nur zwei, wenn für eine bestimmte Ecke A ein bestimmter Punkt und für die Richtung einer in A endigenden Seite ein bestimmter Halbstrahl der Ebene vorgeschrieben wird.*

c) $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_w$ zerfallen in je ein Paar konjugiert-imaginärer Punkte; beide Paare liegen auf derselben reellen Geraden.

Es läßt sich zunächst zeigen: Zwei Dreiecke sind dann und nur dann kongruent, wenn sie entweder in zentrisch-symmetrischer Lage sich befinden, d. h. wenn die Verbindungsstrecken entsprechender Ecken einen gemeinsamen Halbierungspunkt haben, oder wenn sie derartig perspektiv liegen, daß Zentrum und Achse der Perspektivität unendlich fern sind.

Beweis: $\mathfrak{K}_s$ sei in das Punktepaar PQ, $\mathfrak{K}_w$ in das Punktepaar RS degeneriert; P, Q, R, S mögen sämtlich auf der Graden L liegen. Wir können und wollen annehmen, daß P und Q mit den imaginären Kreispunkten übereinstimmen. Dann sind zwei Strecken als kongruent zu betrachten, wenn sie es im Sinne der Euklidischen Geometrie sind. Zwei im Sinne unserer Geometrie kongruente Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind es also auch im Sinne der Euklidischen Maßbestimmung (nach dem 3. Kongruenzsatz), während das Umgekehrte natürlich nicht der Fall zu sein braucht. Es gibt also eine projektive Transformation, die A, B, C

*) Der genaue Sinn dieses Zusatzes ist oben festgestellt.

in bezw. A_1, B_1, C_1, aber P und Q entweder einzeln in sich überführt oder miteinander vertauscht (Bewegung oder Spiegelung im Sinne der Euklidischen Geometrie). Durch diese Transformation werde R und S in bezw. T und U übergeführt. Treffen nun AB, BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 die Gerade L in bezw. D, E, F, D_1, E_1, F_1, so ist wegen der Kongruenz der Winkel:

$$RSD_1E_1F_1 \wedge RSDEF \wedge TUD_1E_1F_1,$$

und hieraus folgt, daß unsere Kollineation R und S ungeändert läßt. Würde sie nun P und Q vertauschen, so würde sie auf L eine Punktinvolution mit R und S als Doppelpunkten und P und Q als entsprechenden Punkten erzeugen; aber dies ist nicht möglich, da von zwei Paaren harmonisch sich trennender Punkte mindestens eines reell sein muß.*) Es gehen also auch P und Q und folglich alle Punkte von L einzeln in sich über. Eine ebene Kollineation aber, welche die unendlich fernen Punkte einzeln in sich und ein Dreieck in ein zu ihm kongruentes überführt, kann nur eine zentrische Spiegelung oder eine Parallelverschiebung sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Offenbar gibt es auch hier wieder Dreiecke, die nur in den Seiten, und solche, die nur in den Winkeln übereinstimmen, und zwar bilden sich alle der ersteren Art in alle diejenigen ab, die im Sinne der Euklidischen Geometrie kongruent sind.

Wir können also den Satz aussprechen:

Es läßt sich eine in sich widerspruchsfreie Geometrie aufstellen, in welcher die ebenen Axiome der Gruppe I, die Axiome der Gruppe II, III mit Ausnahme von III_6, IV und V gelten, und in welcher zwei Dreiecke dann und nur dann kongruent sind, wenn sie entweder in zentrisch-symmetrischer oder in derartig perspektiver Lage sich befinden, daß Zentrum und Achse der Perspektivität unendlich fern sind. Es gibt in dieser Geometrie Dreiecke, in denen nur die Seiten, und solche, in denen nur die Winkel kongruent sind.

Diese Geometrie ist nun mit derjenigen identisch, die Herr Hilbert zum Beweise dafür angestellt hat**), daß das Kongruenzaxiom III_6 von den übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie logisch unabhängig ist. Herr Hilbert mißt hier nämlich die Winkel wie in der gewöhnlichen Geometrie; zum Zweck der Messung gegebener Strecken wird dagegen die Ebene zunächst durch die Transformation T:

$$x' = x + y, \qquad y' = y$$

*) Vgl. Segre im Journal f. Mathem. Bd. 100, S. 320, 2. Abs.; Sannia, Lezioni di geometria projettiva, Napoli 1895, S. 108.

**) Festschrift § 11.

in sich transformiert, und dann werden statt der gegebenen die transformierten Strecken, und zwar diese in der gewöhnlichen Weise gemessen.

Nun kommt es hier nicht auf die absolute Länge der Strecken, sondern nur auf ein Kriterium an, das eine Entscheidung darüber gestattet, ob zwei Strecken kongruent sind oder nicht. Hierzu genügt aber die Fixierung der absoluten konjugiert-imaginären Punkte im Unendlichen; die Festsetzung einer Maßeinheit ist daneben nicht erforderlich. Sind nämlich J_1 und J_2 die beiden absoluten Punkte, so entscheidet man folgendermaßen, ob die beiden Strecken PQ und P_1Q_1 kongruent sind oder nicht. Man bezieht den Büschel $\mathfrak{B}$ derjenigen Kegelschnitte, die gleichzeitig PJ in J und PJ_1 in J_1 berühren, projektiv auf den Büschel $\mathfrak{B}_1$ derjenigen Kegelschnitte, die gleichzeitig QJ in J und QJ_1 in J_1 berühren, indem man folgende drei Paare als entsprechend setzt: 1) die Doppelgerade JJ_1 sich selbst entsprechend, 2) das zu $\mathfrak{B}$ gehörige Geradenpaar PJ, PJ_1 entsprechend dem zu $\mathfrak{B}_1$ gehörigen Geradenpaar QJ, QJ_1, 3) den durch Q gehenden Kegelschnitt von $\mathfrak{B}$ entsprechend dem durch P gehenden Kegelschnitt von $\mathfrak{B}_1$. Alsdann sind PQ und PQ_1 kongruent oder nicht kongruent, je nachdem der durch Q gehende Kegelschnitt von $\mathfrak{B}$ dem durch Q_1 gehenden Kegelschnitt von $\mathfrak{B}_1$ in der Projektivität entspricht oder nicht entspricht.*)

Es kommt aber offenbar auf dasselbe hinaus, ob man die Kongruenz zweier gegebener Strecken durch die in gewöhnlicher Weise genommene Kongruenz der durch T transformierten Strecken definiert, oder ob man die Kongruenz der nicht transformierten Strecken unter Zugrundelegung der durch T^{-1} transformierten Kreispunkte als absoluten Gebildes festlegt. Diese zweite Art ergibt aber unsern Fall c), denn jene Transformation T und folglich auch ihre inverse T^{-1} läßt die unendlich ferne Gerade invariant, aber die imaginären Kreispunkte der einen Ebene fallen nicht mit denjenigen der transformierten zusammen, da jene Transformationen die Gleichung $x^2 + y^2 = \text{const.}$ nicht in sich überführen.

Charlottenburg, Juni 1906.

*) Sind J und J_1 die imaginären Kreispunkte, so stimmt dies mit der gewöhnlichen Definition der Kongruenz überein. — Daß die Axiome für die Streckenkongruenz III_1, III_2, III_3 auch bei unserer projektiven Definition der Kongruenz gültig sind, folgt ohne weiteres durch projektive Übertragung aus ihrer Gültigkeit für jenen speziellen Fall.

Flächeninhalts- und Volumengleichheit vom projektiven Standpunkte.

Von

Eugen Meyer in Charlottenburg.

Inhaltsübersicht.

Seite
§ 1. Einleitung 207
§ 2. Ebene Kollineationen, die den Flächeninhalt ungeändert lassen 208
§ 3. Dreiecksinhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie 212
§ 4. Die Klassen affiner räumlicher Kollineationen 215
§ 5. Beziehung der äquiaffinen zu den Hermiteschen Kollineationen 219
§ 6. Bestimmung aller Kurven, die eine Gruppe von unendlich vielen äquiaffinen Kollineationen in sich zulassen 222
§ 7. Planar-ternär-zyklische Kollineationen und solche mit einem einzigen Doppelpunkt, die eine kubische Raumkurve in sich überführen 224
§ 8. Bestimmung aller äquiaffinen Kollineationen, die eine kubische Raumkurve in sich überführen 227

§ 1.

Einleitung.

In der Euklidischen Geometrie läßt sich der Dreiecksinhalt definieren als die einzige absolute Invariante dreier Punkte für eine Gruppe von ∞^5 Kollineationen, die Lie als die spezielle lineare Gruppe bezeichnet hat*), ebenso wie sich der Abstand als einzige absolute Invariante zweier Punkte für die Gruppe der Bewegungen erklären läßt. Während sich nun bekanntlich die zweite Gruppe projektiv so verallgemeinern läßt, daß man zu einem Bilde für die Kongruenzbeziehungen der Nicht-Euklidischen Geometrie gelangt, ist das gleiche für den Flächeninhaltsbegriff, wie in § 3 näher ausgeführt wird, nicht mehr möglich.

Von Interesse aber erschien mir eine nähere Untersuchung jener speziellen linearen Gruppe in der Ebene und im Raume, ihrer Beziehungen

*) Vgl. Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen. Leipzig 1893. S. 99.

zu den Hermiteschen Kollineationen sowie eine Bestimmung aller ebenen und doppelt gekrümmten Kurven, die bei unendlich vielen solchen Transformationen invariant bleiben. Diese Aufgabe ist für die allgemeinen ebenen Kollineationen in der bekannten Arbeit von Klein und Lie*) gelöst. Es ist also ein in metrischer Beziehung besonders ausgezeichneter Fall dieser auf den Raum ausgedehnten Aufgabe, der im folgenden besonders behandelt ist. Als Ausgangspunkt diente mir die Aufstellung der Typen aller affinen Kollineationen. Ich habe sie in allgemeiner Form gegeben, aus der man unmittelbar erkennen kann, wieviel Parameter bei vorgeschriebenen Doppelelementen jedesmal verfügbar bleiben, während bisher nur die aus der Elementarteilertheorie leicht folgenden kanonischen Formen aufgestellt waren. Jene ersten werden sich vielleicht auch sonst noch bei metrischen und gruppentheoretischen Untersuchungen als nützlich erweisen.

Für die kubische Raumkurve wurden schließlich *alle* Kollineationen bestimmt, welche die Kurve in sich überführen und sämtliche Volumina invariant lassen. Zu diesem Zwecke mußte ich auf die Beziehung gewisser besonderer Kollineationen zu der Normkurve unseres Raumes im allgemeinen eingehen, und dies ist, wie ich glaube, eine wünschenswerte Ergänzung der in dieser Richtung bereits vorliegenden Untersuchungen.

§ 2.

Ebene Kollineationen, die den Flächeninhalt ungeändert lassen.

Diejenigen ebenen Kollineationen, welche die Flächeninhalte der Figuren invariant lassen, bilden eine fünfgliedrige Gruppe, eine Untergruppe der affinen Gruppe. Legt man Cartesische Koordinaten zugrunde, so werden jene dargestellt durch:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34},$$

mit der Einschränkung, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist. Es ist nach Lies Terminologie**) die spezielle lineare Gruppe.

*) „Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen". Math. Ann. Bd. 4, S. 50. — Vgl. auch das Referat von G. Scheffers, Enc. der Math. Wiss. III_3 S. 204ff.

**) Lie-Scheffers, a. a. O. S. 94ff.

Vom projektiven Standpunkte gibt indes eine solche Charakterisierung nicht die richtige Einsicht. Um die projektiven Eigenschaften der Gruppe zu finden, behandeln wir einzeln die fünf (bezw. acht) verschiedenen Typen ebener Kollineationen, wie sie sich auf Grund der Elementarteilertheorie ergeben.*) Wir dürfen für diese Typen hier nicht die kanonischen Formen benutzen, wie sie von Hrn. Muth a. a. O. angegeben sind, weil für die vorliegende Aufgabe die unendlich fernen Elemente nicht mit den endlichen gleichberechtigt sind. Die folgenden Kollineationen gehören also zu den fünf möglichen Elementarteiler-Charakteristiken, und zwar erhält man aus jeder durch Veränderung der vorkommenden Parameter *sämtliche* Kollineationen, die dieselben Doppelelemente besitzen. Die Anzahl der Parameter eines jeden Typus gibt also hier an, wievielgliedrig die Gruppe aller Kollineationen ist, die dieselben Elemente zu Doppelelementen haben, während die Anzahl der Parameter der kanonischen Formen, die Hr. Muth aus dem Weierstraßschen Theorem a. a. O. gewinnt, gleich der um Eins verminderten Anzahl der absoluten Invarianten der Kollineationen der Gruppe ist. Jene Formen gewähren ferner die Möglichkeit, die umfassenderen Gruppen zu bestimmen, in denen die in Betracht kommenden eingliedrigen Gruppen enthalten sind.

Jene Typen sind nun:**)

(1) [1 1 1] $x' = ax,$
$y' = by.$

Invariant bleiben der Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der beiden Achsen.

(2) [2 1] a) $x' = ax,$
$y' = y + b.$

Invariant bleiben die y-Achse und die unendlich fernen Punkte der x- und der y-Achse.

b) $x' = ax,$
$y' = ay + bx.$

*) Vgl. hierzu und zu den entsprechenden Erörterungen für den Raum: G. Loria, Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazii, Giornale di Matematiche vol. 22, 1884, p. 1; C. Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie, Mem. dei Lincei (3ª) vol. 19, 1884; P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899, S. 215.

**) Vgl. Klein und Lie, a. a. O. Die Transformation der 3. Art heißt dort: $x' = x + a$, $y' = y + ax + b$. Der Unterschied ist darin begründet, daß a. a. O. nur Gruppen mit *vertauschbaren* Transformationen betrachtet werden, eine Beschränkung, der hier die Kollineationen nicht unterworfen werden. Die Transformation der 5. Art heißt a. a. O. $x' = x + a$, $y' = y + b$, indem dort der invariante Punkt nicht festgelegt wird. — Ferner ist unter x-Achse hier die Gerade $y = 0$, dort $x = 0$ verstanden.

Invariant bleiben der Nullpunkt, der unendlich ferne Punkt der Y-Achse und die unendlich ferne Grade.

(3) [3]
$$x' = x + a,$$
$$y' = y + bx + c.$$

Invariant bleibt die unendlich ferne Grade und der unendlich ferne Punkt der Y-Achse.

(4) [(1 1) 1]
a) $x' = ax,$
$$y' = ay.$$

Invariant bleibt der Nullpunkt und punktweise die unendlich ferne Grade.

b) $x' = x,$
$$y' = ay.$$

Invariant bleibt der unendlich ferne Punkt der Y-Achse und punktweise die X-Achse.

(5) [(2 1)]
a) $x' = x + a,$
$$y' = y.$$

Invariant bleiben sämtliche Punkte der unendlich fernen Graden und sämtliche Strahlen des Büschels durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse.

b) $x' = x + ay,$
$$y' = y.$$

Invariant bleiben sämtliche Punkte der X-Achse und sämtliche Strahlen durch ihren unendlich fernen Punkt.

Wir betrachten die einzelnen Fälle:

Fall 1. Sollen die Flächeninhalte invariant bleiben, so muß $ab = \pm 1$ sein. Ist $ab = -1$, so läßt sich die Kollineation auffassen als Produkt einer solchen der Klasse, für die $ab = +1$ ist, und einer Spiegelung am Nullpunkt. Für $ab = +1$ stellt (1) eine eingliedrige Gruppe von Kollineationen vor.*) Sie erzeugen, auf einen festen Punkt (x_0, y_0) angewendet, als W-Kurve die Hyperbel $xy = x_0 y_0$**). Diese Kollineationen gehören zu den Hermiteschen.

Fall 2. Es muß $a = \pm 1$ sein; man erhält in (2a) eine Translation, bezw. eine solche, verbunden mit einer axialen Spiegelung; in (2b) eine Kollineation, welche die Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels einzeln in sich überführt, oder eine solche, verbunden mit einer zentrischen Spiegelung.

---

*) Nach der Bezeichnung Lies ist die in ihr enthaltene infinitesimale Transformation: $xp - yq$. Vgl. Lie-Scheffers a. a. O. S. 95.

**) Klein-Lie, a. a. O. S. 57.

Fall 3. Diese Kollineation läßt stets die Flächeninhalte invariant. Sie stellt eine dreigliedrige Untergruppe der speziellen linearen Gruppe dar.*) Jede in der Gruppe enthaltene infinitesimale Transformation erzeugt als W-Kurven Parabeln, nämlich Integralkurven der Differentialgleichung $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{bx+c}$. Also gehören auch diese Kollineationen zu den Hermiteschen.

Aus Fall 4 und Fall 5 erhält man analoge Transformationen wie im Fall 2.

Eine affine Hermitesche Kollineation kann nur vom Typus (1), (3) oder (4) sein. Im Falle 1 muß, wenn sie einen Mittelpunktskegelschnitt in Ruhe lassen soll, $a = \frac{1}{b}$, also $ab = 1$ sein. Wird nämlich der Punkt X nach X' transformiert, und schneidet XX' die X-Achse in $\mathfrak{B}$, die Y-Achse in $\mathfrak{A}$, die unendlich ferne Grade in $\mathfrak{C}$, so ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = \frac{1}{a}, \qquad (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = b,$$

und die Gleichheit dieser beiden Doppelverhältnisse ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Mittelpunktskegelschnitt in Ruhe bleibt.**) Im Falle 4 muß $a = -1$ sein.

Also hat sich ergeben:

*Jede äquiaffine****) *ebene Kollineation, d. h. eine solche, welche die Flächeninhalte der Figuren ungeändert läßt, transformiert entweder die Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels oder die Kegelschnitte einer Büschelschar einzeln in sich, oder sie setzt sich aus einer solchen und einer axialen oder zentrischen Spiegelung zusammen. Umgekehrt läßt jede ebene affine Kollineation, die einen Mittelpunktskegelschnitt in sich überführt, und jede affine Kollineation, die nur einen invarianten Punkt besitzt, sämtliche Flächeninhalte ungeändert.*

Ferner erkennt man:

Die einzigen ebenen Kurven, die eine infinitesimale äquiaffine Kollineation zulassen, sind die Graden und die Kegelschnitte.

Folgerungen. 1) Jede ebene Kollineation, die einen Kegelschnitt so in sich überführt, daß sein Mittelpunkt invariant bleibt, ist äquiaffin.

---

*) In der Tafel bei Lie-Scheffers a. a. O. S. 289 ist es Nr. 13: p, q, xq. Ferner: Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, S. 106.

**) Vgl. R. Sturm, Über Kollineationen und Korrelationen, welche Flächen 2. Grades oder kubische Raumkurven in sich selbst transformieren, Math. Ann. Bd. 26, S. 465. — Die Bedingungen $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ geben je eine affine Kollineation, die eine Büschelschar von Parabeln in sich überführt, und aus keiner von diesen beiden Bedingungen folgt $ab = 1$.

***) Die Bezeichnung ist eingeführt von Heffter und Köhler, Lehrbuch der analyt. Geometrie (Leipzig und Berlin 1905), I, 221.

Daher die Konstanz der Fläche eines Parallelogramms, das aus Tangenten einer Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser gebildet ist.

2) Jede Hyperbel gehört zu den W-Kurven einer bestimmten eingliedrigen Gruppe äquiaffiner Kollineationen vom Typus (1), welche die Asymptoten und die unendlich ferne Grade invariant lassen. Daraus folgt ihre Grundeigenschaft, daß die Tangente mit den Asymptoten ein Dreieck von invarianter Fläche bildet, und daß die durch einen Hyperbelpunkt zu den Asymptoten gezogenen Parallelen mit diesen ein Parallelogramm von konstantem Inhalt einschließen.

3) Mittelpunktskegelschnitte, die zu derselben Gruppe äquiaffiner Kollineationen gehören, sind koaxial und ähnlich, und umgekehrt. Also folgt z. B.: Zieht man von einem Punkte des einen von zwei koaxialen ähnlichen Kegelschnitten Tangenten an den andern, so ist der Flächeninhalt des von den beiden Tangenten und der Berührungssehne gebildeten Dreiecks konstant.

Einen analogen Satz kann man für drei koaxiale ähnliche Kegelschnitte bilden usw.

§ 3.

Dreiecksinhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie.

Eine Verallgemeinerung im projektiven Sinne des Begriffs der Flächengleichheit ist nicht in derselben Weise möglich wie etwa des Begriffs der Winkelkongruenz. Bei dieser ist es ja nur nötig, statt der Hauptgruppe*), d. h. der aus den Bewegungen, Spiegelungen und projektiven Ähnlichkeitstransformationen zusammengesetzten Gruppe, die Gruppe zu nehmen, welche einen festen Kegelschnitt invariant läßt, und zwei Winkel kongruent zu nennen, wenn durch eine Kollineation der letztgenannten Gruppe der eine Winkel in den andern übergeht. Wollte man aber hier in ähnlicher Weise vorgehen, so müßte man die spezielle lineare Gruppe projektiv verallgemeinern, jedoch so, daß sie die projektiv verallgemeinerte Hauptgruppe als Untergruppe enthält, damit auch jetzt noch kongruente Dreiecke flächengleich sind.**) Nun ist aber die dreigliedrige

*) Vgl. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872, S. 6. = Math. Ann. Bd. 43, S. 63.

**) Neuerdings hat Hr. Edwin Bidwell Wilson in seinem Aufsatz „A generalized conception of area", Annals of Mathematics Bd. 5, S. 29 (vgl. auch Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung XII, 555) die Definition des Flächeninhalts in der Art verallgemeinert, daß zwei Dreiecke als flächengleich bezeichnet werden, wenn sie dieselbe Grundlinie haben und die Verbindungslinie ihrer Spitzen die Grundlinie in einem Punkte einer beliebig angenommenen festen Graden schneidet. Der Begriff der Kongruenz ist bei dieser Erklärung vermieden.

ebene Gruppe, die einen und denselben Kegelschnitt in Ruhe läßt, in keiner umfassenderen projektiven ebenen Gruppe als Untergruppe enthalten.*) Daraus folgt:

In der Nicht-Euklidischen Geometrie gibt es neben der Gruppe von Kollineationen, welche die Figuren in kongruente oder in symmetrisch-kongruente überführen, keine umfassendere Gruppe von Kollineationen, die alle Flächeninhalte unverändert lassen.

Dagegen gibt es hier einen Satz, welcher ein Analogon zu der am Ende des vorigen Paragraphen erwähnten Eigenschaft der Hyperbel liefert.

Wir denken uns den absoluten, nicht zerfallenden, einteiligen (d. h. reellen) Kegelschnitt durch seine Tangentialgleichung

$$\Phi(u, v) = 0 \tag{1}$$

gegeben und ein ganz in seinem Innern glegenes Dreieck, dessen Seiten 0, 1, 2 bezw. die homogenen Koordinaten u_i, v_i, w_i $(i = 0, 1, 2)$ haben mögen. Die beiden Seiten 1 und 2 halten wir fest und bewegen die Seite 0 so, daß die Summe oder Differenz der Winkel an der beweglichen Seite, im projektiven Maße gemessen, konstant bleibt. Um die Gleichung der von der Seite 0 umhüllten Kurve zu finden, bilden wir:

$$\cos[\sphericalangle(0\,1) \pm \sphericalangle(0\,2)] - c, \tag{2}$$

wo c eine Konstante und $-1 < c < +1$ ist. Diese Differenz ist nach Cayleys Maßbestimmung:

$$\frac{\Phi_{01}}{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{11}}} \cdot \frac{\Phi_{02}}{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}} \mp \frac{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{11} - \Phi_{01}^2}}{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{11}}} \cdot \frac{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22} - \Phi_{02}^2}}{\sqrt{\Phi_{00}\Phi_{22}}} - c,$$

worin

$$\Phi_{ii} = \Phi(u_i, v_i); \quad \Phi_{0i} = u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} + w_0 \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} \quad (i = 0, 1, 2)$$

sein soll.

Behält man in (2) erst das negative, dann das positive Zeichen bei und setzt das Produkt beider Ausdrücke gleich 0, so erhält man:

$$\frac{\Phi_{01}^2\Phi_{02}^2}{\Phi_{00}^2\Phi_{11}\Phi_{22}} - \frac{(\Phi_{00}\Phi_{11} - \Phi_{01}^2)(\Phi_{00}\Phi_{22} - \Phi_{02}^2)}{\Phi_{00}^2\Phi_{11}\Phi_{22}} + c^2 - 2c \cdot \frac{\Phi_{01}\Phi_{02}}{\Phi_{00}\sqrt{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = 0,$$

d. h.:

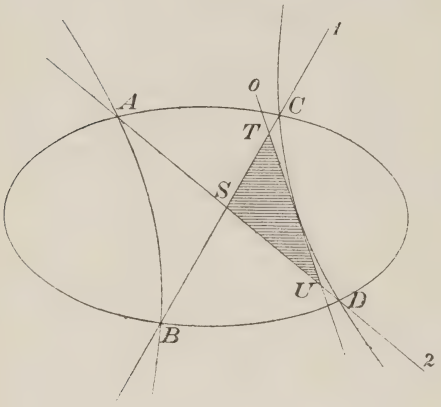
$$(c^2-1)\Phi_{00}\Phi_{11}\Phi_{22} + (\Phi_{01}^2\Phi_{22} + \Phi_{11}\Phi_{02}^2) - 2c\sqrt{\Phi_{11}\Phi_{22}} \cdot \Phi_{01}\Phi_{02} = 0$$

oder schließlich:

$$\left(c \cdot \sqrt{\Phi_{11}} \cdot \Phi_{20} - \sqrt{\Phi_{22}} \cdot \Phi_{10}\right)^2 + (c^2-1)\,\Phi_{11}(\Phi_{22}\Phi_{00} - \Phi_{20}^2) = 0.$$

*) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, S. 357. Theorem 30. Vgl. hierzu G. Kowalewski. Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung XII, 31.

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, der durch die beiden Schnittpunkte A und D (vgl. Figur): $\Phi_{22}\Phi_{00} - \Phi_{20}^2 = 0$ der Geraden 2 mit dem Kegelschnitt $\Phi = 0$ geht, und ebenso schließt man, daß er auch durch die Schnittpunkte B und C der Geraden 1 mit $\Phi = 0$ geht.*) Der Kegelschnitt muß eine Hyperbel sein, weil das Dreieck innerhalb $\Phi = 0$ liegen soll und jede Tangente an eine Ellipse $\mathfrak{E}$ des durch A, B, C, D bestimmten Kegelschnittbüschels 1 und 2 nicht innerhalb $\mathfrak{E}$, also auch nicht innerhalb Φ treffen kann.



Fragen wir noch, für welche Tangenten 0 die Summe, und für welche die Differenz der beiden Dreieckswinkel konstant ist. Da bei der stetigen Umhüllung der Kurve durch die Tangente die Winkel sich stetig ändern, so kann ein Übergang von der Konstanz der Winkelsumme zu derjenigen der Differenz nur stattfinden, wenn mindestens einer der Winkel (0 1) und (0 2) gleich Null wird, also wenn 0 in einem der Punkte A, B, C, D die Hyperbel berührt. Hier *muß* aber auch der Übergang wirklich stattfinden, da der Ableitung der Kurvengleichung gemäß sowohl Dreiecke mit konstanter Winkelsumme wie -differenz auftreten müssen. Geht nun von einem Punkte an einen Kegelschnitt ein Paar eigentlicher Sekanten und ein Paar reeller Tangenten, so liegt das erstere Paar Strahlen innerhalb des Winkelfeldes des zweiten. Zieht man also von S aus eine Tangente an die Hyperbel, so liegt der Berührungspunkt außerhalb der Ellipse. Das durch diese Tangente mit 1 und 2 gebildete, auf einen Punkt zusammengeschrumpfte Dreieck hat dann aber die Fläche 0, also die Winkelsumme π, während das Ausgangsdreieck STU eine von π verschiedene Winkelsumme hat. Folglich kann für diejenigen Tangenten, deren Berührungspunkte außerhalb der Ellipse liegen, nicht die Konstanz der Winkelsumme gelten; für sie gilt also die Konstanz der Winkeldifferenz, für die andern die Konstanz der Winkelsumme. Wir haben also:

Hält man in der hyperbolischen Geometrie zwei Seiten eines Dreiecks fest

*) Man vgl. hierzu die sehr beachtenswerte Arbeit von W. E. Story, On non-Euclidean properties of conics. Americ. Journ. of Mathem. Bd. 5. Der Satz a. a. O. S. 363 unten ist die Umkehrung des obigen; doch findet sich dort nicht die oben angegebene Trennung für Summe und Differenz.

und bewegt die dritte Seite so, daß sie mit den beiden andern ein Dreieck von konstanter Fläche bildet, so umhüllt sie eine Hyperbel), die das Absolute in vier reellen, zu je zweien auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks liegenden Punkten trifft.*

Der entsprechende Satz in der Sphärik ist bekannt.**)

§ 4.

Die Klassen affiner räumlicher Kollineationen.

Wollen wir für den Raum dieselben Untersuchungen anstellen wie in § 2 für die Ebene, so müssen wir zunächst sämtliche existierenden Klassen affiner räumlicher Kollineationen aufstellen. Über ihre Beziehung zu den von Hrn. Muth a. a. O. aus dem Weierstraßschen Theorem abgeleiteten Typen und die Bedeutung der in den folgenden Kollineationen auftretenden Parameter ist das gleiche wie in § 2 zu sagen.

Die folgende Tabelle von zwanzig affinen Kollineationen hat die Bedeutung, daß jede beliebig gegebene, nicht singuläre affine Kollineation bei geeigneter Wahl des zugrunde gelegten (nicht notwendig orthogonalen) cartesischen Koordinatensystems mit einer einzigen der folgenden zwanzig Kollineationen übereinstimmt, wenn man in letzterer die vorkommenden Parameter passend wählt.

(1) [1 1 1 1] $x' = ax,$
$y' = by,$
$z' = cz.$

Invariant bleiben der Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der drei Achsen.

(2) [2 1 1] a) $x' = ax,$
$y' = y + b,$
$z' = cz.$

Invariant bleiben die unendlich fernen Punkte der drei Achsen und die Y-Achse.

b) $x' = ax + by,$
$y' = ay,$
$z' = cz.$

---

*) Nach Storys Terminologie a.a.O. S. 358. Vgl. auch Liebmann, Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1905, S. 41. — Hält man zwei *Ecken* A und B fest, so ist der Ort der dritten Ecke eine Abstandslinie zur Verbindungslinie der Mitten der von A und B ausgehenden Seiten. Vgl. Lobatschefskij, Über die Anfangsgründe der Geometrie, in F. Engels Übersetzung, Leipzig 1899, S. 34.

**) Vgl. Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl., herausgegeben von Gundelfinger, Leipzig 1876, S. 51/52.

Invariant bleiben der Nullpunkt, die unendlich fernen Punkte der X- und der Z-Achse und die unendlich ferne Gerade der XY-Ebene.*)

(3) [3 1] a) $x' = ax,$
$y' = ay + bx,$
$z' = az + cy.$

Invariant bleiben der Nullpunkt, der unendlich ferne Punkt der Z-Achse, die YZ-Ebene und die unendlich ferne Ebene.

b) $x' = ax,$
$y' = ay + b,$
$z' = az + cy.$

Invariant bleiben die unendlich fernen Punkte der X- und der Z-Achse, die YZ-Ebene und die unendlich ferne Ebene.

(4) [2 2] $x' = x + a,$
$y' = by + cz,$
$z' = bz.$

Invariant bleiben der unendlich ferne Punkt der X- und der Y-Achse, die XY-Ebene und die unendlich ferne Ebene, außerdem die X-Achse und die unendlich ferne Gerade der YZ-Ebene.

(5) [4] $x' = x + ay + bz + c,$
$y' = y + dz + e,$
$z' = z + f.$

Invariant bleiben die unendlich ferne Ebene, der unendlich ferne Punkt der X-Achse und die unendlich ferne Gerade der XY-Ebene.

Daß es hier ∞^6 Kollineationen mit den gleichen Doppelelementen gibt, läßt sich folgendermaßen einsehen. Es seien E, g, $\mathfrak{p}$ die sich selbst entsprechenden Elemente: Ebene, Gerade, Punkt. Die Kollineation bestimmt in der Punktreihe g eine Projektivität mit zusammenfallenden Doppelelementen; diese Projektivität läßt sich auf ∞^1-fache Art fixieren. Dasselbe gilt für das Strahlenbüschel $\mathfrak{p}$ in E und das Ebenenbüschel g. Sind diese drei Projektivitäten bestimmt, so läßt sich die in E erzeugte Kollineation noch auf ∞^1-fache Art festlegen. Ordnet man dann irgend einem nicht mit E inzidenten Punkte X einen beliebigen der ∞^2 Punkte

*) Bei Loria, Segre und Muth sind a. a. O. nur die invarianten Punkte und Ebenen angegeben; oben sind auch die noch etwa vorhandenen invarianten Geraden vermerkt, soweit sie nicht aus der Invarianz der ersteren unmittelbar folgen.

derjenigen Ebene zu, die der (Xg) im Büschel g entspricht, so ist die Kollineation, wie man leicht sieht, bestimmt.

(6) [(1 1) 1 1] a) $x' = ax,$
$y' = y,$
$z' = bz.$

Invariant bleiben alle Punkte der Y-Achse, außerdem die unendlich fernen Punkte der X- und der Z-Achse. — Axiale Kollineation.

b) $x' = ax,$
$y' = by,$
$z' = az.$

Invariant bleiben alle Punkte der unendlich fernen Geraden der XZ-Ebene, der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt der Y-Achse.

(7) [(1 1) 2] a) $x' = ax + bz,$
$y' = y,$
$z' = az.$

Invariant bleiben alle Punkte der Y-Achse, die unendlich ferne Gerade der XZ-Ebene und der unendlich ferne Punkt der X-Achse.

b) $x' = ax,$
$y' = y + b,$
$z' = az.$

Invariant bleiben sämtliche Punkte der unendlich fernen Geraden der XZ-Ebene, ferner die Y-Achse und ihr unendlich ferner Punkt.

(8) [2 1) 1)] a) $x' = x + by,$
$y' = y,$
$z' = az.$

Invariant bleiben alle Punkte der X-Achse, alle Ebenen durch die unendlich ferne Gerade der XZ-Ebene, der unendlich ferne Punkt der Z-Achse und die XY-Ebene.

b) $x' = ax + by,$
$y' = ay,$
$z' = az.$

Invariant bleiben alle Punkte der unendlich fernen Geraden der XZ-Ebene, alle Ebenen durch die X-Achse, der Nullpunkt und die unendlich ferne Ebene.

(9) [(3 1)] a) $x' = x + ay + bz,$
$y' = y,$
$z' = z + cy.$

Invariant bleiben sämtliche Punkte der X-Achse, sämtliche Ebenen durch die unendlich ferne Gerade der XZ-Ebene und das Strahlenbüschel der XZ-Ebene durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse.

b) $x' = x + az + b,$
$y' = y,$
$z' = z + c.$

Invariant bleiben sämtliche Punkte der unendlich fernen Geraden der XY-Ebene, sämtliche Ebenen durch die unendlich ferne Gerade der XZ-Ebene, außerdem das Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse.

(10) [(1 1) (1 1)] $x' = ax,$
$y' = y,$
$z' = az.$

Invariant bleiben alle Punkte der Y-Achse und der unendlich fernen Geraden der XZ-Ebene. — Gescharte Kollineation.

(11) [(2 2)] $x' = x + ay + b,$
$y' = y,$
$z' = z + cy + d.$

Invariant bleibt die in der XZ-Ebene liegende unendlich ferne Gerade mit allen Punkten ihrer Punktreihe und allen Ebenen ihres Ebenenbüschels.

Die Mannigfaltigkeit ist hier bei Festhaltung der Doppelelemente eine vierfache. Denn die Verbindungsgeraden homologer Punkte bilden in diesem Falle ein Strahlennetz mit vereinigten Leitgeraden (eine spezielle lineare Kongruenz), deren Achse die unendlich ferne Gerade der XZ-Ebene ist. In diesem Strahlennetz ist die Punktreihe der Achse auf die Ebenen ihres Büschels projektiv bezogen. Hat man diese Projektivität festgelegt, was auf ∞^3 Arten möglich ist, so ist auch der Strahl bestimmt, auf welchem der einem beliebigen Punkte X entsprechende X' liegen muß. X' kann also dann noch auf ∞^1 Arten gewählt werden.

(12) [(1 1 1) 1] Perspektive Kollineation (Homologie):

a) $x' = ax,$
$y' = ay,$
$z' = az.$

Invariant bleiben der Koordinatenanfangspunkt und sämtliche unendlich fernen Punkte.

$$\text{b)}\quad x' = ax,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Invariant bleiben alle Punkte der YZ-Ebene und der unendlich ferne Punkt der X-Achse.

(13) [(2 1 1)]
$$x' = x + a,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Invariant bleiben sämtliche unendlich fernen Punkte und sämtliche Strahlen des Bündels durch den unendlich fernen Punkt der X-Achse.

§ 5.

Beziehung der äquiaffinen zu den Hermiteschen Kollineationen.

Hermitesche räumliche Kollineationen gibt es bekanntlich zwei verschiedene Arten: entweder werden die Geraden jeder Schar projektiv in Geraden derselben Schar transformiert oder aber in die der andern. Wir betrachten zunächst diejenigen *zweiter Art*.

Wendet man eine Kollineation K der zweiten Art zweimal hintereinander an, — K^2 —, so erhält man eine solche der ersten Art. Ist in K^2 g eine sich selbst entsprechende Gerade der Fläche, so gehört zu g eine bestimmte Gerade l der andern Geradenschar derart, daß g und l sich in K involutorisch entsprechen. In K^2 können also die Doppelgeraden beider Scharen stets nur in gleicher Zahl auftreten. Nun sind höchstens drei Fälle möglich:

1) In K^2 hat jede der Scharen g und l zwei Doppelgeraden.
2) In K^2 sind alle Geraden g und alle Geraden l Doppelgeraden.
3) In K^2 gibt es eine einzige Doppelgerade g und eine einzige Doppelgerade l.

Im *ersten* Fall hat man die Kollineation vom Typus [1 1 1 1] mit vier getrennten Doppelpunkten.

Im *zweiten* Fall ist K^2 die Identität, also K involutorisch. Jede Gerade g schneidet jede ihr in K involutorisch entsprechende Gerade l in einem sich selbst entsprechenden Punkte; es gibt also eine auf der Fläche liegende, sich in K punktweise selbst entsprechende Kurve. Diese Kurve kann, soll K nicht die identische Transformation sein, keine Raumkurve, also nur eine Gerade oder ein Kegelschnitt sein. Das Erstere ist unmöglich, da sonst K von erster Art wäre. K läßt also eine Ebene invariant, ist mithin eine involutorische Homologie.

Im *dritten* Fall gibt es nur einen sich selbst entsprechenden Punkt der Fläche, nämlich den Punkt $(g, l) \equiv P$ und nur eine sich selbst entsprechende Tangentialebene der Fläche, nämlich $(g, l) \equiv E$. Ein etwa vorhandener weiterer Doppelpunkt P_1 von K kann nicht außerhalb E liegen, denn sonst würde PP_1 noch einen zweiten Doppelpunkt auf der Fläche bestimmen. Liegt er auf E, so kann er nicht in g oder l liegen, da sonst eine dritte Gerade der Fläche Doppelgerade wäre. Daraus folgt aber, daß die durch K auf E bestimmte Kollineation eine Zentralperspektive ist, bei der Achse und Zentrum inzident sind, also K selbst gleichfalls eine solche (Charakteristik [(2 1 1)]). Dann aber müßte K, da es die Fläche in sich überführen soll, die identische Transformation sein. Also:

Eine Hermitesche Kollineation, die eine Fläche 2. O. unter Vertauschung ihrer Geradenscharen in sich überführt, hat entweder genau vier getrennte Doppelpunkte oder sie ist eine involutorische Zentralperspektive.

Liegt in letzterem Falle die Ebene oder das Zentrum der Perspektive unendlich fern, so hat man eine zentrische bezw. planare Symmetrie; bei ihr bleiben die Volumina ungeändert. Aber auch in dem anderen Falle bleiben, wenn die Kollineation affin ist, die Volumina invariant, wie jetzt gezeigt werden soll.

Soll nämlich die Kollineation (1) in § 4 äquiaffin sein, so muß $abc = \pm 1$ sein. Führt sie den Punkt X nach X' über, und schneidet XX' die unendlich ferne Ebene in $\mathfrak{D}$, die YZ-, ZX-, XY-Ebene bezw. in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so sind

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) = \frac{1}{a}, \qquad (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = \frac{1}{b}, \qquad (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \frac{1}{c}$$

die drei absoluten Invarianten der Kollineation, und die Gleichung

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) \cdot (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \cdot (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = -1$$

zwischen ihnen ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kollineation (1) äquiaffin ist.

Nun sind, wie Herr R. Sturm gezeigt hat*), dafür, daß eine Kollineation eine Hermitesche von zweiter Art ist, folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1, \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$$

(oder eines der analogen Paare von Gleichungen).

Es ist aber, wenn wir

$$(\mathfrak{D}XX'\mathfrak{A}) = k_1, \qquad (\mathfrak{D}XX'\mathfrak{B}) = k_2, \qquad (\mathfrak{D}XX'\mathfrak{C}) = k_3$$

setzen:

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2},$$

*) a. a. O. S. 472, § 8.

und wenn die genannten beiden Bedingungen als erfüllt angenommen werden:

$$k_2 = \frac{1}{2}, \qquad (\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = 2,$$

mithin:

$$k_1 + k_3 = 1,$$

und folglich:

$$\frac{k_1}{k_1 - 1} \cdot \frac{k_2}{k_2 - 1} \cdot \frac{k_3}{k_3 - 1} = -1,$$

d. h.

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) \cdot (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \cdot (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = -1, \text{ q. e. d.}$$

Ist die Kollineation K_1 von *erster Art* und äquiaffin, so erhält man durch Zusammensetzung mit einer Spiegelung S am Flächenmittelpunkt $\mathfrak{C}$ eine solche von zweiter Art $K_2 \equiv K_1 S$. Nun aber muß K_2 den in der unendlich fernen Ebene liegenden Kegelschnitt der Fläche in sich überführen, und da sie vier getrennte Doppelpunkte hat, so ist einer von diesen das Zentrum, zwei liegen auf jenem Kegelschnitt und der vierte ist der Pol $\mathfrak{P}$ der Verbindungsgeraden dieser beiden in bezug auf den Kegelschnitt. $\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ schneidet die Fläche in zwei Punkten, die sowohl durch K_2 als durch S involutorisch vertauscht werden, also von $K_1 \equiv K_2 S$ in Ruhe gelassen werden. K_1 läßt also $\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ punktweise invariant, ist daher eine axiale Kollineation (Typus 6), die Achse geht durch den Mittelpunkt der Fläche. Umgekehrt ist die Aufeinanderfolge irgend einer äquiaffinen Kollineation K_2 zweiter Art und einer Spiegelung S am Flächenmittelpunkt eine äquiaffine Kollineation K_1 erster Art und mithin auch $K_2 \equiv K_1 S$. Also:

Jede affine Kollineation, die eine Mittelpunktsfläche 2. O. in sich überführt, läßt alle Volumina ungeändert. Ist die Kollineation von erster Art, so läßt sie stets eine durch den Mittelpunkt der Fläche gehende Gerade punktweise invariant; ist sie von zweiter Art, so läßt sie sich als Aufeinanderfolge einer der beschriebenen Kollineationen erster Art und einer Spiegelung am Mittelpunkt der Fläche darstellen.

Ist die Mittelpunktsfläche eine Kugel, so sind diese Kollineationen erster Art gewöhnliche Rotationen.

Da es ∞^3 solche Kollineationen gibt, so liegt in diesem Satze auch der tiefere Grund des von G. Bauer*) durch Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn H. Vogt**) gefundenen Theoremes:

Wählt man auf einem geradlinigen Hyperboloid drei Erzeugende der einen Schar beliebig aus, so bilden sie zusammen mit den drei parallelen

*) Münchener Berichte Bd. 10, S. 637. 1880.

**) Journal für Mathem. Bd. 86, S. 297. 1879. (Vgl. auch Schumann, Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 26, S. 136. 1881.)

Erzeugenden der andern Schar ein windschiefes Sechseck. Die sechs Ebenen durch je zwei benachbarte Seiten dieses Sechsecks schließen ein Parallelepiped ein, dessen Volumen konstant bleibt, wie man auch jene drei Erzeugenden wählt.

§ 6.

Bestimmung aller Kurven, die eine Gruppe von unendlich vielen äquiaffinen Kollineationen in sich zulassen.*)

Um die hier bezeichnete Aufgabe zu lösen, schlagen wir den von Klein und Lie a. a. O. § 2—5 angegebenen Weg ein. Die äquiaffinen Transformationen gehen aus den in § 4 aufgezählten durch eine derartige Bestimmung der auftretenden Parameter hervor, daß die Determinante der mit x, y, z behafteten Glieder gleich $+1$ wird.**) Man wählt aus jeder Klasse der so erhaltenen Transformationen die unendlich kleine aus und wendet sie auf einen beliebigen Punkt (x_0, y_0, z_0) des Raumes, den die Transformation nicht invariant läßt, unendlich oft hintereinander an. Dann beschreibt der Punkt die zu der Klasse gehörige W-Kurve.

Diese wird nun aber für alle Klassen mit Ausnahme der Klassen 1), 2a), 2b) und 5) eine ebene Kurve. In 3) z. B. liegt für $a = 1$ die W-Kurve in der Ebene $x = x_0$. In 6b) liegt die W-Kurve in der Ebene $\frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}$ und Analoges gilt für alle anderen außer den genannten vier Kollineationen. In einem jeden jener Fälle außer in 6b) ist aber die Kollineation, welche die Ebene der W-Kurve in sich überführt, wie man schnell übersieht, gleichfalls eine äquiaffine, die W-Kurve also nach § 2 eine Gerade oder ein Kegelschnitt. Irgend eine Kollineation von 6b) aber führt einen Punkt (x_0, z_0) in einen Punkt der invarianten Ebene E: $\frac{x'}{z'} = \frac{x_0}{z_0}$ über, und es ist, wenn man $x^2 + z^2 = u^2$, $x'^2 + z'^2 = u'^2$ setzt: $u'^2 = a^2 u^2$. Nimmt man in E y und u als Koordinaten, so ist wegen $a^2 b = 1$ die von einem Punkte (u_0, y_0) von E nach dem Klein-Lieschen

*) In Kap. III seiner Abhandlung „Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten“ (Leipziger Berichte Bd. 47, S. 247. 1895) zeigt Lie, wie man von den kanonischen Formen der *infinitesimalen* projektiven (homogenen) Transformationen ausgehend, die Bahnkurven aller infinitesimalen projektiven Transformationen bestimmen kann. Doch hat Lie (vgl. seine Schlußbemerkung) von seinen zehn Typen linearer homogener Transformationen des Raumes nur die drei allgemeinsten vollständig diskutiert; auch ist für die vollständige Untersuchung das oben angewendete ursprüngliche Klein-Liesche Verfahren zweckmäßiger.

**) Den Fall negativer Determinante schließen wir hier aus, weil es Gruppen mit ausschließlich uneigentlichen Kollineationen nicht gibt.

Verfahren erzeugte W-Kurve eine ebene Kurve 3. O. mit Spitze im Unendlichen: $u'^2 y' = \text{const.}$

Behandeln wir jetzt nacheinander die Fälle 1), 2a), 2b), 5).

Im *Falle* 1) erhält man durch λ-fache Wiederholung die Kollineation:

$$x' = a^\lambda x, \quad y' = b^\lambda y, \quad z' = \left(\frac{1}{ab}\right)^\lambda z,$$

also, wenn man $A = \log a$, $B = \log b$, $e^\lambda = t$ setzt, die W-Kurve

$$x = x_0 t^A, \quad y = y_0 t^B, \quad z = z_0 t^{-(A+B)}.$$

Alle solche Kurven liegen auf Flächen 3. O. und 3. Klasse von der Form $xyz = \text{const.}$ Diese Flächen haben drei reelle biplanare Knotenpunkte im Unendlichen, deren Verbindungslinien die einzigen Geraden der Fläche sind. Die Flächen gehören zu der 21. Art nach Schläflis Klassifikation*) und sind die einzigen nicht geradlinigen kubischen Flächen, die zugleich von 3. Klasse, und auch die einzigen, die abgesehen von den Punkten der parabolischen Kurve überall elliptisch gekrümmt sind.**)

Im *Falle* 2a) erhält man analog, wenn man $a^\lambda = t$ setzt:

$$x' = x_0 t; \quad y' = y_0 + \frac{b \log t}{\log a}; \quad z' = z_0 \frac{1}{t},$$

und im *Falle* 2b) ist die $(\lambda - 1)$-mal iterierte Kollineation:

$$x' = a^\lambda x + \lambda a^{\lambda-1} b y; \quad y' = a^\lambda y; \quad z' = \frac{1}{a^{2\lambda}} z,$$

also:

$$x' = x_0 t + \frac{b}{a \log a} t \log t; \quad y' = y_0 t; \quad z' = z_0 \frac{1}{t^2}.$$

Im *Falle* 5) endlich erhält man die W-Kurven als Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{ay + bz + c} = \frac{dy}{d \cdot z + e} = \frac{dz}{f} = dt$$

in der Form:

$$\begin{aligned} x &= At^3 + Bt^2 + Ct + D, \\ y &= \quad Et^2 + Ft + G, \\ z &= \quad\quad ft + J. \end{aligned}$$

Dies aber sind kubische Parabeln, die auf den parabolischen Zylindern

$$y = E\left(\frac{z - J}{f}\right)^2 + F\frac{z - J}{f} + G$$

liegen. Die Kurven schmiegen sich der unendlich fernen Ebene im

*) Philosophical Transactions Bd. 153, I, S. 239. 1863.

**) Rodenberg, Text zu seinen Modellen von Flächen 3. O., S. 21. Derselbe, Math. Ann. Bd. 14, § 17, S 99.

unendlich fernen Punkte der X-Achse an, ihre Asymptoten fallen mit der unendlich fernen Geraden der XY-Ebene zusammen.

Zusammenfassend können wir sagen:

Es gibt nur sieben Klassen von Kurven, die eine Gruppe von unendlich vielen, nicht zyklischen), die Volumina nicht ändernden Kollineationen zulassen. Diese Kurven können nämlich* 1) *gerade Linien,* 2) *Kegelschnitte,* 3) *ebene Kurven 3. O. mit einer Spitze im Unendlichen,* 4) *kubische Parabeln sein, oder ihre Gleichungen lassen sich bei passender Wahl des nicht homogenen Koordinatensystems auf eine der Formen bringen:*

$$(5)\quad \begin{aligned} x &= ct^a, \\ y &= dt^b, \\ z &= et^{-(a+b)}, \end{aligned} \qquad (6)\quad \begin{aligned} x &= at, \\ y &= b + c\log t, \\ z &= d\,\frac{1}{t}, \end{aligned} \qquad (7)\quad \begin{aligned} x &= t(a + b\log t), \\ y &= ct, \\ z &= d\,\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

§ 7.

Planar-ternär-zyklische Kollineationen und solche mit einem einzigen Doppelpunkt, die eine kubische Raumkurve in sich überführen.

Handelte es sich im vorhergehenden nur um Kurven, die unendlich viele äquiaffine Kollineationen in sich zulassen, so soll jetzt für die Normkurve des Raumes die Frage vollständig erledigt werden: *Wieviele und was für äquiaffine Kollineationen in sich läßt eine kubische Raumkurve zu?* Kollineationen, durch die kubische Raumkurven in sich transformiert werden, und zwar diejenigen mit vier getrennten Doppelpunkten und die gescharten, sind von Hrn. R. Sturm**) behandelt worden. Für die vorliegende Aufgabe kommen aber im wesentlichen zwei andere Typen in Betracht, nämlich die planar-ternär-zyklischen und solche mit nur einem einzigen Doppelpunkt. Es sollen diese zunächst, soweit sie kubische Raumkurven in sich transformieren, ohne die besondere Annahme, daß sie äquiaffin sind, in diesem Paragraphen untersucht werden.

Eine *planar-ternär-zyklische* Kollineation K gehört***) zum Typus (6), hat also zwei sich selbst entsprechende Geraden, u und v, von denen jedoch nur eine, v, sich punktweise selbst entspricht. Die Doppelpunkte der andern, u, sind imaginär. Soll nun K die kubische Raumkurve k^3 in sich überführen, so muß K auch die Punkte von k^3 zu Tripeln anordnen. Jedes dieser Tripel liegt in einer Ebene durch u; also können die Doppelpunkte von u nicht auf der Kurve liegen. Die Doppelpunkte D_1 und D_2

*) Die zyklischen Kollineationen schließen wir aus, weil sich auf sie das oben benutzte Verfahren nicht anwenden läßt.

**) Math. Ann. Bd 26, S. 487 ff.

***) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. II, S. 99.

der durch K auf k^3 erzeugten Projektivität müssen also Punkte von v sein, und da auch sie imaginär sind, so muß v eine k^3 in D_1 und D_2 treffende uneigentliche Bisekante, u also die Schnittlinie der beiden konjugiert-imaginären Schmiegungsebenen in D_1 und D_2 sein.*) u und v sind auch konjugierte Polaren des zu k^3 gehörigen Nullsystems, und zwar ist u ein Strahl des durch k^3 erzeugten Strahlensystems 3. O. und 1. Klasse, v ein Strahl des durch k^3 erzeugten Strahlensystems 1. O. und 3. Klasse.**)

Wählt man umgekehrt v als uneigentliche Bisekante von k^3 beliebig, so ist dadurch eine einzige planar-ternär-zyklische Kollineation bestimmt, die k^3 in sich überführt. Denn sind P und Q zwei beliebige Punkte von v und A_1, A_2, A_3 die Schnittpunkte von k^3 mit einer beliebigen durch die Polare u von v gehenden Ebene mit k^3, so ist K dargestellt durch $A_1 A_2 A_3 P Q \barwedge A_2 A_3 A_1 P Q$, und diese ist ternär-zyklisch, da $K^3 \equiv 1$ ist.

Also können wir sagen:

Eine beliebige kubische Raumkurve k^3 wird durch ∞^2 planar-ternär-zyklische Kollineationen in sich übergeführt; die punktweise sich selbst entsprechende Gerade einer solchen Kollineation ist eine uneigentliche Bisekante von k^3, ihre konjugierte Polare in dem zu k^3 gehörigen Nullsystem ist die andere sich selbst entsprechende Gerade.

Zu jeder uneigentlichen Bisekante von k^3 gehört eine einzige planar-ternär-zyklische Kollineation, die k^3 in sich überführt.

Betrachten wir zweitens diejenigen Kollineationen, die *nur einen Punkt invariant* lassen, also solche vom Typus (5). In beliebigen homogenen Koordinaten sei k^3 als die Kurve gegeben, in welcher sich außer in der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Flächen

$$\text{a)}\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \quad \text{und} \quad \text{b)}\ x_2 x_3 - x_1 x_4 = 0$$

schneiden. Dann geht k^3 durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, hat in ihm $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zur Tangente und $x_1 = 0$ zur Schmiegungsebene. Eine Kollineation aber, die diesen Punkt, diese Gerade und diese Ebene als einzige Doppelelemente besitzt, muß nach (5) folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \varrho x_4 &= x_4' + a x_3' + b x_2' + c x_1', \\ \varrho x_3 &= \quad\ x_3' + d x_2' + e x_1', \\ \varrho x_2 &= \quad\quad\ x_2' + f x_1', \\ \varrho x_1 &= \quad\quad\quad\ x_1', \end{aligned}$$

wenn ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

*) Vgl. hierzu Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. O. und der Raumkurven 3. O., Leipzig 1880, S. 282. Ternär-zyklische Projektivitäten auf einer k^3 werden gelegentlich der Untersuchung solcher Tangentenquadrupel von k^3, die nur eine Treffgerade haben, auch betrachtet von R. Sturm, Liniengeometrie I, § 244 ff.

**) Reye, a. a. O. S. 193, 202, 4. Aufl., S. 162, 160.

Soll nun diese Kollineation k^3 in sich überführen, so muß sie den Kegel a) in sich und die Fläche b) in eine Fläche des durch a) und b) bestimmten Büschels überführen. Die erste Bedingung ergibt: $d = 2f$, $e = f^2$; die zweite: $a = 3f$, $b = 3f^2$, $c = f^3$. Setzt man umgekehrt diese Werte in die vorigen Gleichungen ein, so erhält man eine Kollineation K, die k^3 unter Festhalten der genannten Elemente in sich transformiert.

Fragen wir, welche anderen kubischen Raumkurven außer k^3 vermöge K in sich übergehen. Soll eine solche, ${k_1}^3$, auch auf dem Kegel a) liegen, so dürfte sie mit k^3 außer dem Scheitel S des Kegels keinen weiteren Punkt gemeinsam haben, da ein solcher ja Doppelpunkt von K sein müßte. Da nun zwei auf demselben Kegel liegende kubische Raumkurven außer dem Scheitel vier Punkte gemeinsam haben*), so müßten ${k_1}^3$ und k^3 in S eine fünfpunktige Berührung eingehen. Das Büschel dieser Kurven**) wird durch die Gleichungen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^2\omega^3 : \lambda\omega^2 : \omega : 1$$

dargestellt, wo λ und ω Parameter bedeuten, von denen λ nur von Kurve zu Kurve variiert.

Nun bleibt aber nur, wenn

$$\text{c)} \quad x_1x_4 - \lambda x_2x_3 = 0$$

vermöge K in eine Fläche des durch a) und c) bestimmten Büschels übergeht, die demselben Wert von λ entsprechende Kurve invariant. Jenes ist aber, wie die Rechnung zeigt, nur für $\lambda = 1$ der Fall. Also wird jenes Büschel von Raumkurven durch K projektiv mit k^3 als einzigem Doppelelement auf sich selbst bezogen.

Liegt aber ${k_1}^3$ nicht auf a), so kann sie nur auf einem der ∞^1 Kegel liegen, die mit a) konzentrisch sind und mit ihm in der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ eine vierfache Berührung eingehen. Denn diese und nur diese Kegel

$$\text{d)} \quad x_1x_3 - {x_2}^2 + k{x_1}^2 = 0$$

gehen durch sämtliche ∞^1 Kollineationen K in sich über.

Es wird aber auch, wenn man den Wert von k festhält, jede Fläche

$$\text{e)} \quad x_2(x_3 - 2kx_1) - x_1x_4 = 0$$

durch sämtliche K in Flächen des durch d) und e) bestimmten Büschels transformiert, so daß jedes zu demselben Werte von k gehörige Gleichungspaar d) und e) eine kubische Raumkurve liefert, die gleichfalls durch sämtliche K nicht geändert wird.

Außer dieser einen gibt es aber auf keinem der Kegel d) noch eine zweite. Denn eine solche müßte wieder dem auf dem Kegel liegenden

*) Reye, a. a. O. 3. Aufl. II, S. 198, 4. Aufl. II, S. 239.

**) Vgl. Arch. f. Math. (3) Bd. 11, S. 80 f.

Büschel von Kurven, die in seinem Scheitel sich fünffach berühren, angehören, also denjenigen, die aus dem Kegel durch das Flächenbüschel

$$x_2(x_3 - 2kx_1) - \lambda x_1 x_4 = 0,$$

— wo k fest, λ variabel ist, — ausgeschnitten werden; aber keine der Kollineationen K führt eine andere von diesen Flächen als die durch $\lambda = 1$ bestimmte, in eine Fläche des durch sie und d) bestimmten Büschels über.

Soll umgekehrt eine Raumkurve 3. O. kollinear so in sich übergeführt werden, daß nur ein Punkt der Kurve invariant bleibt, so muß die Kollineation vom Typus (5) sein. Denn bliebe irgend ein weiterer Punkt des Raumes in Ruhe, so auch die durch ihn gehende Nullebene und deren zwei oder drei mit der Kurve gemeinsame Punkte. Diese müßten sich involutorisch bezw. zyklisch vertauschen, was aber nur möglich ist, wenn zwei Kurvenpunkte fest bleiben.

Also können wir den Satz aussprechen:

Es gibt nur ∞^1 Kollineationen, die eine beliebig gegebene kubische Raumkurve so in sich überführen, daß ein einziger beliebig gewählter Punkt der Kurve in Ruhe bleibt. Diese Kollineationen lassen sich bei geeigneter Koordinatenwahl auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= x_1', \\
\varrho x_2 &= x_2' + f x_1', \\
\varrho x_2 &= x_3' + 2f x_2' + f^2 x_1', \\
\varrho x_4 &= x_4' + 3f x_3' + 3f^2 x_2' + f^3 x_1',
\end{aligned}$$

wo f beliebig bleibt, und der invariante Punkt, seine Tangente und Schmiegungsebene bezw. die Gleichungen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = 0$ haben. Alle diese Kollineationen lassen die durch

$$\begin{cases} x_1 x_3 - x_2^2 + k x_1^2 = 0, \\ x_2(x_3 - 2k x_1) - x_1 x_4 = 0 \end{cases}$$

dargestellten ∞^1 Raumkurven 3. O. und keine anderen invariant.

§ 8.

Bestimmung aller äquiaffinen Kollineationen, die eine kubische Raumkurve in sich überführen.

Wir behandeln zur Lösung dieser Aufgabe die verschiedenen Arten kubischer Raumkurven einzeln.

a) *Die kubische Hyperbel.* Soll sie durch eine affine Kollineation in sich übergehen, so sind folgende Fälle möglich: 1) Die drei reellen unendlich

fernen Punkte bleiben fest, 2) einer von ihnen bleibt fest, die beiden andern vertauschen sich involutorisch, 3) alle drei vertauschen sich zyklisch.

Fall 1) ist unmöglich, da sonst die Kurve punktweise invariant bliebe.

Im Falle 2) entsteht auf der Kurve eine involutorische Punktprojektivität mit reellen Doppelpunkten. Also ist auch die Kollineation involutorisch. Sie kann nur geschart-involutorisch sein, und da sie affin ist, so liegt die eine Achse im Unendlichen. Es kann also nur eine axiale (schiefe) Symmetrie sein, die Achsen „assoziierte Geraden"*), und zwar ist die im Unendlichen liegende Achse der im Unendlichen liegende Schmiegungsstrahl durch den festbleibenden unendlich fernen Punkt der Kurve, die im Endlichen liegende Achse ein bestimmter**) Durchmesser der Kurve.

Im Fall 3) haben wir eine planar-ternär-zyklische Kollineation; die im Endlichen gelegene Achse ist die Bisekante durch den Pol der unendlich fernen Ebene.

b) *Die kubische parabolische Hyperbel.* Hier gibt es zwei Fälle: 1) die beiden unendlich fernen Punkte bleiben einzeln invariant: 2) sie vertauschen sich involutorisch.

Im ersten Fall haben wir ein invariant bleibendes reelles Schmiegungstetraeder. Seine Ecken seien A, B, C, D; A sei der einfach, C der doppelt zählende unendlich ferne Kurvenpunkt; AB, CD die zugehörigen Tangenten. Dann ist nach Hrn. Sturm, wenn X, X' ein Paar reeller durch die Kollineation zugeordneter Punkte ist und XX' die Tetraederebenen ABC, BCD, CDA, DAB bezw. in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ schneidet:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}),$$

und wegen der Äquiaffinität der Kollineation, nach § 5:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}) \cdot (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = \pm 1,$$

woraus $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \pm 1$ folgt. Da aber

$$(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \cdot (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D})^2,$$

so muß $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = +1$ sein. Ferner ist, da also

$$(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = \pm 1$$

ist,

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D})^2 = +1.$$

Das heißt aber: jede Gerade XX' trifft AD und BC, die Kollinea-

*) Sturm, a a. O. § 37.

**) Jener erste Schmiegungsstrahl ist nämlich die Tangente in einer Spitze derjenigen Kurve, die aus der Developpabeln der Raumkurve 3. O. durch die unendlich ferne Ebene ausgeschnitten wird. Er trifft diese Schnittkurve noch in einem weiteren Punkt P, und der Berührungspunkt der von P an die Raumkurve gehenden Tangente ist ein Punkt des Durchmessers, von welchem oben die Rede ist.

tion ist geschart, also auch involutorisch. Sie ist identisch mit der einzigen axialen Symmetrie, welche die Kurve zuläßt.*)

Im zweiten Fall entstände auf der Raumkurve eine involutorische Punktprojektivität, also wäre auch die Kollineation involutorisch. Sie kann nur geschart involutorisch sein, und da sie affin ist, sind beide Achsen reell**) und liegt die eine im Unendlichen. Wir würden wieder die einzige mögliche axiale Symmetrie erhalten, wie im ersten Fall. Da aber bei ihr, wie wir soeben sahen, die beiden unendlich fernen Punkte invariant bleiben, so ist dieser zweite Fall auszuschließen.

c) Für die *kubische Ellipse* gibt es nur einen Fall: der reelle unendlich ferne Punkt bleibt in Ruhe, die beiden imaginären vertauschen sich involutorisch. Man erhält die einzige vorhandene axiale Symmetrie.

d) Die *kubische Parabel* läßt zwei Fälle zu: entweder ist der jedenfalls invariant bleibende unendlich ferne Punkt C der einzige oder nicht.

Im ersten Fall gelangt man zu den ∞^1 Kollineationen, von denen im § 7 ausführlich die Rede war.

Wenn *im zweiten Fall* ein sonst noch invariant bleibender Punkt A auf der Kurve liegt, so würde aus

$$\alpha) \quad (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{A}) \cdot (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A}) \cdot (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{A}) = \pm 1$$

und den Sturmschen Bedingungen folgen:

$$(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A})^2 = \pm 1,$$

so daß also wegen der Realität des Schmiegungstetraeders in α) nur das positive Zeichen gelten kann. Also:

$$\beta) \quad (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = \pm 1.$$

Daraus aber folgt nacheinander:

$$(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \pm(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}); \; (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = \pm(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{A})^2; \; (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})^3 = \pm 1,$$

d. h.:

$$\gamma) \quad (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \pm 1,$$

wo von β) einschließlich an entweder gleichzeitig alle oberen Zeichen oder alle unteren gelten.

Dann aber sind entweder $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und sämtliche fünf analogen Würfe gleich $+1$; oder es sind alle gleich -1 mit Ausnahme von $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{A}) = +1$. Das Erstere kann nur für die Typen (5) und (11) eintreten; (5) haben wir bereits erledigt, und eine Kollineation vom Typus (11) ist hier unmöglich, weil sie, wie man sofort sieht, involutorisch sein müßte, während es involutorische Kollineationen vom Typus (11) nicht gibt. Das Zweite führt zu den axialen Symmetrien.

*) Vgl. Schröter, a. a. O. S. 332.

**) Reye, a. a. O. II, S. 78.

Wenn dagegen im zweiten Falle ein nicht auf der Kurve liegender invariant bleibender Punkt vorhanden ist, so bleiben auch seine Nullebene und deren Schnittpunkte mit der Kurve in Ruhe. Der letzteren gibt es entweder drei oder zwei. Sie müßten sich zu dreien oder zu zweien zyklich vertauschen. Da aber hier eine ternär-zyklische Projektivität auf der Kurve unmöglich ist — denn eine solche enthält nur imaginäre Doppelpunkte —, so gelangen wir auch hier nur zu den axialen Symmetrien.

Fassen wir alle Ergebnisse des § 8 zusammen, so können wir sagen:

Die einzigen Kollineationen, die eine kubische Raumkurve in sich überführen und die Volumina invariant lassen, sind:

a) *für die kubische Hyperbel:*
   1) *die drei axialen Symmetrien mit den Durchmessern als Achsen,*
   2) *eine planar-ternär-zyklische Kollineation, welche alle Punkte der durch den Pol der unendlich fernen Ebene gehenden Bisekante der Kurve und außerdem die dieser Bisekante in dem zur Kurve gehörigen Nullsystem konjugierte Polare invariant läßt;*

b) *für die kubische parabolische Hyperbel und*

c) *für die kubische Ellipse:*
   je eine axiale Symmetrie;

d) *für die kubische Parabel:*
   1) ∞^1 *axiale Symmetrien,*
   2) ∞^1 *Kollineationen, deren jede den unendlich fernen Kurvenpunkt als einzigen Doppelpunkt besitzt.*

Charlottenburg, Anfang Oktober 1906.

Die Definition des Mengenbegriffs.

Von

Johannes Mollerup in Kopenhagen.

Die klassische Definition des Mengenbegriffs, wie sie z. B. von Dedekind („Was sind und was sollen die Zahlen"), Cantor (Math. Annalen Bd. 46) und H. Weber („Encyclopädie der Elementarmathematik") gegeben ist, läuft darauf hinaus, jeden Inbegriff als Menge aufzufassen; eine Menge ist dann wohldefiniert, wenn es von jedem Ding gegeben ist, ob es der Menge angehört oder nicht. Frege („Grundlagen der Arithmetik" und „Grundgesetze der Arithmetik") geht davon aus, daß ein Begriff seinen Umfang bestimmt; Peano („Arithmetices principia, nova methodo exposita") und Russell („Principles of Mathematics") meinen, daß ein Satz die Menge der Elemente, die dem Satz genügen, definiert.

Diesen Auffassungen gegenüber kann man einwenden, daß sie *erstens* nicht für die Begründungen der Arithmetik, die die genannten Werke uns liefern, ausreichen; bei genauem Durchlesen der Beweise wird man finden, daß es keineswegs genügt, solche Mengen zu betrachten, wo von jedem Ding gegeben ist, ob es der Menge angehört oder nicht. *Zweitens* hat diese Auffassung jedes Inbegriffs als Menge bekanntlich zu gewissen Widersprüchen in der Mengenlehre geführt, worüber schon eine ziemlich große Literatur existiert (Burali-Forti, Russell, Schoenflies, Bernstein etc.); hier möchte ich nur bemerken, daß die Definition des Begriffs der natürlichen Zahl, die H. Weber und Russell (l. c.) geben: „die Menge der Mengen, die einer gegebenen Menge ähnlich sind" selbst widerspruchsvoll ist; hiernach sollte z. B. die Zahl 1 die Menge aller Dinge sein. (Neuerdings hat H. Weber auch eine andere Definition des Zahlbegriffs gegeben, Jahresb. d. D. Mathematiker-Vereinigung 1906.)

Eine ganz andere Mengendefinition hat in einem speziellen Falle D. Hilbert gegeben (Mathematische Probleme, Göttinger Nachrichten 1900, Problem 2); hier wird das Konstatieren der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome mit dem Existenzbeweis der Menge aller

reellen Zahlen oder des Kontinuums identifiziert. Hieran wollen wir im folgenden anknüpfen, indem wir folgende allgemeine Frage stellen: *Welche Eigenschaften muß ein System von Axiomen haben, wenn es in dieser Weise eine Menge definieren soll, und zwar die Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen?*

Die Beantwortung dieser Frage wird uns eine Mengendefinition geben, die jede widerspruchsvolle Menge ausschaltet.

2. Die Axiome der (reellen) Arithmetik sind nach D. Hilbert („Über den Zahlbegriff", Jahresber. d. D. Mathematiker-Vereinigung, 1899) folgende 18.

I. Axiome der Verknüpfung.

1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch „*Addition*" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen

$$a + b = c \quad \text{oder} \quad c = a + b.$$

2. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existiert stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so daß

$$a + x = b \quad \text{bez.} \quad y + a = b$$

wird.

3. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 0 —, so daß für jedes a zugleich

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad 0 + a = a.$$

4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art, durch „*Multiplikation*", eine bestimmte Zahl, in Zeichen

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

5. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind und a nicht 0 ist, so existiert stets eine und nur eine Zahl x, und auch eine und nur eine Zahl y, so daß

$$ax = b \quad \text{bez.} \quad ya = b.$$

6. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 1 —, so daß für jedes a zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist.

II. Axiome der Rechnung.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

7. $(a+b)+c = a+(b+c)$,
8. $a+b = b+a$,
9. $(ab)c = a(bc)$,
10. $a(b+c) = ab+ac$,
11. $(a+b)\,c = ac+bc$,
12. $ab = ba$.

III. Axiome der Anordnung.

13. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte (etwa a) größer ($>$) als die andere; die letzte heißt dann die kleinere, in Zeichen

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

14. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

15. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets

$$a + c > b + c \quad \text{und} \quad c + a > c + b.$$

16. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

IV. Axiome der Stetigkeit.

17. (*Archimedisches Axiom.*) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addieren, daß die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \cdots + a > b.$$

18. (*Axiom der Vollständigkeit.*) Es ist nicht möglich, dem System der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome 1—17 sämtlich erfüllt sind.

Ich bemerke, um des besseren Verständnisses willen, daß das Archimedische Axiom so zu verstehen ist, daß die darin auftretende Redeweise „so oft“ schon vorher erklärt sein muß, indem man etwa die Theorie der natürlichen Zahlen aufgebaut hat.

3. Ich kehre nun zu der Fragestellung zurück: Welche Eigenschaften muß ein System von Axiomen haben, wenn es die Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen, definieren soll?

Zunächst sehen wir, daß, wenn wir von der trivialen Menge 0 absehen, *die Forderung der Widerspruchslosigkeit der Axiome* gestellt werden muß, d. h. es soll unmöglich sein, durch die Axiome zu beweisen, daß $a = b$ und $a \neq b$. Ich nenne diese Forderung eine *arithmetische.*

Es ist aber sehr wichtig, daß das System der Axiome noch eine andere Eigenschaft haben muß, wenn es die gesuchte Menge definieren soll. Um diesen Umstand deutlich hervortreten zu lassen, werde ich einige Beispiele geben, wo die arithmetische Forderung erfüllt ist, wo aber die Menge nicht definiert ist und im allgemeinen gar nicht existiert.

4. Wir betrachten zuerst die Axiome 1—15, von denen wir an dieser Stelle annehmen können, daß sie keinen Widerspruch enthalten; wir nehmen an, daß sie „die Menge aller Elemente, die ihnen genügen", bestimmen. Wir werden nun einen Widerspruch herleiten. Aus den Elementen werden Paare gebildet, so aus den Elementen a und b das Paar (ab); nicht jedes Paar soll neu sein, indem wir festsetzen, daß $(ab) = a$, wenn $b = 0$. *Sonst sind die Paare neue Elemente, die der Menge nicht angehören.* Hiernach setzen wir folgende Regeln der Rechnung fest:

$$(ab) + (cd) = (a + c,\ b + d),$$

$$(ab) \cdot (cd) = (ac - bd,\ ad + bc),$$

$$(ab) > (cd), \text{ wenn } a > c \text{ und wenn } a = c,\ b > d.$$

Durch diese Definitionen gelingt es bekanntlich zu beweisen, daß sämtliche Sätze 1—15 für die Zahlenpaare erfüllt sind. *Es gehört somit jedes Zahlenpaar zu der Menge der Elemente, die den Axiomen* 1—15 *genügen.* Die zwei hervorgehobenen Ergebnisse stehen miteinander in Widerspruch. Obwohl nun die 15 Axiome keinen Widerspruch erhalten, ist die Annahme der Existenz der Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen, falsch.

Wir können das Resultat auch so ausdrücken: Wenden wir die Sätze 1—15 an, dann entstehen aus 0 und 1 neue Zahlen, die wir *Funktionen* von 0 und 1 nennen können, und zwar Funktionen, die durch die Sätze *gegeben* sind. Man kann dann fragen, ob ein Element, das mit den Funktionen von 0 und 1 zusammen den Sätzen genügt, selbst eine Funktion von 0 und 1 ist; hier braucht das nicht der Fall zu sein. Die Paare genügen den Sätzen, werden aber nicht durch die Sätze erzeugt.

5. Ein anderes Beispiel geben uns die Hilbertschen Nicht-Archimedischen Zahlen; wir betrachten die Axiome 1—16 und fragen wieder nach der Existenz der Menge aller Zahlen, die diesen Sätzen genügen. Nehmen wir an, daß diese Menge existiert und aus Zahlen $a_0 a_1 a_2 \cdots$ besteht. Wir bilden dann Ausdrücke von der Gestalt

$$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \cdots;$$

hierin bedeuten $a_0 (\neq 0)$, a_1, a_2, $\cdots$ beliebige Zahlen der Menge und n eine beliebige ganze Zahl. Bei geeigneten Festsetzungen über die Rechnungen mit solchen Zahlen und über das Größer- und Kleinersein sieht man, daß die Axiome 1—16 alle erfüllt sind. Es müßten also die Ausdrücke α zu der Menge gehören. Wenn aber t ein unabhängiger Parameter ist, dann ist dieses doch nur der Fall, wenn $n = a_1 = a_2 = \cdots = 0$. Wir haben also den Widerspruch wie früher, und die besprochene Menge existiert nicht.

In diesen Beispielen ist nur die mengentheoretische Auffassung neu;

der Inhalt findet sich schon in einer Bemerkung von D. Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, pag. 17): „Die Erfüllbarkeit des Vollständigkeitsaxioms ist wesentlich durch die Voranstellung des Archimedischen Axioms bedingt."

6. Betrachten wir nun die Axiome 1—17; wir nehmen an, daß es eine Menge aller Zahlen, die den Axiomen genügen, gibt. Wir bilden dann aus den Elementen Fundamentalreihen $(a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu \cdots)$ und definieren, daß $(a_1 a_2 a_3 \cdots a_\nu \cdots)$ nur dann wieder einem Element b der Menge gleich ist, wenn $|b - a_\nu|$ kleiner als eine willkürlich gegebene Zahl $(\varepsilon > 0)$ der Menge ist für ein gewisses ν und jedes größere. Dann gelingt es nach G. Cantor (Math. Ann. Bd. 21) durch die bekannten Festsetzungen für Rechnung mit Fundamentalreihen zu beweisen, daß die Axiome 1—17 immer erfüllt sind. Die Fundamentalreihen gehören also der Menge an, und es ist somit bewiesen, daß jede Fundamentalreihe eine Grenze hat. Dieser Satz aber ist von den Axiomen 1—17 unabhängig, weil es eine Menge gibt, nämlich die Menge der Rationalzahlen, für welche die Axiome 1—17 gelten, der betreffende Satz aber nicht. Die Aussage, daß es eine Menge aller Zahlen, die den Axiomen 1—17 genügen, gibt, ist also keine Folge dieser Axiome, vielmehr ein selbständiges Axiom in der Tat das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom.

7. Wir haben also noch kein System von Sätzen betrachtet, das eine Menge definieren kann. Zu den Sätzen 1—17 fügen wir nun den Satz:

18_r. *Wenn* $a > 0$, *kann* a *so oft zu sich selbst addiert werden, daß eine Summe von Einsen entsteht.*

In diesem Falle hat ein beliebiges Element, das den Sätzen genügt, die Eigenschaft aus 0 und 1 durch die Axiome 1—18 zu entstehen, unabhängig von den getroffenen Festsetzungen über $\gtreqless, +, \cdots$. Ist das Element α, dann ist

$$\alpha + \alpha + \alpha + \cdots + \alpha = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$$

oder

$$\alpha \cdot m = n,$$

$$\alpha = n : m.$$

Behaupten wir nun, daß es eine Menge aller Elemente gibt, die den Sätzen $1—18_r$ genügen, dann finden wir hier keinen Widerspruch; nehmen wir nämlich ein Element, das nach Festsetzung nicht der Menge angehört, dann genügt dasselbe auch nicht dem Satz 18_r. Wir können auch sagen: der Vollständigkeitssatz ist eine Folge der Sätze $1—18_r$. In diesem Falle existiert dann die Menge (vorausgesetzt, daß die arithmetische Forderung

der Widerspruchslosigkeit der Sätze 1—18_r erfüllt ist) und heißt die Menge der Rationalzahlen.

8. Ergänzen wir noch auf eine andere Weise das Axiomsystem 1—17 durch das Axiom 18_c: *Jede Fundamentalreihe hat eine Grenze.*

Ist α dann wieder ein beliebiges Element, das den Sätzen 1—18_c genügt, dann können wir nach 2 und 17 annehmen

$$a > \alpha > b \quad \text{wo} \quad a > 0,\ b > 0.$$

Wir bilden dann die Zahl $\frac{a+b}{2}$; es ist dann $\left(\text{wenn } \alpha \neq \frac{a+b}{2}\right)$ entweder

$$\frac{a+b}{2} > \alpha > b$$

oder

$$a > \alpha > \frac{a+b}{2}.$$

Im ersten Falle setzen wir

$$\frac{a+b}{2} = a_1, \qquad b = b_1;$$

dagegen im zweiten

$$a = a_1, \qquad \frac{a+b}{2} = b_1$$

Nun ist

$$a_1 > \alpha > b_1$$

und

$$a_1 - b_1 = \frac{a-b}{2}.$$

Auf diese Weise fahren wir fort und bestimmen

$$a_2 > \alpha > b_2,$$

wo

$$a_2 - b_2 = \frac{a-b}{2^2} \quad \text{usw}$$

Es ist also immer

$$a_n > \alpha > b_n$$

und

$$a_n - b_n = \frac{a-b}{2^n}.$$

Die zwei Reihen $(a a_1 a_2 a_3 \cdots)$ und $(b b_1 b_2 b_3 \cdots)$ sind Fundamentalreihen und bestimmen dieselbe Grenze $a_\infty = b_\infty$ (nach 18_c).

Wir wollen beweisen, daß

$$\alpha = a_\infty = b_\infty.$$

Nehmen wir erstens an, daß

$$\alpha > a_\infty;$$

dann ist für jedes ν

$$a_\nu > \alpha > a_\infty$$

oder

$$|a_\nu - a_\infty| > |\alpha - a_\infty|.$$

Ist M (nach der früher eingeführten Redeweise) eine beliebig gewählte Funktion von 0 und 1, die größer als 0 ist, dann läßt sich nach 17 eine natürliche Zahl n bestimmen, so daß

$$n|\alpha - a_\infty| > M;$$

es ist auch

$$n|a_\nu - a_\infty| > n|\alpha - a_\infty|,$$

also

$$n|a_\nu - a_\infty| > M$$

oder

$$|a_\nu - a_\infty| > \frac{M}{n};$$

diese Relation ist aber mit der Definition der Grenze in Widerspruch. Ebenso wenig ist es möglich, daß

$$b_\nu < \alpha < b_\infty.$$

Also ist

$$\alpha = a_\infty = b_\infty.$$

Hier haben wir dann denselben Fall: ein Element, das den Axiomen 1—17, 18_c genügt, wird durch die Axiome aus 0 und 1 erzeugt, oder, wie wir sagen, es ist eine Funktion von 0 und 1. Der Vollständigkeitssatz ist also auch hier eine Folge der Sätze; die Sätze definieren, ihre arithmetische Widerspruchslosigkeit vorausgesetzt, eine Menge, die Menge aller reellen Zahlen oder das Kontinuum.

9. Seien nun $1, 2, 3, \cdots, n$ gewisse Sätze (in endlicher Anzahl), die von gewissen Operationen zwischen den speziellen Elementen $a, b, c, \cdots, i$ (in endlicher Anzahl) handeln; *wir beweisen dann zuerst, daß diese Sätze arithmetisch widerspruchsfrei sind.* Durch Anwendung der Sätze entstehen aus den ursprünglichen Elementen $a, b, c, \cdots, i$ neue Elemente, die wir Funktionen von $a, b, c, \cdots, i$ nennen. *Wenn nun der sofort zu zitierende Vollständigkeitssatz eine logische Folge der Sätze* $1, 2, 3, \cdots, n$ *ist, sagen wir, daß diese Sätze eine Menge aller Elemente, die ihnen genügen, definieren.*

Der Vollständigkeitssatz lautet so:

Wenn die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ *zusammen mit den Funktionen von* $a, b, c, \cdots, i$ *den Sätzen* $1, 2, 3, \cdots, n$ *genügen, dann sind* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ *selbst Funktionen von* $a, b, c, \cdots, i$.

Wir stellen also an ein Axiomsystem zwei Forderungen, nämlich *erstens* eine arithmetische Forderung der Widerspruchslosigkeit und *zweitens* die mengentheoretische Forderung der Vollständigkeit.

Ist nun die Menge auf diese Weise definiert, dann sind auch ihre Elemente nachher als die Funktionen der in den Axiomen auftretenden speziellen Elementen definiert.

Vielleicht ist es nicht unnütz hervorzuheben, daß jede besondere Definition der Elemente entfernt und in die Sätze $1, 2, 3, \cdots, n$ axiomatisch aufgenommen werden muß.

Es wird nun in der Tat gelingen, zu beweisen, daß in diesem Sinne die endliche Menge, die Menge der ganzen, der rationalen, der reellen Zahlen, endlich auch die Cantorschen Zahlenklassen existieren, indem man für jede dieser Mengen ein solches Axiomensystem bilden kann. Dagegen wird ein Axiomensystem von der Menge W aller Ordnungstypen die Vollständigkeitseigenschaft vermissen lassen, und diese Menge existiert im obengenannten Sinne nicht.

Göttingen, Juli 1906.

Über einen Satz von Routh und ein damit zusammenhängendes Problem der Variationsrechnung.

Von

Philipp Frank in Wien.

Ein materieller Punkt bewege sich in der Ebene mit der vorgegebenen Energie h unter dem Einfluß von Kräften, welche die Kräftefunktion $V(x, y)$ besitzen. Man kann seine Bahn zwischen den beiden vorgegebenen Punkten A und B erhalten, indem man die Extremalen des Integrals

$$J = \int \sqrt{h - V(x, y)}\, ds$$

aufsucht. Kurven, die das Integral J zu einem Minimum machen, werden hiernach Bahnkurven sein, wenn auch nicht umgekehrt. In der Mechanik wird nur bewiesen, daß die Bahnkurven Extremalen von J sind und umgekehrt. Wir wollen aber jetzt fragen:

Gibt es nicht außer den A mit B verbindenden Extremalen noch Kurven, die J zu einem Minimum machen? Gäbe es solche Kurven, so brauchten diese keine Bahnkurven zu sein, womit der Satz, daß jedes Minimum eine Bahnkurve liefert, sich als nicht streng richtig herausstellte.

Zuerst fragen wir: Gibt es aus Extremalenstücken bestehende, eine endliche Anzahl von Knickungen aufweisende Kurven, die J zu einem Minimum machen?

Aus der Erdmannschen Bedingung folgt, daß keine derartige Kurve, die ein Integral von der Form $\int f(x, y) ds$ zu einem Minimum macht, einen Knickpunkt anderswo haben kann als auf der Kurve $f(x, y) = 0$, d. i., auf unseren Fall angewendet, auf der Kurve $h - V(x, y) = 0$.

Eine derartige unstetige Lösung unseres Minimalproblems müßte also aus zwei Extremalenstücken bestehen, die durch A resp. B hindurchgehen und einander auf der Kurve $h - V(x, y) = 0$, die wir Grenzkurve nennen schneiden.

Welche von A ausgehenden Extremalen können aber überhaupt die Grenzkurve erreichen? Für $h - V(x, y) = 0$ ist die kinetische Energie,

also auch die Geschwindigkeit des materiellen Punktes gleich Null; wenn wir also, da ja alle Bewegungen auch rückläufig vor sich gehen können, einen materiellen Punkt an einem Punkte der Grenzkurve sich selbst überlassen, d. h. ihm keine Anfangsgeschwindigkeit erteilen, wird er die Linie schnellsten Potentialabfalls, die orthogonale Trajektorie der Kurvenschar $h - V(x, y) = \text{konst.}$, durchlaufen. Auf einem anderen Wege kann ein beweglicher Punkt die Grenzkurve nie verlassen. Da nun die Bahnkurven mit den Extremalen von J identisch sind, kann keine Extremale außer den orthogonalen Trajektorien der Schar $h - V(x, y) = \text{konst.}$ die Grenzkurve treffen. Die einzigen von A resp. B ausgehenden Extremalen, welche die Grenzkurve treffen, sind also die durch diese Punkte gehenden Trajektorien. Wir wollen uns nun die ganze Schar dieser Trajektorien samt ihrer Enveloppe gezogen denken. Das Gebiet zwischen der Grenzkurve und der Enveloppe wird von den Trajektorien einfach überdeckt und auf dieses Gebiet wollen wir künftighin immer die Punkte A und B beschränken. Dann können, wenn A und B voneinander verschieden sind, sich nie zwei Extremale, die durch diese Punkte gehen, auf der Grenzkurve schneiden. Es ist also keine geknickte Lösung möglich, deren einzelne Stücke Extremalen sind.

Dagegen ist schon lange bekannt, daß bei Variationsproblemen, wenn die betrachteten Kurven auf gewisse Gebiete beschränkt sind, diskontinuierliche Lösungen auftreten können, die nicht nur aus Extremalenstücken, sondern auch aus Stücken der Schranke zusammengesetzt sind.

Nun aber gibt es Variationsprobleme, die eine natürliche, dem Problem selbst inhärierende Schranke besitzen. Wenn nämlich die Funktion $f(x, y, y')$ so beschaffen ist, daß für gewisse Kurven $\int f(x, y, y')dx$ einen komplexen Wert annehmen kann, so versteht sich das Variationsproblem so, daß unter allen Kurven, *die dem Integral einen reellen Wert erteilen*, diejenige gesucht werden soll, die ihm einen Minimalwert erteilt. Denn bei komplexen Werten hat das „größer“ und „kleiner“ keinen Sinn mehr.

Dadurch ergibt sich von selbst eine Nebenbedingung von der Form

$$\varphi(x, y, y') \geqq 0.$$

Für unseren Fall des Integrals der kleinsten Wirkung ist $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$ und die Bedingung nimmt die Form gewöhnlicher Schrankenbedingungen an:

$$\psi(x, y) \geqq 0.$$

Unter allen Kurven, die auf einer Seite der Kurve $\psi(x, y) = 0$, die wir Grenzkurve nennen wollen, liegen, soll diejenige gesucht werden, die dem Integral den kleinsten Wert erteilt.

Unser Integral J hat für alle Kurven, die der Bedingung $h - V(x, y) \geqq 0$

genügen, einen reellen Wert, die Gleichung der Grenzkurve ist also $h - V(x, y) = 0$.

Eine diskontinuierliche Lösung könnte also aus Stücken von Extremalen und der Grenzkurve bestehen. Es gibt aber eine einzige Kurve, welche A mit B verbindet und nur aus Extremalen- und Grenzkurvenstücken besteht. Und zwar ist das der zweimal gebrochene Linienzug, der besteht

1) aus der durch A gehenden orthogonalen Trajektorie der Schar $V(x, y) = \text{konst.}$ von A bis zur Grenzkurve,

2) aus dem Stück der Grenzkurve von diesem Schnittpunkt bis zum Schnittpunkt mit der durch B gehenden Trajektorie und

3) aus dieser Trajektorie selbst von der Grenzkurve bis zum Punkt B. Wenn es also überhaupt ein derartiges Minimum gibt, so liefert es dieser Linienzug.

Nach dem Artikel von Kneser in der Encykl. d. math. Wiss. scheint schon Weierstraß bewiesen zu haben, daß ein aus Extremalen- und Schrankenstücken zusammengesetzter Linienzug nur dann ein Minimum liefern kann, wenn an der Berührungsstelle von Extremale und Schranke die Weierstraßsche E-Funktion verschwindet.

In unserem Falle lautet die E-Funktion:

$$E\left(x,y,x',y'\,\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau}\right)=\sqrt{h-V(x,y)}\left[\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\frac{dx}{d\tau}+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\frac{dy}{d\tau}-\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\right].$$

Sie verschwindet also an der Grenzkurve tatsächlich. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist erfüllt.

Wir wollen nun auch beweisen, daß der beschriebene Linienzug wirklich ein Minimum liefert.

Für eine spezielle Bewegungsart eines materiellen Punktes ist der Beweis des ausgesprochenen Satzes identisch mit dem für den Satz von Goldschmidt in seiner Göttinger Preisschrift vom Jahre 1831 (Determinatio superficiei minimae § 19, s. auch darüber: Todhunter, History of the Calculus of Variations § 308), daß beim Problem, zwei gegebene Punkte durch die Kurve zu verbinden, welche beim Rotieren um die x-Achse die Rotationsfläche kleinster Oberfläche liefert, außer der Kettenlinie auch eine diskontinuierliche Lösung existiert, die aus den von den gegebenen Punkten auf die x-Achse gefällten Perpendikeln und dem dazwischenliegenden Stück der x-Achse besteht. Dieses Problem ist nämlich mathematisch vollkommen äquivalent mit dem, die Bahnkurven eines materiellen Punktes in der Ebene zu finden, wenn die Energie Null vorgegeben ist, und der Punkt unter der Einwirkung einer von der x-Achse ausgehenden abstoßenden Kraft steht, die proportional dem

Abstande des Punktes von dieser Achse wirkt. Das Prinzip der kleinsten Wirkung gibt nämlich diese Bahnkurven als Extremalen des Integrals $\int + \sqrt{y^2}\, ds$. Der Punkt bewegt sich tatsächlich in Kettenlinien und, falls die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, in Normalen zur x-Achse. Die Grenzkurve ist die x-Achse selbst. Die von Goldschmidt angegebene diskontinuierliche Lösung fällt also mit der oben für das Prinzip der kleinsten Wirkung als allein möglich bezeichneten zusammen. Dieser Fall ist aber ein ganz spezieller, da die Grenzkurve nicht Gebiete mit komplexen und reellen Werten des Integrals trennt. Das Gebiet komplexer Werte ist vielmehr auf eine Linie, ein Gebiet vom Flächeninhalt Null, zusammengeschrumpft. Beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Inhalts ist die Schranke auch keine dem Problem inhärierende, sondern kommt durch die Nebenbedingung, daß die gesuchte Kurve die x-Achse nicht schneiden soll, hinein.

Den allgemeinen Satz über diese Art von Lösungen beim Integral der kleinsten Wirkung hat zuerst Routh in Advances Rigid Dynamics § 455 ausgesprochen. Obwohl F. Klein in einer Anmerkung zur deutschen Übersetzung auf die Bedeutung dieser Stelle für die Variationsrechnung hingewiesen hat, ist doch in der Literatur meines Wissens bisher nicht daran angeknüpft worden.

Die Überschrift des § 455 bei Routh „Diskontinuierliche Bewegungen" könnte leicht zu dem Mißverständnis führen, als handle es sich hier um Bewegungen, die außer den in der Mechanik gewöhnlich betrachteten Bewegungen unter dem Einfluß gegebener Kräfte unter dem Einfluß derselben Kräfte auch noch vor sich gehen können, während es sich tatsächlich darum handelt, daß es Kurven gibt, die dem Integral einen kleinsten Wert erteilen, ohne doch Bahnkurven zu sein, ja ihm unter Umständen einen kleineren Wert erteilen als die wirklichen Bahnkurven.

Dem Beweis des Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Wir hätten in einem Gebiet eine Funktion $f(x, y)$ definiert. In diesem Gebiet hätten wir zwei Kurven, deren Darstellung mit der Bogenlänge als Parameter laute:

$$\begin{matrix} x = a_1(s) \\ y = b_1(s) \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x = a_2(s) \\ y = b_2(s), \end{matrix}$$

ferner sei:

$$f[a_1(s),\ b_1(s)] \geqq f[a_2(s),\ b_2(s)],$$

oder kürzer

$$f_1(s) \geqq f_2(s).$$

Daraus folgt:

$$\int_0^{s_1} f_1(s)\, ds \geqq \int_0^{s_1} f_2(s)\, ds,$$

d. h. wenn die Kurven gleiche Länge haben, so ist $\int f(x, y) ds$ längs derjenigen größer, wo gleichen s größere Werte von f entsprechen.

Mit Hilfe dieses einfachen Satzes können wir sofort den Fall des schiefen Wurfes erledigen, dem ganz analog sich der allgemeine Fall erledigen läßt.

Wir nehmen die Punkte A und B in derselben Horizontalen an, die wir zur x-Achse wählen. Die y-Achse ziehen wir vertikal durch A nach aufwärts. A hat dann die Koordinaten $x = 0$, $y = 0$, B die Koordinaten $x = b$, $y = 0$. Weiter ist

$$V(x, y) = gy.$$

Die Grenzkurve ist also die Horizontale $y = \frac{h}{g}$, und das Integral lautet:

$$J = \int \sqrt{h - gy}\, ds.$$

Die von A und B auf die Grenzkurve gefällten Perpendikel haben die Fußpunkte A' resp. B'. Dann ist $AA' = BB' = \frac{h}{g}$ $AB = A'B' = b$.

Der aus geraden Linien bestehende Linienzug $AA'B'B$ liefert, wie wir zeigen wollen, ein Minimum. Wenn wir von A aus eine von AA' verschiedene Kurve von der Länge $\frac{h}{g}$ ziehen, längs der genommen das Integral J einen Sinn hat, so kann diese Kurve sicher nicht bis zur Grenzkurve reichen; folglich hat $\sqrt{h - gy}$, da diese Größe im selben Horizontalstreifen konstant bleibt und gegen die Grenzkurve zu abnimmt, längs der gezogenen Vergleichskurve sicher einen größeren oder mindestens gleichen Wert, wie in den entsprechenden Punkten der Vertikalen AA'. Dann hat aber nach unserem Hilfssatz das Integral J längs jeder anderen von A ausgehenden Kurve von der Länge $\frac{h}{g}$ einen größeren Wert als längs AA'. Ist die Kurve gar länger als $\frac{h}{g}$, so wird dadurch natürlich, da der Integrand wesentlich positiv ist, der Wert des Integrals nur vergrößert.

Daraus folgt unmittelbar: Verbinde ich A mit B durch irgend eine Kurve, längs deren das Integral einen Sinn hat, und deren Länge mindestens $\frac{2h}{g}$ beträgt, so hat längs dieser Kurve J einen größeren Wert als längs des Linienzuges $AA'B'B$, da ja längs der Grenzkurve J den Wert Null hat. Um zu beweisen, daß dieser Linienzug wirklich ein starkes Minimum im Sinne der Variationsrechnung liefert, ist noch zu zeigen, daß sich um ihn eine solche Umgebung abgrenzen läßt, daß jede A und B verbindende Kurve, die in ihr enthalten ist, mindestens die Länge $\frac{2h}{g}$ hat.

Diese Umgebung läßt sich aber folgendermaßen herstellen:

Wir zeichnen den Punkt C mit den Koordinaten $x = \frac{b}{2}$, $y = \sqrt{\frac{h^2}{g^2} - \frac{b^2}{4}}$, und ziehen von ihm aus eine Gerade nach unten zwischen A und B hindurch

ins Unendliche. Dann hat jede Kurve, die A mit B verbindet, ohne die von C ins Unendliche gezogene Gerade zu schneiden, mindestens die Länge $\frac{2h}{g}$, da ja die kürzeste derartige Kurve, die aus den beiden Geraden AC und CB besteht, gerade die Länge $\frac{2h}{g}$ hat.

Also liefert tatsächlich $AA'B'B$ ein starkes Minimum. Sind aber A und B so weit voneinander entfernt, daß $b \geqq \frac{2h}{g}$ ist, so ist keine A mit B verbindende Kurve kürzer als $\frac{2h}{g}$ und wir können den Satz aussprechen:

Unter allen denkbaren A mit B verbindenden Kurven, längs deren das Integral J überhaupt einen Sinn hat, erteilt der Linienzug $AA'B'B$ dem Integral den allerkleinsten Wert, also auch einen kleineren Wert als die A mit B verbindende Wurfparabel.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Fall über, wo $V(x, y)$ eine beliebige reguläre Funktion ist. Der Gedankengang des Beweises ist fast derselbe wie beim schiefen Wurf. Nur ist etwas Rechnung erforderlich, insbesondere deshalb, weil wir statt der geradlinigen Horizontalen und Vertikalen jetzt ein krummliniges System bestehend aus den beiden Kurvenscharen $h - V = \text{konst.}$ und ihren Trajektorien haben. Wie früher benutzen wir auch jetzt diese Scharen als Koordinatenlinien. Nur sind es jetzt krummlinige Koordinaten. Wir setzen $\sqrt{h - V(x, y)} = u$, und nehmen das System der Trajektorien als System $v = \text{konst.}$ A habe die Koordinaten $u = u_0$, $v = 0$, B die Koordinaten $u = u_1$, $v = b$, die Fußpunkte der durch A resp. B gehenden Trajektorien auf der Grenzkurve $u = 0$ mögen wieder A' und B' heißen.

A und B seien auf das Gebiet zwischen Grenzkurve und Enveloppe beschränkt. Wir schreiben

$$J = \int \sqrt{h - V(x, y)}\, ds = \int \sqrt{u} \sqrt{E du^2 + G dv^2}.$$

C sei ein Punkt mit den Koordinaten $u = \alpha$, $v = \beta$, dann ist das Integral J auf einer beliebigen im betrachteten Gebiet gelegenen Kurve von A nach C erstreckt sicher größer als das von A längs $v = 0$ bis zur Niveaulinie $u = \alpha$ erstreckte Integral. Wie man sich durch eine kurze Rechnung mit den Ausdrücken in krummlinigen Koordinaten überzeugt, ist die Differenz zwischen den beiden Integralen, wenn nur α genügend klein gewählt wird, so groß, daß das von A nach C erstreckte Integral auch größer ist als das von A längs der Trajektorie $v = 0$ bis A' erstreckte Integral. Wie man auch anschaulich sofort einsieht, muß α um so kleiner gewählt werden, je kleiner β ist. Wählen wir das zu $\beta = \frac{b}{2}$ gehörige α, und zeichnen uns den Punkt mit den Koordinaten $u = \alpha$, $v = \frac{b}{2}$ und

ziehen von diesem Punkte (wie beim schiefen Wurf) eine Linie zwischen A und B hindurch ins Unendliche, so ist durch die Bedingung, daß die A und B verbindenden Vergleichskurven diese Linie nicht schneiden sollen, eine Umgebung des Linienzuges $AA'B'B$ abgegrenzt, für die folgender Satz gilt, welcher eben der Satz ist, zu dem wir gelangen wollten:

„Bewegt sich ein materieller Punkt in der Ebene mit der vorgegebenen Energie h unter dem Einfluß von Kräften mit der Kräftefunktion $V(x, y)$, zeichnen wir uns die Kurven $V(x, y) = \text{konst.}$ und ihre orthogonalen Trajektorien und nehmen im Gebiet zwischen der Enveloppe dieser Trajektorien und der Kurven $h - V(x, y) = 0$ zwei beliebige Punkte A und B an, so liefert der zweimal geknickte Linienzug, der aus der von A zur Grenzkurve $(h - V = 0)$ gezogenen Trajektorie, dem Stück der Grenzkurve zwischen diesem Schnittpunkt und dem Schnittpunkt der durch B gehenden Trajektorie und endlich aus dieser Trajektorie selbst von der Grenzkurve bis B besteht, ein starkes Minimum des zu diesem Problem gehörigen Integrals der kleinsten Wirkung

$$J = \int \sqrt{h - V(x, y)}\, \sqrt{dx^2 + dy^2}.“$$

Falls A und B weit genug auseinanderliegen, kann der beschriebene Linienzug dem Integral auch einen allerkleinsten Wert erteilen. Jedenfalls ist gezeigt, *daß es Kurven gibt, die dem Integral der kleinsten Wirkung tatsächlich einen kleinsten Wert erteilen, ohne doch Bahnkurven zu sein*, während andererseits bekanntlich nicht alle Bahnkurven dem Integral einen kleinsten Wert erteilen. *Die Begriffe „Bahnkurve“ und „Kurve kleinster Wirkung“ sind vollkommen disparat.*

Als einfachstes Beispiel für den Fall mit Enveloppe betrachten wir elastische Schwingungen um den Koordinatenursprung. Hier ist

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Die Kurven $h = V(x, y) = \text{konst.}$ sind konzentrische Kreise um den Ursprung, die Grenzkurve hat den Radius $\sqrt{2h}$. Die orthogonalen Trajektorien sind die Radien der Kreisschar; ihre Enveloppe zieht sich auf den Mittelpunkt der Kreisschar zusammen. Wir können also die Punkte A und B beliebig zwischen dem Grenzkreis $x^2 + y^2 = 2h$ und einer beliebig kleinen um den Ursprung gezogenen geschlossenen Kurve annehmen. Ein aus zwei Radien und dem dazwischen liegenden Stück des Grenzkreises bestehender Linienzug wird ein Minimum des Integrals der kleinsten Wirkung $J = \int \sqrt{h - \frac{x^2 + y^2}{2}}\, ds$ liefern. Routh spricht den Satz nicht nur für die Bewegung eines Punktes in der Ebene, sondern für die Bewegung von n Punkten im Raume aus, und es dürfte sich auch unser Beweis leicht auf diesen Fall ausdehnen lassen.

Die Existenz der unstetigen Lösungen beim Integral der kleinsten Wirkung hatte ihren Grund in der Existenz der natürlichen, dem Problem inhärierenden Schranke $h - V(x, y) = 0$, bei deren Überschreitung das Integral aufhörte reell zu sein. Wie wir schon anfangs sahen, ist aber der Fall, daß die Schrankengleichung nur x und y enthält, ein ganz spezieller. Im allgemeinen wird sie von der Form $\varphi(x, y, y') \geqq 0$ sein. Diese Art von Schranken wurde bisher in einem Artikel von Zermelo in den Jahresberichten d. Deutschen Math.-Ver. Bd. 11 „Über kürzeste Linien von begrenzter Steilheit auf Flächen" behandelt, und in dem Artikel von Zermelo und Hahn in der Encykl. d. math. Wiss. (II A 8a) wird vermutet, daß bei Problemen mit Differentialungleichungen in der Regel unstetige Lösungen auftreten dürften. Ich will hier nur zum Schluß noch knrz auf eine Klasse von derartigen Problemen hinweisen, bei denen die auftretenden Differentialungleichungen inhärierende sind und man beweisen kann, daß sicher keine Kurve, die eine Extremale als Stück enthält, oder gar selbst eine Extremale ist, ein starkes Minimum liefern kann.

Es sei

$$J = \int f(x, y) \sqrt{\varphi(x, y, x', y')}\, dt,$$

wo φ eine Funktion ist, die positiver und negativer Werte fähig ist. Die dem Problem inhärierende Differentialungleichung lautet $\varphi(x, y, x', y') \geqq 0$. Wir haben hier nicht eine Grenzkurve, sondern eine einparametrige Schar von Grenzkurven, die Lösungskurven der Gleichung $\varphi(x, y, x', y') = 0$, von denen wir voraussetzen, daß sie selbst keine Extremalen sind, was ja nur bei ganz speziellen Problemen der Fall sein wird. Den Grenzkurven hier entsprechen bei Zermelo die Linien konstanter Steilheit auf der Fläche.

Wir setzen voraus, AB sei eine Extremale, die das Integral J zwischen A und B zu einem starken Minimum macht, und wollen diese Voraussetzung ad absurdum führen.

Zu diesem Zwecke ziehen wir durch A und B Lösungskurven von $\varphi(x, y, x', y') = 0$, die wir $\mathfrak{G}_A$ resp. $\mathfrak{G}_B$ nennen. Längs dieser ist J offenbar gleich Null.

In jeder noch so kleinen Umgebung der Extremalen AB (die wir kurz $\mathfrak{E}$ nennen) können wir dann eine Kurve AB' ziehen, so daß B' auf $\mathfrak{G}_B$ liegt und $\int_A^{B'} < \int_A^B$ (siehe Kneser, Lehrb. d. Variationsr. § 10), (außer wenn $\mathfrak{G}_B$ zu $\mathfrak{E}$ transversal liegt). Weil aber $\int_{B'}^{B}{}^{(\mathfrak{G}_B)} = 0$ ist, so ist auch $\int_A^{B'} + \int_{B'}^{B}{}^{(\mathfrak{G}_B)} < \int_A^B{}^{(\mathfrak{E})}$. Also liefert $\mathfrak{E}$ kein starkes Minimum, wenn nicht $\mathfrak{G}_B$ zu $\mathfrak{E}$

transversal liegt. Nach unserer Voraussetzung muß also $\mathfrak{G}_B$ und ebenso $\mathfrak{G}_A$ zu $\mathfrak{E}$ transversal liegen.

Dann schließen wir weiter: Da $\mathfrak{E}$ ein starkes Minimum liefert, läßt es sich mit einem Feld von Extremalen umgeben. Daher können wir in jeder noch so kleinen Umgebung von $\mathfrak{E}$ zwischen $\mathfrak{G}_A$ und $\mathfrak{G}_B$ eine zweite Extremale CD oder $\mathfrak{E}'$ ziehen. Nach einem Satze Knesers (siehe z. B. Bolza, Calculus of Variations § 33) ist der Wert des Integrals J im Felde längs zweier Extremalenstücke zwischen denselben Transversalen der gleiche.

Also ist:

$$\overset{(\mathfrak{E}')}{\int_C^D} = \overset{(\mathfrak{E})}{\int_A^B}, \quad \text{folglich} \quad \overset{(\mathfrak{G}_A)}{\int_A^C} + \overset{(\mathfrak{E}')}{\int_C^D} + \overset{(\mathfrak{G}_B)}{\int_D^B} = \overset{(\mathfrak{E})}{\int_C^D}.$$

Folglich kann $\mathfrak{E}$ auch in diesem Falle kein starkes Minimum liefern, folglich überhaupt nicht. Andere Kurven als Extremalen könnten aber nur dann ein Minimum liefern, wenn sie Stücke von Grenzkurven sind. Die einzige Möglichkeit, daß überhaupt ein Minimum existiert, wäre die, daß $\mathfrak{G}_A$ und $\mathfrak{G}_B$ einander in einem Punkte G schneiden. Dann liefert AGB ein Minimum, da längs dieser gebrochenen Kurve der Integrand Null, sonst aber überall, wo er überhaupt reell ist, positiv ist.

Z. B. liefert beim Integral $\int y^2 \sqrt{x'^2 - y'^2}\, dt$ die Kurve ein Minimum, die aus zwei durch A und B gehenden Geraden besteht, die sich unter rechtem Winkel schneiden und deren Richtungstangenten $+1$ resp. -1 sind.

Stetige Lösungen kann es nur geben, wenn A und B zufällig auf derselben Grenzkurve liegen.

Zur Theorie der Matrices.

Von

OSKAR PERRON in München.

In dieser Note werden zum Teil bekannte Sätze aus der Theorie der Matrices und ihrer charakteristischen Gleichung auf neue, höchst einfache Weise bewiesen, zum Teil neue Sätze entwickelt. Unter den Anwendungen der Theorie hebe ich ein der Gräffeschen Methode analoges Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hervor.

§ 1.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

das Koeffizientensystem einer linearen Substitution von n Variabeln, E das der identischen Substitution. Soweit im folgenden bloß solche Koeffizientensysteme oder kürzer *Matrices* vorkommen, die rationale Funktionen von A, also miteinander vertauschbar sind, dürfen alle rationalen Rechenoperationen genau wie bei Zahlen ausgeführt werden. Bezeichnet man die Elemente der Potenz A^ν mit $a_{ik}^{(\nu)}$, so daß also $a_{ik}^{(1)}$ mit a_{ik} gleichbedeutend ist, so ist wegen $A^{\nu+\mu} = A^\nu A^\mu$:

$$a_{ik}^{(\nu+\mu)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(\nu)} a_{sk}^{(\mu)}. \tag{1}$$

Konsequenterweise sollen auch die Elemente der Einheitssubstitution $E = A^0$ mit $a_{ik}^{(0)}$ bezeichnet werden; es ist also

$$a_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases}$$

und (1) gilt auch noch, wenn ν oder μ oder beide gleich Null sind.

Sind $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$ beliebige Matrices, so sind die Gleichungen

$$A = B \quad \text{oder} \quad A = BC$$

gleichbedeutend mit

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{bez.} \quad a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} b_{is} c_{sk}, \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Die im folgenden häufig ausgeführte Umsetzung der ersten in diese zweite Form mag kurz als *Übergang von den Matrices zu ihren Elementen* bezeichnet werden.

Die Elemente $a_{ik}^{(\nu)}$ sind ganze Funktionen von $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$. Für ihre partiellen Differentialquotienten findet man durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ die Formel:

$$\frac{\partial a_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_{rs}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{sk}^{(\nu-1-\lambda)}. \tag{2}$$

Die Determinante $|E\varrho - A|$ werde mit $f(\varrho)$ bezeichnet, so daß $f(\varrho) = 0$ die *charakteristische Gleichung* der Matrix A ist; ihre Minoren mit $g_{ik}(\varrho)$, und zwar

$$\frac{\partial |E\varrho - A|}{\partial(-a_{ik})} = g_{ki}(\varrho),$$

so daß

$$\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A} = \begin{pmatrix} g_{11}(\varrho) & g_{12}(\varrho) & \cdots & g_{1n}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1}(\varrho) & g_{n2}(\varrho) & \cdots & g_{nn}(\varrho) \end{pmatrix} \tag{3}$$

wird. Daher ist die Matrix $Ef(\varrho)$ als Funktion von ϱ teilbar durch $E\varrho - A$; da aber offenbar das gleiche von

$$Ef(\varrho) - f(A) = f(E\varrho) - f(A)$$

gilt, so muß auch $f(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein, und da $f(A)$ von ϱ gar nicht abhängt, so ist

$$f(A) = 0. \tag{4}$$

Bedeutet $\vartheta(\varrho)$ den größten gemeinsamen Faktor der Funktionen $g_{ik}(\varrho)$, so ist wegen (3) auch schon $E\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar durch $E\varrho - A$, und daher nach der gleichen Deduktion auch

$$\frac{f}{\vartheta}(A) = 0.$$

Soll umgekehrt φ die Funktion niedrigsten Grades sein, für welche $\varphi(A) = 0$ ist, so muß, weil $\varphi(E\varrho) - \varphi(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar ist, auch schon $E\varphi(\varrho)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein. Die Elemente von $\frac{E\varphi(\varrho)}{E\varrho - A}$ sind aber nach (3): $\frac{g_{ik}(\varrho)\,\varphi(\varrho)}{f(\varrho)}$, und dies sind dann und nur dann lauter ganze Funktionen, wenn $\varphi(\varrho)$ durch $\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar ist, also muß $\varphi = \frac{f}{\vartheta}$ sein. Diese Herleitung der bekannten Sätze erscheint mir einfacher als die bis jetzt gegebenen.

Zwischen den Funktionen $g_{ik}(\varrho)$ besteht die interessante Beziehung:

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho)\, g_{sk}(\sigma) = \frac{1}{\varrho - \sigma}\,(f(\varrho)\, g_{ik}(\sigma) - f(\sigma)\, g_{ik}(\varrho)).$$

Der Beweis folgt sehr einfach aus der Identität:

$$E = \frac{1}{\varrho - \sigma}\,[(E\varrho - A) - (E\sigma - A)];$$

multipliziert man diese nämlich beiderseits mit $\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A}$, so folgt:

$$\frac{E\,f(\varrho)}{E\varrho - A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A} = \frac{1}{\varrho - \sigma}\left[f(\varrho)\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A} - f(\sigma)\,\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A}\right],$$

und hieraus Formel (5) einfach durch Übergang von den Matrices zu ihren Elementen. Für $\sigma = \varrho$ ergibt sich aus (5):

$$(5a) \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho)\, g_{sk}(\varrho) = f'(\varrho)\, g_{ik}(\varrho) - f(\varrho)\, g'_{ik}(\varrho).\ ^{*})$$

Aus Formel (5) fließt ein neuer sehr einfacher Beweis des Satzes von der Realität der Wurzeln der Säkulargleichung und sogar des folgenden allgemeineren Satzes von Hermite:

*Wenn die Zahlenpaare a_{ik}, a_{ki} komplex-konjugiert sind, also insbesondere auch a_{ii} reell, so hat die Gleichung $f(\varrho) = 0$ lauter reelle Wurzeln.***)

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten von $f(\varrho)$ reell sind; denn die Determinante $|E\varrho - A|$ ändert sich nicht, wenn man die Zeilen zu Kolonnen macht und gleichzeitig $\sqrt{-1}$ durch $-\sqrt{-1}$ ersetzt. Wenn jetzt $f(\varrho)$ ein Paar komplex-konjugierter Wurzeln ϱ_0, ϱ_1 hat, so setze man in (5): $\varrho = \varrho_0$, $\sigma = \varrho_1$; dann folgt für $i = k$:

$$\sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho_0)\, g_{si}(\varrho_1) = 0.$$

Hier sind aber nach unserer Voraussetzung über die a_{ik} die Terme der linken Seite sämtlich Normen von komplexen Zahlen, also $\geqq 0$; sie müssen daher einzeln verschwinden. Insbesondere wird $g_{ii}(\varrho_0) = 0$. Jede komplexe Wurzel würde also auch die Hauptunterdeterminanten zum Verschwinden

---

*) Diese spezielle Formel entsteht auch, wenn man die bekannte Determinantenbeziehung

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_{ki})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{ss})} - \frac{\partial f}{\partial(-a_{si})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{ks})} = f\,\frac{\partial^2 f}{\partial(-a_{ki})\,\partial(-a_{ss})}$$

nach s summiert.

**) Hermite, Comptes Rendus 41, pag. 181, wo der Beweis mittels Sturmscher Ketten geführt wird.

bringen; indem man von diesen wieder zu den Hauptunterdeterminanten übergeht, usw., folgt schließlich, daß auch $\varrho_0 - a_{ii} = 0$ sein müßte, was nicht angeht, da a_{ii} reell ist.

Unter den gleichen Voraussetzungen über die a_{ik}, als speziell auch für die Säkulargleichung, ergibt sich ebensoleicht durch Zuziehung von (5a): *Für eine Doppelwurzel von* $f(\varrho) = 0$ *verschwinden auch sämtliche Unterdeterminanten* $g_{ik}(\varrho)$.

§ 2.

Für die Beurteilung des gleichzeitigen Verschwindens der Unterdeterminanten von $|E\varrho - A|$ ist von Wichtigkeit die Kenntnis der *Resultante von* $f(\varrho)$ *und* $g_{ik}(\varrho)$. Um diese zu bilden, setze man

$$f(\varrho) = \varrho^n + c_1\varrho^{n-1} + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_n$$

und führe weiter die Funktionen ein:

$$\begin{aligned} f_0(\varrho) &= 1, \\ f_1(\varrho) &= \varrho + c_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}(\varrho) &= \varrho^{n-1} + c_1\varrho^{n-2} + \cdots + c_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann ist identisch

$$\begin{aligned} A^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} &= A^\nu \frac{f(E\varrho) - f(A)}{E\varrho - A} \\ &= A^\nu (Ef_{n-1}(\varrho) + Af_{n-2}(\varrho) + \cdots + A^{n-1}f_0(\varrho)) \\ &= A^\nu f_{n-1}(\varrho) + A^{\nu+1}f_{n-2}(\varrho) + \cdots + A^{\nu+n-1}f_0(\varrho); \end{aligned} \tag{6}$$

andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} A^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} &= \frac{E\varrho^\nu f(\varrho)}{E\varrho - A} - (E\varrho^\nu - A^\nu)\frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} \\ &= \varrho^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} - f(\varrho)\frac{(E\varrho)^\nu - A^\nu}{E\varrho - A} \\ &= \varrho^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} - f(\varrho)(E\varrho^{\nu-1} + A\varrho^{\nu-2} + \cdots + A^{\nu-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Indem man die rechten Seiten von (6) und (7) einander gleichsetzt und von den Matrices zu ihren Elementen übergeht, erhält man:

$$\begin{aligned} &a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\varrho) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\varrho) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\varrho) \\ &= \varrho^\nu g_{ik}(\varrho) - f(\varrho)\left(a_{ik}^{(0)}\varrho^{\nu-1} + a_{ik}^{(1)}\varrho^{\nu-2} + \cdots + a_{ik}^{(\nu-1)}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

eine Formel, die sich auch durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ erweisen ließe; für $\nu = 0$ fällt rechts in (7) und also auch in (8) das zweite Glied weg.

Sind $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln von $f(\varrho)$, so folgt aus (8) insbesondere:

$$(8a) \quad a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\varrho_\lambda) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\varrho_\lambda) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\varrho_\lambda) = \varrho_\lambda' g_{ik}(\varrho_\lambda)$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Für $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$, $\lambda = 1, 2, \cdots, n$ entspringt aus (8a) ein System von n^2 Gleichungen, welche zusammen die Übereinstimmung der beiden Matrixprodukte aussagen:

$$(9) \quad \begin{pmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ a_{ik}^{(1)} & a_{ik}^{(2)} & \cdots & a_{ik}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1}(\varrho_1) & \cdots & f_{n-1}(\varrho_n) \\ f_{n-2}(\varrho_1) & \cdots & f_{n-2}(\varrho_n) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ f_0(\varrho_1) & \cdots & f_0(\varrho_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \varrho_1 & \cdots & \varrho_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \varrho_1^{n-1} & \cdots & \varrho_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{ik}(\varrho_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{ik}(\varrho_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & g_{ik}(\varrho_n) \end{pmatrix}.$$

Geht man hier zu den Determinanten über, so wird der zweite Faktor links, vom Zeichen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ abgesehen, gleich dem ersten Faktor rechts, und da dieser, wenn die a_{ik} beliebig sind, bekanntlich nicht verschwindet, so folgt schließlich:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{n} g_{ik}(\varrho_\lambda) = R(f, g_{ik}).$$

Hiermit ist bereits ein Ausdruck für die gesuchte Resultante gewonnen. Indes ist die Determinante links keine irreduzible Funktion der a_{rs}, vielmehr folgt leicht vermittels (1), daß sie das (zeilenweise gebildete) Produkt der beiden Determinanten ist:

$$(10) \quad P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1}^{(n-1)} & a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad Q_k = \begin{vmatrix} a_{1k}^{(0)} & a_{2k}^{(0)} & \cdots & a_{nk}^{(0)} \\ a_{1k}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1k}^{(n-1)} & a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Resultante $R(f, g_{ik})$ zerfällt also in zwei Faktoren, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt:

$$(11) \quad R(f, g_{ik}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P_i Q_k.$$

Multipliziert man (9) mit einer Unbestimmten u_{ik} und summiert über i, k, so liefert die gleiche Betrachtung auch die allgemeinere Formel:

$$(12)\quad R\left(f, \sum u_{ik} g_{ik}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \sum u_{ik} a_{ik}^{(0)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(1)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen $g_{ik}(\varrho)$ haben daher dann und nur dann alle eine gemeinsame Wurzel, wenn die Determinante (12) identisch in $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{nn}$ verschwindet. Wenn, etwas weniger allgemein, $u_i v_k$ an Stelle von u_{ik} tritt, so zerfällt die Determinante (12) wieder in zwei Faktoren, nämlich

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R\left(f, \sum u_i v_k g_{ik}\right)$$

$$(13)\quad = \begin{vmatrix} \sum u_i a_{i1}^{(0)} & \sum u_i a_{i2}^{(0)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_i a_{i1}^{(n-1)} & \sum u_i a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sum v_k a_{1k}^{(0)} & \sum v_k a_{2k}^{(0)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum v_k a_{1k}^{(n-1)} & \sum v_k a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man alle u gleich 0 bis auf eines, u_i, so folgt hieraus speziell, daß $R\left(f, \sum_k v_k g_{ik}\right)$ den Faktor P_i hat. Wenn also P_i verschwindet, so haben die Funktionen $f(\varrho)$ und $\sum_k v_k g_{ik}(\varrho)$ für beliebige v_k eine Nullstelle gemein, und daher haben

$$f(\varrho),\ g_{i1}(\varrho),\ g_{i2}(\varrho),\ \cdots,\ g_{in}(\varrho)$$

eine gemeinsame Wurzel. Wenn umgekehrt diese Funktionen eine gemeinsame Wurzel haben, so muß auch notwendig $P_i = 0$ sein. Denn addiert man in der Determinante P_i (Formel (10)) zu den Elementen der letzten Zeile die mit $f_{n-1}(\varrho)$ multiplizierten Elemente der ersten, die mit $f_{n-2}(\varrho)$ multiplizierten Elemente der zweiten usw., so nimmt P_i wegen (8) (für $\nu = 0$) die Gestalt an:

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}^{(n-2)} & a_{i2}^{(n-2)} & \cdots & a_{in}^{(n-2)} \\ g_{i1}(\varrho) & g_{i2}(\varrho) & \cdots & g_{in}(\varrho) \end{vmatrix} = \sum_k \Phi_{ik} g_{ik}(\varrho),$$

woraus die Behauptung folgt.

Analoges gilt bezüglich der Funktionen Q_k. Damit also alle $g_{ik}(\varrho)$ eine gemeinsame Wurzel haben, ist notwendig, daß alle P_i und alle Q_k verschwinden. Es wäre aber ein Irrtum, aus dem Obigen schließen zu wollen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Das gleichzeitige Verschwinden von P_1 und P_2 bewirkt nämlich nur, daß $f(\varrho)$ sowohl mit

$$g_{11}(\varrho),\ g_{12}(\varrho),\ \cdots,\ g_{1n}(\varrho),$$

als auch mit

$$g_{21}(\varrho),\ g_{22}(\varrho),\ \cdots,\ g_{2n}(\varrho)$$

je eine Wurzel gemein hat; doch ist dies im allgemeinen, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugt, *nicht die gleiche Wurzel.* Damit letzteres der Fall ist, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

§ 3.

Daß die Resultante $R(f, g_{ik})$ in zwei Faktoren zerfällt, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt, läßt sich nach bekannten Determinantensätzen a priori erwarten. Denn es ist ja

$$\begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho) & g_{is}(\varrho) \\ g_{rk}(\varrho) & g_{rs}(\varrho) \end{vmatrix} = f(\varrho)\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial(-a_{ki})\,\partial(-a_{sr})}.$$

Wenn also $f(\varrho)$ und $g_{ik}(\varrho)$ verschwindet, so muß zugleich auch $g_{is}(\varrho)g_{rk}(\varrho)$ verschwinden für beliebige r, s, also entweder $g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{in}$, oder $g_{1k}, g_{2k}, \cdots, g_{nk}$. Die Resultante $R(f, g_{ik})$ wird also einen Faktor haben, der nur von i, und einen, der nur von k abhängt.

Es fragt sich nun weiter, ob etwa die P_i, Q_k irreduzible Funktionen der a_{rs} sind, oder ob sie wieder zerfallen. Mit der Entscheidung dieser Frage verbinden wir eine genauere Diskussion der betreffenden Funktionen.

Differenziert man in der Determinante P_i (Formel (10)) die Elemente einer beliebigen, etwa der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile nach a_{ri}, so werden nach (2) die Elemente dieser Zeile

$$\frac{\partial a_{i1}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i1}^{(\nu-1-\lambda)},\quad \frac{\partial a_{i2}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i2}^{(\nu-1-\lambda)},\quad \cdots,\quad \frac{\partial a_{in}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{in}^{(\nu-1-\lambda)};$$

sie setzen sich also linear aus den Elementen der vorhergehenden Zeilen zusammen.*) Daher verschwindet die Determinante und es folgt:

$$\frac{\partial P_i}{\partial a_{ri}} = 0.$$

Somit hängt P_i von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ gar nicht ab, und man kann unbeschadet der Allgemeinheit bei Bildung von P_i statt die Matrix A die

*) Für $\nu = 0$ sind diese Formeln nicht anwendbar; aber in diesem Fall sind die fraglichen Elemente offenbar alle gleich Null.

speziellere wählen, bei der die Elemente der i^{ten} Kolonne sämtlich verschwinden.

Die Irreduzibilität von P_i beweisen wir nun durch vollständige Induktion. Für $n = 2$ ist

$$P_1 = a_{12}, \quad P_2 = -a_{21},$$

also irreduzibel; wir setzen daher für ein bestimmtes n voraus, daß $P_1, P_2, \cdots, P_n$ irreduzibel sind, und bilden dann die $(n+1)$-reihige Matrix:

$$A' = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & \cdots & a_{i-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Die ν^{te} Potenz hiervon wird, wie leicht zu sehen,

$$A'^{\nu} = \begin{Vmatrix} a_{11}^{(\nu)} & \cdots & a_{1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{1i}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{i-1,i}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,n}^{(\nu)} \\ \sum_s u_s a_{s1}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum_s u_s a_{s,i-1}^{(\nu-1)} & 0 & \sum_s u_s a_{si}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum_s u_s a_{sn}^{(\nu-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(\nu)} & \cdots & a_{n,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{ni}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}^{(\nu)} \end{Vmatrix}.$$

Bezeichnet man daher mit P_i' diejenige Determinante, welche in bezug auf die Matrix A' die gleiche Bedeutung hat wie P_i in bezug auf die Matrix A (Formel (10)), so wird, wenn δ_{ik} die 0 oder 1 bedeutet, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$ ist,

$$P_i' = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \cdots & \delta_{i,i-1} & \delta_{ii} & \delta_{i,i+1} & \cdots & \delta_{i,n+1} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \sum u_s a_{s1} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1} & 0 & \sum u_s a_{si} & \cdots & \sum u_s a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1}^{(n-1)} & 0 & \sum u_s a_{si}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \sum u_s a_{s1}^{(0)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(0)} \\ \sum u_s a_{s1}^{(1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} (u_1{}^n P_1 + \cdots + u_2{}^n P_2 + \cdots).$$

Da $P_1, P_2, \cdots, P_n$ nach Voraussetzung irreduzibel sind, so kann hiernach P_i' offenbar nur in der Weise zerfallen, daß ein Faktor $\varphi(u_1, \cdots, u_n)$ sich abspaltet, der von den a_{rs} ganz frei ist. Dies ist aber nicht möglich; denn es müßte alsdann die Determinante P_i' für gewisse *numerische* Werte von $u_1, \cdots, u_n$ verschwinden, und da sie nach (13) ein Faktor von $R\left(f, \sum u_i v_i g_{ik}\right)$ ist, so müßten für diese Werte $f(\varrho)$ und $\sum u_i v_k g_{ik}(\varrho)$ eine Wurzel gemein haben. Dies ist aber nicht möglich, weil $f(\varrho)$ von höherem Grad als $\sum u_i v_k g_{ik}(\varrho)$ und bekanntlich irreduzibel ist.

Die obige Darstellung von P_i' zeigt zugleich, daß dies eine homogene Funktion n^{ten} Grades von $u_1, \cdots, u_n$ ist, und dies kann sich nach dem zuvor Bewiesenen auch nicht ändern, wenn in der Matrix A' an Stelle der Nullen in der i^{ten} Kolonne beliebige Elemente treten. Ebenso wird, indem man wieder n an Stelle von $n+1$ setzt, P_i homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ sein. Diese Resultate fassen wir zusammen in folgendem

Satz: *Die Funktionen $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{rs} (und beliebiger numerischer Werte); P_i hängt von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ nicht ab und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ (a_{ii} ausgeschlossen).*

Analog ergibt sich auch:

Die Funktionen $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{rs} (und beliebiger numerischer Werte); Q_k hängt von $a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn}$ nicht ab, und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$ (a_{kk} ausgeschlossen).

Wenn die a_{rs} nicht unabhängig voneinander sind, so können natürlich die P_i, Q_k sehr wohl zerfallen. Doch mag bemerkt werden, daß sie noch irreduzibel bleiben, wenn die Matrix A eine symmetrische, d. h. $a_{rs} = a_{sr}$ ist, sonst aber die a_{rs} keiner Bedingung unterliegen. Außerdem ist dann $P_i = Q_i$, und ebenfalls wieder P_i homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ (a_{ii} ausgeschlossen); von a_{ii} hängt P_i wieder nicht ab.

§ 4.

Für die Berechnung der $a_{ik}^{(\nu)}$ ist in (1) eine Rekursionsformel angegeben; *sie lassen sich aber mit Hilfe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch in independenter Form darstellen.* Seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_m$ die verschiedenen Wurzeln von $f(\varrho)$, und zwar ϱ_λ eine $r_\lambda$fache, so daß

$$f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)^{r_1} \psi_1(\varrho) = \cdots = (\varrho - \varrho_m)^{r_m} \psi_m(\varrho) \tag{14}$$

gesetzt werden kann, wo nun $\psi_\lambda(\varrho_\lambda) \neq 0$ ist. Dann liefert die Theorie der Partialbrüche die Identität:

$$\frac{x^\nu}{f(x)} = E(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\zeta^{r_\lambda - 1} \left[\frac{\zeta^{r_\lambda} (\varrho_\lambda + \zeta)^\nu}{f(\varrho_\lambda + \zeta)(x - \varrho_\lambda - \zeta)} \right]_{\zeta = 0} \text{*)},$$

wo $E(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, und durch das Zeichen D_ζ^r die r^{te} Ableitung nach ζ angedeutet wird. Statt dessen kann man auch schreiben, wenn man $\varrho_\lambda + \zeta = \varrho$ setzt und mit $f(x)$ multipliziert:

$$x^\nu = E(x) f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(x)}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda}.$$

Nun ist offenbar

$$D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(\varrho)}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda} = D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu (\varrho - \varrho_\lambda)^{r_\lambda}}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda} = 0,$$

so daß an Stelle der letzten Gleichung auch die folgende treten kann:

$$x^\nu = E(x) f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(\varrho) - f(x)}{\varrho - x} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda}.$$

Da dies eine Identität in x ist, so entsteht auch eine richtige Gleichung, wenn an Stelle von x die Matrix A tritt; wegen $f(A) = 0$ folgt dann

$$A^\nu = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{E f(\varrho)}{E\varrho - A} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda},$$

oder, indem man von den Matrices zu ihren Elementen übergeht:

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu g_{ik}(\varrho)}{\psi_\lambda(\varrho)} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda}. \tag{15}$$

Dies ist die gesuchte Formel. Von jetzt ab soll der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle verschieden sind (prinzipielle Schwierigkeiten würde die Behandlung des allgemeinen Falles nicht bieten). Formel (15) geht dann über in

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varrho_\lambda^\nu g_{ik}(\varrho_\lambda)}{f'(\varrho_\lambda)}. \tag{15a}$$

Ist ϱ_1 absolut größer als die andern Wurzeln, so folgt hieraus

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{\varrho_1^\nu} = \frac{g_{ik}(\varrho_1)}{f'(\varrho_1)},$$

*) Man sehe etwa: Serret, Handbuch der höhern Algebra, 2. Aufl. Art. 222.

und daraus wieder, sofern nur $g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist*):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1;$$

allgemeiner auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu+1)}}{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1,$$

wo die u_{ik} irgend welche Werte sind, für welche $\sum u_{ik} g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist.

Diese Formeln können zur näherungsweisen Berechnung der Wurzel ϱ_1 benutzt werden. Man bilde zu diesem Zweck sukzessive die Matrices

$$A^2,\ A^4,\ A^8,\ \cdots,\ A^{2^\nu}.$$

Die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichungen sind bez. die 2, 4, 8, ...ten Potenzen der Wurzeln von $f(\varrho)$, und das Verfahren ist also ganz analog der *Näherungsmethode von Gräffe*, die sogar als Spezialfall daraus hervorgeht, wenn

$$u_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

gesetzt wird (es ist nämlich $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln der charakteristischen Gleichung). Das bei der Gräffeschen Methode notwendige Ausziehen der $2^{\nu\text{ten}}$ Wurzel, wodurch eine Vieldeutigkeit entsteht, kann aber hier vermieden werden, indem man die Matrix A^{2^ν} noch mit A multipliziert; man erhält dann in $\frac{a_{ik}^{(2^\nu+1)}}{a_{ik}^{(2^\nu)}}$ einen Näherungswert von ϱ_1.

Aus (15a) folgt weiter:

$$\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\varrho_\lambda^\nu \varrho_\mu^\nu}{f'(\varrho_\lambda) f'(\varrho_\mu)} \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_\lambda) & g_{is}(\varrho_\lambda) \\ g_{rk}(\varrho_\mu) & g_{rs}(\varrho_\mu) \end{vmatrix};$$

dabei ist über λ und μ von 1 bis n zu summieren; es verschwinden aber offenbar diejenigen Summanden, für welche $\lambda = \mu$ ist. Wenn daher $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ und ϱ_2 seinerseits wieder absolut größer ist als die übrigen Wurzeln, so ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix}}{\varrho_1^\nu \varrho_2^\nu} = \frac{\begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_1) & g_{is}(\varrho_1) \\ g_{rk}(\varrho_2) & g_{rs}(\varrho_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_2) & g_{is}(\varrho_2) \\ g_{rk}(\varrho_1) & g_{rs}(\varrho_1) \end{vmatrix}}{f'(\varrho_1) f'(\varrho_2)},$$

*) Man beachte, daß $g_{ik}(\varrho_1) = 0$ gewiß nicht für alle Werte i, k sein kann, weil ϱ_1 als einfache Wurzel von $f(\varrho)$ vorausgesetzt ist.

und hieraus erhält man analog wie oben Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2$. Wenn weiter $|\varrho_1| > |\varrho_2| > |\varrho_3|$ und ϱ_3 wieder absolut größer ist als die noch fehlenden Wurzeln, so liefern die dreireihigen Determinanten der Matrix A^ν ebenso Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ usw., so daß man durch Division auch sukzessive $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots$ erhält, genau wie bei der Gräffeschen Methode.

§ 5.

Wenn die charakteristische Gleichung eine Wurzel ϱ_1 hat, welche alle andern an absolutem Betrag übertrifft, so ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1, \quad \text{sofern} \quad g_{ik}(\varrho_1) \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Umgekehrt kann unter Umständen, wenn die Existenz dieses Grenzwertes von vornherein bekannt ist, daraus ein Rückschluß auf die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gezogen werden.

Seien alle a_{ik} reell und > 0; dasselbe gilt dann auch von den Zahlen $a_{ik}^{(\nu)}$. Bezeichnet man daher die kleinste, bez. größte der n Zahlen

$$\frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}}, \frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \cdots, \frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

mit $\beta^{(\nu)}$ bez. $\mathsf{B}^{(\nu)}$, so daß $0 < \beta^{(\nu)} \leqq \mathsf{B}^{(\nu)}$ ist, so folgt*)

$$(16) \quad \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(\nu)} \frac{a_{is}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} \begin{cases} \geqq \beta^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right) \\ \leqq \mathsf{B}^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{a_{rs}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \lambda_s^{(\nu)}$$

gesetzt ist.*) Da aber offenbar $\lambda_s^{(\nu)} > 0$ und $\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} = 1$ ist, so folgt aus (16) auch: $\beta^{(\nu+1)} \geqq \beta^{(\nu)}$ und $\mathsf{B}^{(\nu+1)} \leqq \mathsf{B}^{(\nu)}$, also:

$$0 < \beta^{(\nu)} \leqq \beta^{(\nu+1)} \leqq \mathsf{B}^{(\nu+1)} \leqq \mathsf{B}^{(\nu)}.$$

Nach einem bekannten Satz existieren daher die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \beta^{(\nu)} = \beta, \qquad \lim_{\nu=\infty} \mathsf{B}^{(\nu)} = \mathsf{B},$$

und es ist

$$\beta^{(\nu)} \leqq \beta \leqq \mathsf{B} \leqq \mathsf{B}^{(\nu)}.$$

Wenn somit ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, so wird für

*) Es sind bei β, B, λ allemal nur die Indizes angemerkt, auf welche es im Lauf der gegenwärtigen Untersuchung allein ankommt.

hinreichend große ν gewiß $\frac{a_{is}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} > \beta - \varepsilon$, und folglich nach (16), wenn ϱ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet:

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} > \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}}$$

$$= \left(1 - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}}$$

oder auch

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} - \beta > \lambda_\varrho^{(\nu)} \left(\frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} - \beta\right) - \varepsilon. \tag{17}$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} = \frac{a_{sk}\, a_{rs}^{(\nu)}}{a_{\varrho k}\, a_{r\varrho}^{(\nu)}} = \frac{a_{sk}}{a_{\varrho k}} \frac{\sum_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau s}}{\sum_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\varrho}}.$$

Da alle a_{ik} größer als Null vorausgesetzt sind, so sind die n^4 Quotienten $\frac{a_{ik}}{a_{rs}}$ $(i, k, r, s = 1, 2, \cdots, n)$ endliche positive Zahlen und daher sämtlich kleiner als eine Zahl N; daher folgt

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} < N \frac{\sum_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} N a_{\tau\varrho}}{\sum_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\varrho}} = N^2,$$

und somit

$$1 = \lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} < n N^2 \lambda_\varrho^{(\nu)}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_\varrho^{(\nu)} > \frac{1}{n N^2}.$$

Daher bleibt $\lambda_\varrho^{(\nu)}$ stets über einer von ν unabhängigen Grenze c, und aus (17) ergibt sich

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} - \beta > c\left(\frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} - \beta\right) - \varepsilon.$$

Da hierbei k und ϱ beliebig sind, so können sie speziell so gewählt werden, daß

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \beta^{(\nu+1)} \leqq \beta; \qquad \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} = \mathsf{B}^{(\nu)} \geqq \mathsf{B}$$

wird, worauf aus der vorigen Ungleichung die weitere hervorgeht:

$$0 > c(\mathsf{B} - \beta) - \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein angenommen werden kann und c eine feste positive Zahl ist, so folgt hieraus $\beta = \mathsf{B}$. *Das besagt aber, daß die Grenzwerte*

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}},\ \lim_{\nu=\infty}\frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}},\ \cdots,\ \lim_{\nu=\infty}\frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

existieren und einander gleich sind. Ebenso wird bewiesen, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{1k}^{(\nu)}}{a_{1s}^{(\nu)}},\ \lim_{\nu=\infty}\frac{a_{2k}^{(\nu)}}{a_{2s}^{(\nu)}},\ \cdots,\ \lim_{\nu=\infty}\frac{a_{nk}^{(\nu)}}{a_{ns}^{(\nu)}}$$

existieren und einander gleich sind. Setzt man daher

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{rk}^{(\nu)}}=\frac{x_i}{x_r},\qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{is}^{(\nu)}}=\frac{y_k}{y_s},$$

so folgt weiter:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}}=\lim_{\nu=\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{is}a_{sk}^{(\nu)}}{a_{ik}^{(\nu)}}=\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{is}x_s}{x_i}$$

und auch:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}}=\lim_{\nu=\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{is}^{(\nu)}a_{sk}}{a_{ik}^{(\nu)}}=\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{sk}y_s}{y_k}.$$

Somit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}}=\varrho' \tag{18}$$

und ist sowohl von k als von i unabhängig; ferner ist ϱ' positiv, und wegen

$$\varrho' x_i=\sum_{s=1}^{n}a_{is}x_s=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$$

ist ϱ' eine Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Da alle $a_{ik}^{(\nu)}$ positiv sind, so folgt aus (18) leicht auch

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\sum_i a_{ii}^{(\nu+1)}}{\sum_i a_{ii}^{(\nu)}}=\varrho'.$$

Nun ist aber $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ nichts anderes als die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln von $f(\varrho)$, und daher ist aus der Existenz des obigen Grenzwertes zu schließen, daß ϱ' jede andere Wurzel der charakteristischen Gleichung an absolutem Betrag übertrifft. Der Beweis ist wörtlich so zu führen wie in meiner Habilitationsschrift (Math. Ann. 64 pag. 50, Zeile 4 v. u. bis pag. 51, Zeile 5). In der gleichen Arbeit (pag. 47, Hilfssatz) ist außerdem gezeigt, daß ϱ' eine *einfache* Wurzel ist, und daher ergibt sich folgender

Satz: *Wenn alle a_{ik} reell und >0 sind, so hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.*

Obwohl dies ein rein algebraischer Satz ist, so ist mir doch sein Beweis mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Algebra nicht gelungen. Der Satz bleibt übrigens auch zu Recht bestehen, wenn die a_{ik} nur zum Teil positiv, die übrigen aber gleich Null sind, *sofern nur eine gewisse Potenz der Matrix A existiert, bei der kein Element mehr verschwindet.* Wenn nämlich für ein bestimmtes ν alle $a_{ik}^{(\nu)}$ größer als Null sind, so gilt dann das gleiche auch für jeden größeren Wert von ν. Sind also $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so ist ϱ_1^ν positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_λ^ν; ebenso ist $\varrho_1^{\nu+1}$ positiv, und daher auch ϱ_1 positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_λ.

Es gilt daher der obige Satz und die Wurzel ϱ_1 kann somit nach der Methode von Gräffe oder auch nach der in § 4 auseinandergesetzten Methode berechnet werden.

Wir betrachten beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & a_1 \\ 1 & 0 \cdots 0 & a_2 \\ 0 & 1 \cdots 0 & a_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots 1 & a_n \end{pmatrix},$$

deren charakteristische Gleichung lautet

$$f(\varrho) = \varrho^n - a_n \varrho^{n-1} - a_{n-1} \varrho^{n-2} - \cdots - a_2 \varrho - a_1 = 0.$$

Aus der Formel $A^{\nu+1} = A^\nu A$ geht jetzt hervor:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha) \qquad a_{ik}^{(\nu+1)} = a_{i,\,k+1}^{(\nu)} \qquad (k = 1,\ 2 \cdots n-1) \\ &(\beta) \qquad a_{in}^{(\nu+1)} = a_{i1}^{(\nu)} a_1 + a_{i2}^{(\nu)} a_2 + \cdots + a_{in}^{(\nu)} a_n \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2, \cdots n).$$

Nun sei $a_1 > 0$, $a_n > 0$, die übrigen a_i nur $\geqq 0$; dann folgt aus (α)

$$a_{in}^{(1)} = a_{i1}^{(n)}, \qquad a_{in}^{(2)} = a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n-1)} = a_{i,\,n-1}^{(n)}.$$

Wenn daher

$$a_{in}^{(1)}, \qquad a_{in}^{(2)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

alle verschwinden würden, so würde das gleiche von

$$a_{i1}^{(n)}, \qquad a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

gelten; dies sind aber die Elemente der i^{ten} Zeile der Matrix A^n; also müßte die Determinante verschwinden, was nicht der Fall ist. Daher gibt es einen Index ν, für welchen $a_{in}^{(\nu)} > 0$ ist; nach (β) ist dann auch $a_{in}^{(\nu+1)} > 0$, folglich $a_{in}^{(\nu+2)} > 0$ etc. Nach (α) ist aber weiter $a_{in}^{(\nu)} = a_{ik}^{(\nu+k-n)}$, also von einem gewissen ν ab auch $a_{ik}^{(\nu)} > 0$. Somit gibt es eine Potenz von A, bei der kein Element mehr verschwindet, und wir erhalten den

Satz: *Wenn die Koeffizienten der Gleichung*

$$\varrho^n - a_n\varrho^{n-1} - \cdots - a_2\varrho - a_1 = 0$$

den Ungleichungen genügen

$$a_1 > 0, \quad a_n > 0,$$
$$a_i \geqq 0 \quad \text{für } i = 2, 3, \cdots, n-1,$$

so existiert eine positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.

Dieser spezielle Satz ist auch ganz leicht rein algebraisch einzusehen; er ist überdies auch ein Spezialfall von Satz IX meiner Habilitationsschrift (loc. cit. pag. 51). Man bemerke übrigens, daß der Satz nicht mehr allgemein richtig wäre, wenn man auch für a_n den Wert 0 zulassen wollte; denn beispielsweise hat die Gleichung

$$\varrho^n - a_1 = 0$$

lauter Wurzeln von *gleichem* absolutem Betrag. In der Tat ist auch leicht zu sehen, daß im Fall $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ eine Potenz A^r, bei der kein Element mehr verschwindet, nicht existiert.

München, 25. Juli 1906.

Über die Gruppen linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. Br.

Im 53ten Bande der Mathematischen Annalen*) habe ich den Begriff der Gruppe von endlich vielen linearen homogenen Substitutionen zu dem der Gruppe linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe erweitert. Ein System $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in n Variablen von nicht verschwindenden Determinanten soll eine *Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe* heißen, wenn das Produkt je zweier Substitutionen von $\mathfrak{G}$ wieder in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, $\mathfrak{G}$ neben jeder Substitution die reziproke enthält und die Gesamtheit charakteristischer Funktionen, die zu den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ gehören, nur für eine endliche Anzahl untereinander verschiedener Werte verschwindet. Ist also

$$A: \qquad z_i' = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} z_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

irgend eine in $\mathfrak{G}$ enthaltene Substitution, so soll nach der gegebenen Definition die Gesamtheit von charakteristischen Gleichungen:

$$|-a_{jk} + \varrho \delta_{jk}| = 0 \quad \left(j, k = 1, 2, \cdots, n;\ \delta_{jj} = 1,\ \delta_{jk} = 0\ (j \gtrless k)\right),$$

die man erhält, wenn man für A jede in $\mathfrak{G}$ enthaltene Substitution setzt, nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln ϱ besitzen. In dem früheren Aufsatz, dessen Kenntnis im folgenden nicht vorausgesetzt wird, war angenommen worden, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Typus einer endlichen Gruppe wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter voneinander verschiedene Wurzeln hat. Im vorliegenden Aufsatz soll die Theorie der Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe mit Hilfe eines neuen Satzes von W. Burnside völlig erledigt werden.

*) Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen, Math. Ann. Bd. 53, S. 225—242.

§ 1.

Das Burnsidesche Theorem, das wir im folgenden verwenden, lautet in unserer Terminologie: *Jede irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe ist eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen.*

Um die Lektüre des Burnsideschen Aufsatzes „On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions“*) nicht vorauszusetzen, erlaube ich mir, den Burnsideschen Beweis zu wiederholen. Nach einem Burnsideschen Fundamentalsatz**) läßt sich in jeder irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen ein System von n^2 Substitutionen A_i $(i = 1, 2, \cdots, n^2)$ mit Koeffizienten $a_{jk}^{(i)}$ derartig auswählen, daß die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \\ a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ a_{11}^{(n^2)} & a_{12}^{(n^2)} & \cdots & a_{nn}^{(n^2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

wird. Ist G mit Koeffizienten g_{jk} $(j, k = 1, 2, \cdots, n)$ irgend eine Substitution der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$, so gehören auch die Produkte GA_1, GA_2, $\cdots$, GA_{n^2} der Gruppe $\mathfrak{G}$ an. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, so kann die Summe der Diagonalglieder jeder Substitution von $\mathfrak{G}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen; denn sie ist gleich der Summe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung der betreffenden Substitution. Mithin werden die Summen der Diagonalglieder der Substitutionen GA_1, GA_2, GA_3, $\cdots$, GA_{n^2}:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} g_{1i} a_{i1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{i=n} g_{2i} a_{i2}^{(1)} + \cdots + \sum_{i=1}^{i=n} g_{ni} a_{in}^{(1)} = \mathsf{X}^{(1)}, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} g_{1i} a_{i1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{i=n} g_{2i} a_{i2}^{(2)} + \cdots + \sum_{i=1}^{i=n} g_{ni} a_{in}^{(2)} = \mathsf{X}^{(2)}, \\ &\vdots \\ &\sum_{i=1}^{i=n} g_{1i} a_{i1}^{(n^2)} + \sum_{i=1}^{i=n} g_{2i} a_{i2}^{(n^2)} + \cdots + \sum_{i=1}^{i=n} g_{ni} a_{in}^{(n^2)} = \mathsf{X}^{(n^2)}; \end{aligned}$$

*) W. Burnside, Proceedings of the London Math. Society, ser. 2, vol. 3, p. 435—440 (1905).

**) W. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, Proceedings of the London Math. Society, ser. 2, vol. 3, p. 430—434 (1905). G. Frobenius und J. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte der K. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1906, S. 209.

hierbei können die Größen $X^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n^2)$ nach dem Obigen nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen. Mithin kommen, da die Determinante $\left| a_{jk}^{(i)} \right| \neq 0$ ist, für die n^2 Koeffizienten g_{ik}, d. h. für die Koeffizienten sämtlicher Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Frage. Folglich enthält $\mathfrak{G}$ nur endlich viele Substitutionen und ist eine endliche Gruppe.

Läßt sich eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen auf irgend eine Weise durch eine Substitution P von nicht verschwindender Determinante in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = P\mathfrak{G}P^{-1}$ überführen, bei der die Matrix jeder Substitution die Form:

$$\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\}: \quad \begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

hat und $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ Matrizes bedeuten, die irreduzible Gruppen erzeugen, so heißt $\mathfrak{G}$ eine *vollständig reduzible* Gruppe.

Ist $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\}$ eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, d. h. haben die charakteristischen Gleichungen aller Substitutionen von $\mathfrak{A}$ nur eine endliche Anzahl untereinander verschiedener Wurzeln, so trifft für die irreduziblen Teilgruppen $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ offenbar das gleiche zu. Nach dem angegebenen Burnsideschen Satze ist folglich jede von ihnen eine endliche Gruppe, mithin ist eine Gruppe $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\}$ vom Typus einer endlichen Gruppe eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen. Ist $\mathfrak{G}$ irgend eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, so sind alle mit $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gruppen $P\mathfrak{G}P^{-1}$ ebenfalls Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe; denn ähnliche Substitutionen haben die gleichen charakteristischen Funktionen. Hieraus folgt: Jede Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die vollständig reduzibel ist, ist eine endliche Gruppe. Nach einem zuerst von Herrn Maschke*) bewiesenen Satze ist umgekehrt jede endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen vollständig reduzibel.

*) H. Maschke, Beweis des Satzes, daß diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Koeffizienten auftreten, intransitiv sind. Math. Ann. Bd. 52, S. 363. Vgl. auch G. Frobenius, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie, Jahrg. 1899, S. 483. J. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsb. d. Preuß. Akademie, 1905, S. 414. A. Loewy, Transactions of the American Math. Society, vol. 6, pag. 509.

Wir haben daher das Theorem: *Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe ist stets und nur dann eine endliche Gruppe, wenn sie eine vollständig reduzible Gruppe ist.*

§ 2.

Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen läßt sich, wie ich in den Transactions of the American Mathematical Society, vol. 6, p. 504—533*) gezeigt habe, durch eine Substitution A von nicht verschwindender Determinante in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{G}^* = A\mathfrak{G}A^{-1}$ überführen, bei der die Matrix jeder Substitution die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{G}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{G}^*_{21} & \mathfrak{G}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{G}^*_{31} & \mathfrak{G}^*_{32} & \mathfrak{G}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \mathfrak{G}^*_{\mu 1} & \mathfrak{G}^*_{\mu 2} & \mathfrak{G}^*_{\mu 3} & \mathfrak{G}^*_{\mu 4} & \cdots & \mathfrak{G}^*_{\mu\mu} \end{matrix}$$

hat und $\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}$ aufeinander folgende größte vollständig reduzible Gruppen bedeuten. Betrachtet man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden, so sind, wie ich bewiesen habe, die Gruppen

$$\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}$$

ihrer Reihenfolge nach als erste, zweite, usw. bis μ^{te} vollständig reduzible, zu $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppen eindeutig bestimmt und von der Wahl von $\mathfrak{G}^*$ unabhängig. Jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ kann man daher eine vollständig reduzible Gruppe $\{\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}\}$:

$$\begin{matrix} \mathfrak{G}^*_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{G}^*_{\mu\mu} \end{matrix}$$

zuordnen. Sieht man ähnliche Gruppen als nicht verschieden an, so ist die Gruppe $\{\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}\}$ eindeutig bestimmt. Sie ist ferner zur Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorph. Jedem Element R von $\mathfrak{G}$ entspricht ein Element V_R der Gruppe $\{\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}\}$, und jedem Element der Gruppe $\{\mathfrak{G}^*_{11}, \mathfrak{G}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}\}$, von der natürlich nur die voneinander

*) Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören. Vgl. auch den daran anknüpfenden Brief von Herrn L. Stickelberger, Transactions of the American Math. Society, vol. 7, pag. 509.

verschiedenen Substitutionen beibehalten werden sollen, entsprechen ein oder mehrere Elemente von $\mathfrak{G}$. Für je zwei Substitutionen R und S aus $\mathfrak{G}$ wird das Produkt $V_R V_S = V_{RS}$, wenn V_R, V_S, V_{RS} die zu R, S und RS zugeordneten Substitutionen der Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ bedeuten.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, so ist die ähnliche Gruppe $\mathfrak{G}^*$ eine ebenso beschaffene Gruppe. Folglich haben die charakteristischen Funktionen aller Substitutionen von $\mathfrak{G}^*$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln; daher trifft dies auch für die vollständig reduziblen Gruppen $\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*$ zu. Mithin sind diese nach dem am Schluß des § 1 bewiesenen Satze endliche Gruppen. Folglich ist auch die Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen. Ist umgekehrt die Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen, so ist $\mathfrak{G}$ offenbar eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe. Wir haben daher den Satz:

Die μ aufeinander folgenden größten vollständig reduziblen Gruppen $\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*$, die zu irgend einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen gehören, bestimmen eine der Gruppe homomorphe, vollständig reduzible Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$; diese zu $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppe ist, wenn ähnliche Gruppen als nicht verschieden angesehen werden, eindeutig bestimmt. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen ist stets und nur dann eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, wenn die homomorphe Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ und folglich sämtliche Gruppen $\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*$ endliche Gruppen sind. Ist $\mu > 1$, so ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von unendlich vielen Substitutionen, für $\mu = 1$ ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen.

§ 3.

Die zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ sei mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, und $\mathfrak{E}$ bedeute den Komplex sämtlicher Substitutionen von $\mathfrak{G}$, die dem Einheitselement E von $\mathfrak{Z}$ entsprechen. Alle Substitutionen $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ sind dann Substitutionen der folgenden Form:

(a)
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{array}$$

ähnlich; denn nur den Substitutionen der Form (a) von $\mathfrak{G}^*$ entspricht die identische Substitution von $\mathfrak{Z}$. Die Substitutionen (a) von $\mathfrak{G}^*$ bilden offenbar eine Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$; mithin bestimmt auch der Komplex $\mathfrak{E}$, dessen Elemente den Substitutionen (a) ähnlich sind, eine Untergruppe der zu $\mathfrak{G}^*$ ähnlichen Gruppe $\mathfrak{G}$.

Die zu $\mathfrak{G}$ homomorphe endliche Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ sei von der Ordnung h und enthalte die h voneinander verschiedenen Substitutionen $Z_0 = E, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{h-1}$. Dann lassen sich aus $\mathfrak{G}^*$ $h-1$ Substitutionen G_i^* $(i = 1, 2, \cdots, h-1)$ auswählen, die den Substitutionen Z_i $(i = 1, 2, \cdots, h-1)$ von $\mathfrak{Z}$ entsprechen. G_i $(i = 1, 2, \cdots, h-1)$ seien die den Substitutionen G_i^* aus $\mathfrak{G}^*$ entsprechenden Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Ich behaupte: Die Komplexe $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}G_1$, $\mathfrak{E}G_2$, $\cdots$, $\mathfrak{E}G_{h-1}$ erschöpfen sämtliche Substitutionen von $\mathfrak{G}$. H sei eine beliebige Substitution von $\mathfrak{G}$ und ihr entspreche die Substitution Z_k von $\mathfrak{Z}$. Nach dem Obigen entspricht auch der Substitution G_k von $\mathfrak{G}$ die Substitution Z_k von $\mathfrak{Z}$. Folglich entspricht wegen des Homomorphismus der Substitution G_k^{-1} von $\mathfrak{G}$ die Substitution Z_k^{-1} von $\mathfrak{Z}$. Infolge des Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z}$ ist ferner der Substitution HG_k^{-1} der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Substitution $Z_k Z_k^{-1} = E$ der Gruppe $\mathfrak{Z}$ zugeordnet. Mithin gehört das Element HG_k^{-1} dem Komplex $\mathfrak{E}$ an, und H selbst ist eine Substitution aus dem Komplex $\mathfrak{E}G_k$. Hiermit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen. Der Komplex $\mathfrak{E}$ ist ferner eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Einer Substitution von $H\mathfrak{E}H^{-1}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ entspricht nämlich die Substitution $Z_k E Z_k^{-1} = E$ von $\mathfrak{Z}$ Mithin gehört jede Substitution $H\mathfrak{E}H^{-1}$ von $\mathfrak{G}$, wenn H ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$ ist, dem Komplex $\mathfrak{E}$ an. Wir haben daher den Satz:

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe besitzt eine invariante Untergruppe $\mathfrak{E}$ von endlichem Index h. Die Zahl h ist gleich der Ordnung der homomorphen, endlichen Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$, die zu $\mathfrak{G}$ gehört. Der Gruppe $\mathfrak{E}$ entspricht in $\{\mathfrak{G}_{11}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \cdots, \mathfrak{G}_{\mu\mu}^*\}$ die Identität; die Gruppe $\mathfrak{E}$ ist einer Gruppe mit Substitutionen der Form:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{matrix}$$

ähnlich. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist stets und nur dann endlich, wenn die invariante Untergruppe $\mathfrak{E}$ die identische Substitution ist.

Die charakteristische Funktion jeder Substitution von $\mathfrak{E}$ hat, wenn sie nicht die identische Substitution ist, wenigstens einen von 1 verschiedenen Elementarteilerexponenten. Hingegen haben die charakteristischen Funktionen sämtlicher Substitutionen einer endlichen Gruppe ausnahmslos Elementarteilerexponenten 1. Hieraus folgt:

Jede Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe ist stets und nur dann endlich, wenn die charakteristischen Funktionen aller Substitutionen der Gruppe ausnahmslos Elementarteilerexponenten 1 *aufweisen.*

Existiert eine ganze positive Zahl r, so daß alle Substitutionen einer Gruppe linearer homogener Substitutionen von r^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind, so hat die charakteristische Funktion jeder Substitution der Gruppe nur Wurzeln, die unter den Wurzeln der Gleichungen

$$\varrho = 1,\ \varrho^2 = 1,\ \cdots,\ \varrho^r = 1$$

enthalten sind. Eine solche Gruppe ist mithin eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe. Beachtet man noch, daß die charakteristische Funktion jeder linearen homogenen Substitution endlicher Ordnung nur Elementarteilerexponenten 1 besitzen kann, so folgt nach dem zuletzt angegebenen Satz das zuerst von mir in den Math. Annalen, Bd. 53, S. 241 unter einer Einschränkung und dann allgemein von W. Burnside (Proceedings of the London Math. Society, ser. 2, vol. 3, p. 438) bewiesene Theorem:

Kann man eine endliche positive ganze Zahl r so finden, daß alle Substitutionen einer Gruppe von r^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind, so ist die Gruppe endlich. Die Endlichkeit aller Gruppenelemente ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit einer Gruppe linearer homogener Substitutionen.

§ 4.

Ob Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe endlich viele oder unendlich viele Substitutionen besitzen, läßt sich mit Hilfe der zugehörigen invarianten Hermiteschen Formen unterscheiden. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Typus einer endlichen Gruppe sei wie im § 2 in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{G}^*$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{G}^*_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{G}^*_{21} & \mathfrak{G}^*_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{G}^*_{31} & \mathfrak{G}^*_{32} & \mathfrak{G}^*_{33} & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \\
\mathfrak{G}^*_{\mu 1} & \mathfrak{G}^*_{\mu 2} & \mathfrak{G}^*_{\mu 3} & \cdots & \mathfrak{G}^*_{\mu\mu}
\end{array}$$

transformiert. Die erste größte vollständig reduzible, endliche Gruppe $\mathfrak{G}^*_{11}$ sei eine Gruppe von Substitutionen in s Variablen. Wie jede endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen führt auch $\mathfrak{G}^*_{11}$ nach einem

von Herrn E. H. Moore (Math. Annalen, Bd. 50, S. 213) und mir (Comptes Rendus 1896, S. 168) gleichzeitig gefundenen Satze eine definite Hermitesche Form von s Variablen in sich über. Bei der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ und folglich auch bei der zu $\mathfrak{G}^*$ ähnlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ bleibt daher eine positive Hermitesche Form, d. h. eine solche, die abgesehen vom Werte 0 nur positive Werte annimmt, vom Range s invariant.

Sei s der Rang der positiven Hermiteschen Form *höchsten Ranges*, die bei allen Substitutionen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Typus einer endlichen Gruppe invariant bleibt. Durch Einführung neuer Variablen kann man diese invariante positive Hermitesche Form in $y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_s\bar{y}_s$ transformieren; hierbei sind $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_s$ zu $y_1, y_2, \cdots, y_s$ konjugiert imaginäre Variable. Durch Einführung der neuen Veränderlichen geht die Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{H}$ über, deren Substitutionen die positive Hermitesche Form $y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_s\bar{y}_s$ invariant lassen. Die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ seien von der Form:

$$y_i = \sum_{j=1}^{j=n} h_{ij} y_j' \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Da die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ die positive Hermitesche Form

$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_s\bar{y}_s$$

invariant lassen, müssen die Gleichungen bestehen:

$$h_{1\,s+t}\bar{h}_{1\,s+t} + h_{2\,s+t}\bar{h}_{2\,s+t} + \cdots + h_{s\,s+t}\bar{h}_{s\,s+t} = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots, n-s).$$

Hierbei bedeuten die überstrichenen Größen die konjugiert imaginären zu den nicht überstrichenen. Folglich ist

$$h_{i\,s+t} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s;\ t = 1, 2, \cdots, n-s).$$

Die Gruppe $\mathfrak{H}$ wird mithin von der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{H}_{11} & 0 \\ \mathfrak{H}_{21} & \mathfrak{H}_{22}, \end{matrix}$$

wobei $\mathfrak{H}_{11}$ ein System von Matrizes mit s Zeilen und s Kolonnen bedeutet und eine Gruppe definiert, die $y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_s\bar{y}_s$ invariant läßt. Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form invariant läßt, ist vollständig reduzibel. (Vgl. Transactions of the American Math. Society, vol. 6, 509.) Mithin ist $\mathfrak{H}_{11}$ eine vollständig reduzible Gruppe. Da s die Rangzahl einer bei allen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ invarianten positiven Hermiteschen Form höchsten Ranges sein soll, ist $\mathfrak{H}_{11}$, falls man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, die eindeutig bestimmte, erste größte vollständig reduzible Gruppe, die zu $\mathfrak{G}$ gehört. Wir haben daher den Satz:

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe läßt wenigstens eine positive Hermitesche Form vom Range $s \geqq 1$ invariant. Die Rangzahl jeder bei allen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ invarianten positiven Hermiteschen Form ist gleich oder kleiner als die Variablenzahl der ersten größten vollständig reduziblen Gruppe, die zu $\mathfrak{G}$ gehört; diese Zahl wird auch mindestens einmal tatsächlich erreicht. $\mathfrak{G}$ ist stets und nur dann eine Gruppe von endlich vielen Substitutionen, wenn $\mathfrak{G}$ auch eine definite Hermitesche Form invariant läßt (d. h. eine solche, deren Rang gleich der Variablenzahl n der Substitutionen von $\mathfrak{G}$ ist oder die nur verschwindet, wenn ihre n Paare konjugiert imaginärer Variablen sämtlich gleichzeitig Null gesetzt werden).

Der Zusatz „positiv“ bei den im letzten Satze besprochenen invarianten Hermiteschen Formen ist wesentlich. Z. B. führt die Gruppe linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe, die aus der Substitution $x_1' = x_1$, $x_2' = x_1 + x_2$, ihren positiven und negativen Potenzen und der Identität besteht, die Hermitesche Form $x_1\bar{x}_1 + i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)$ in sich über. Diese hat den Rang 2, die Gruppe ist trotzdem nicht endlich; ihre erste größte vollständig reduzible Gruppe ist die aus der identischen Substitution $x_1' = x_1$ bestehende Gruppe in einer Veränderlichen.

Freiburg i. Br., August 1906.

Über die Fouriersche Reihe.

Von

Leopold Fejér in Kolozsvár.

In der vorliegenden Arbeit wird der Verlauf der zu einer gegebenen Kurve gehörigen Fourierschen Annäherungskurven studiert.

Wir beschränken uns auf den einfachsten und wichtigsten Fall, wo die Kurve aus einer endlichen Anzahl von analytischen*) Stücken zusammengesetzt ist. In diesem Falle lassen sich prägnante Gesetze aufstellen, die den Verlauf der Fourierschen Annäherungskurven genügend charakterisieren. Sie sind in den §§ 2, 3, 4 des I. Teiles behandelt. Es sind dies zumeist, wie wir glauben, neue Sätze, ausgenommen diejenigen, wo wir den Entdecker ausdrücklich erwähnen.

Die Richtigkeit einiger Theoreme könnte dem Leser schon a priori als allzu wahrscheinlich erscheinen. Dem vorzubeugen, haben wir die oben umschriebene Klasse von Funktionen oft überschritten und gezeigt, daß für gewisse allgemeinere Funktionen die Gültigkeit der Sätze aufhören kann. Als sehr instruktiv in dieser Beziehung erweist sich auch der Übergang von den Fourierschen trigonometrischen Polynomen zu meinen arithmetischen Mitteln. Indem sich nämlich zeigt, daß bei den arithmetischen Mitteln vollständig veränderte Eigenschaften auftreten können, wird man zur Einsicht geführt, wie wichtig (wenn auch nicht unbedingt notwendig) es für die Richtigkeit der festgestellten Sätze ist, daß man es eben mit den Fourierschen trigonometrischen Polynomen zu tun hat.

Die Frage nach dem Verlaufe der Fourierschen Annäherungskurven ist äquivalent mit der Frage nach der Diskussion der Differenz $f(x) - s_n(x)$, d. h. mit der Diskussion des Restgliedes der Fourierschen Reihe bei großen Werten des Index. Eine erste Form des Restgliedes liefert das bekannte Dirichletsche Integral. Diese Form des Restgliedes ist aber unmittelbar

*) Es ist aber nicht notwendig, die einzelnen Stücke als analytisch vorauszusetzen. Die Existenz einiger der ersten Ableitungen genügt schon für die Gültigkeit der Resultate dieser Arbeit.

weder für die Diskussion der Ordnung des Unendlichkleinwerdens von $R_n(x)$, noch für die uns besonders interessierende Diskussion des Vorzeichens von $R_n(x)$ geeignet. Wir wenden daher auf die Dirichletsche Form des Restgliedes einen einfachen Kunstgriff an und gewinnen dadurch für das Restglied der Fourierschen Reihe eine neue Form, die für die eben erwähnten Zwecke unmittelbar geeignet ist. Dies wird in § 1 des I. Teiles auseinandergesetzt.

Im II. Teile bleiben wir in demselben Ideenkreise. Es sind hier Fragen erörtert, die sich auf Vorzeicheneigenschaften der Koeffizienten der Fourierschen Reihe beziehen. Im wesentlichen handelt es sich um eine Präzisierung des Fundamentallemmas der Theorie der Fourierschen Reihen. Die Methode ist im wesentlichen die des I. Teiles. Aber auch der klassische Riemann-Dirichletsche Weg führt zum Ziele, wenn man einen Integralmittelwertsatz benützt, den wir kurz auseinandersetzen.*)

Inhalt.

I. Teil.

Seite
§ 1. Restglied der Fourierschen Reihe 274
§ 2. Über die Oszillation der Fourierschen Partialsummen um den Funktionswert für einen bestimmten Wert der unabhängigen Variabeln 277
§ 3. Über die Schnittpunkte der n^{ten} Fourierschen Annäherungskurve mit der gegebenen Kurve bei großen Werten von n 280
§ 4. Die Gibbssche Erscheinung 282

II. Teil.

Von den Koeffizienten der Fourierschen Reihe 285

I. Teil.

§ 1.

Restglied der Fourierschen Reihe.

Wir betrachten im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, eine Funktion $f(x)$ der reellen Variabeln x, die für das Intervall von 0 bis 2π (die Grenzen eingeschlossen) definiert ist und in diesem Intervalle „stückweise analytisch“ ist. Eine Funktion $f(x)$ soll im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$, wie üblich, stückweise analytisch heißen, wenn sie in der Umgebung jeder Stelle des Intervalles in eine konvergente Taylorsche Reihe entwickelbar ist — nur eine endliche Anzahl von Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$

*) Ein Resumé dieser Arbeit ist in den Comptes Rendus (26 février 1906) erschienen. Eine erste Ausführung gab ich im Mathematikai Értesitö der ungarischen Akademie (2. April 1906). Diese Arbeit ist eine zweite Ausführung, in welcher z. B. § 4 des I. Teiles vollständig neu hinzugetreten ist.

ausgenommen, deren Anzahl aber mindestens gleich 1 ist. In der Umgebung einer Stelle a_i soll $f(x)$ zwei (wenn auch in den ersten Koeffizienten übereinstimmende, aber dennoch) verschiedene Taylorsche Entwicklungen haben, von denen die eine für $x > a_i$, die andere für $x < a_i$ gültig ist.*)

Die Gesamtheit aller stückweise analytischen Funktionen bezeichnen wir mit (S). Aus dieser Gesamtheit sind wegen $\nu \geqq 1$ jene Funktionen, die für jede Stelle des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar und (mit ihren sämtlichen Ableitungen) nach 2π periodisch sind, ausdrücklich ausgeschlossen. Um jede akzessorische Schwierigkeit zu vermeiden, behandeln wir die einfachsten Funktionen der Gesamtheit (S), nämlich diejenigen, für welche $\nu = 1$ ist.

Ohne eine prinzipielle Beschränkung eintreten zu lassen, können wir weiter annehmen, daß schon $f(a-0) \neq f(a+0)$**), wo a die nunmehr einzige Ausnahmestelle bedeutet. Endlich können wir voraussetzen, daß $a = 0$ ist.

Wir beschränken uns also auf einen Teil (S_1) der Gesamtheit (S), welcher aus solchen Funktionen $f(x)$ besteht, die ein einziges analytisches Kurvenstück $y = f(x)$ definieren (das eine beliebige, aber endliche Anzahl von Maxima und Minima haben kann) und für welche

$$f(+0) \neq f(2\pi - 0).$$

Es sei nun $f(x)$ eine solche Funktion, und x eine beliebige, aber bestimmte Stelle im Innern des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$. Dann ist nach Dirichlet die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder der Fourierschen Reihe (die sogenannte n^{te} Partialsumme der Fourierschen Reihe)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}} \sin (2n+1) \frac{\alpha - x}{2} \, d\alpha.$$

Da

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}} \sin (2n+1) \frac{\alpha - x}{2} \, d\alpha,$$

*) Wir denken uns die Funktion $f(x)$ periodisch wiederholt, so daß wir für die Fälle $a_i = 0$ oder $a_i = 2\pi$ nichts Besonderes auszusagen haben.

**) Nämlich im allgemeinen ist, wie schon erwähnt,

$$f(a-0) = f(a+0),\ f'(a-0) = f'(a+0),\ \cdots,\ f^{(k-1)}(a-0) = f^{(k-1)}(a+0),$$

und erst

$$f^{(k)}(a-0) \neq f^{(k)}(a+0).$$

so hat man

$$(1) \qquad R_n(x) = s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(x)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}} \sin (2n+1) \frac{\alpha - x}{2} \, d\alpha.$$

Das ist die bekannte Dirichletsche Form für das Restglied*) $R_n(x)$. Diese hält das Vorzeichen, sowie die Größenordnung des Restgliedes verborgen. Wir können aber leicht eine Form des Restgliedes gewinnen, welche beide erwähnten Eigenschaften in Evidenz setzt. Wir führen

$$(2) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(x)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}}$$

ein und bemerken dazu, daß, zufolge der Voraussetzung, $\varphi(\alpha)$ für jede innere Stelle α des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$ schlechthin, dagegen an der Stelle 0 nach rechts, an der Stelle 2π nach links analytisch ist. Setzen wir nun an

$$(3) \qquad \eta_n(x) = \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha) \cos (2n+1) \frac{\alpha - x}{2} \, d\alpha,$$

wo

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha},$$

so ist nach dem Fundamentallemma der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\lim_{n=\infty} \eta_n(x) = 0.$$

Dieses Fundamentallemma lautet:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \psi(\alpha) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n\alpha) \, d\alpha = 0,$$

wenn nur $\psi(\alpha)$ im Intervalle $(a \cdots b)$ integrabel ist und ebenda $|\psi(\alpha)|$ eine endliche obere Grenze besitzt.

Nun liefert aber (3) durch eine partielle Integration

$$\eta_n(x) = -(\varphi(0) + \varphi(2\pi)) \cos (2n+1) \frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2} \pi R_n(x),$$

wo wegen (2)

$$\varphi(0) + \varphi(2\pi) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

*) Wir nennen von nun an nicht $f(x) - s_n(x)$, sondern $s_n(x) - f(x)$ das Restglied.

ist; folglich

$$(\mathrm{I}) \qquad R_n(x) = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(2\pi) - f(0)}{2} \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \eta_n(x) \right).$$

Das ist die gesuchte Form des Restgliedes, die Vorzeichen und Größenordnung in Evidenz setzt. Sie ist für eine beliebige Funktion der Gesamtheit (S_1) *brauchbar.*

Wir werden uns, wie schon bemerkt, nur mit solchen Funktionen beschäftigen. Um aber anzudeuten, wie man bei einer beliebigen stückweise analytischen Funktion zu verfahren hat, besprechen wir kurz den nächstkomplizierteren Fall. Es sei nämlich noch $f(+0) = f(2\pi - 0)$, aber schon $f'(+0) \neq f'(2\pi - 0)$.

Dann betrachten wir, die früheren Bezeichnungen beibehaltend,

$$\int_0^{2\pi} \varphi''(\alpha) \sin(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}\, d\alpha$$

und bekommen durch zweimalige partielle Integration die gesuchte Form des Restgliedes

$$(\mathrm{II}) \qquad R_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi} \left(\frac{f'(2\pi) - f'(0)}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \varepsilon_n(x) \right),$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n(x) = 0.$$

§ 2.

Über die Oszillation der Fourierschen Partialsummen um den Funktionswert für einen bestimmten Wert der unabhängigen Variabeln.

Um ein Bild vom Verlaufe der Fourierschen Annäherungskurven $y = s_n(x)$ (verglichen mit dem Verlaufe der dargestellten Kurve $y = f(x)$ selbst) zu gewinnen, wollen wir in diesem Paragraphen auf folgende Frage eine Antwort suchen.

Es sei x eine bestimmte Stelle. Betrachten wir die unendliche Zahlenfolge

$$s_n(x) - f(x)$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots \infty.$$

Gibt es in dieser Folge unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder, oder nicht? Mit anderen Worten: Oszillieren die Fourierschen

Partialsummen an der Stelle x um den zu x gehörigen Reihenwert $f(x)$, oder nicht?

Bevor wir in dieser Beziehung die zu einer stückweise analytischen Funktion gehörige Fouriersche Reihe untersuchen, betrachten wir einerseits z. B. die Weierstraßsche überall konvergente Fouriersche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x), \tag{4}$$

wo $0 < a < 1$, b eine ungerade ganze Zahl, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Hier ist $f(x)$ überall stetig und an keiner Stelle differenzierbar. Betrachten wir die Argumentwerte

$$\frac{u\pi}{2b^\nu}, \tag{5}$$

wo

$$u = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty,$$
$$\nu = 1, 2, \cdots, \infty.$$

Diese Stellen bedecken die ganze reelle Achse überall dicht, und es ist leicht einzusehen, daß die Partialsummen der Reihe (4) für keinen der Werte (5) um den entsprechenden Wert $f(x)$ oszillieren.

Betrachten wir andererseits z. B. die Fouriersche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{b^{2n}} \cos(b^n x). \tag{6}$$

wo $0 < a < 1$, b eine ungerade ganze Zahl > 1. Diese stellt eine ganze transzendente Funktion mit der Periode 2π dar (also auch eine Funktion, die nicht zur Gesamtheit (S) gehört). Es ist klar, daß auch hier für die Werte (5) die Partialsummen nicht um $f(x)$ oszillieren können.*)

Wir haben zwei extreme Beispiele von Funktionen angeführt, die nicht stückweise analytisch sind, und für die eine überall dichte Menge

*) Die Reihe (6) stellt in der Tat eine ganze transzendente Funktion dar, weil für $|x| \leqq R$, wo R eine beliebig große, aber feste positive Zahl bedeutet,

$$|\cos(b^n x)| \leqq e^{b^n R},$$

und daher

$$|a^{b^{2n}} \cos(b^n x)| \leqq a^{b^{2n}} e^{b^n R} = (a^{b^n} e^R)^{b^n}.$$

Da aber $\lim_{n=\infty} a^{b^n} e^R = 0$ ist, so ergibt der Vergleich mit der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a^{b^n} e^R)^{b^n}$$

die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (6) für $|x| \leqq R$.

von Argumentwerten existiert, an welchen die Fourierschen Partialsummen nicht um $f(x)$ oszillieren.

Es sei nun $f(x)$ eine stückweise analytische Funktion, z. B. jene Funktion, die von 0 bis π gleich $+1$, von π bis 2π gleich -1 ist. Statt der Fourierschen Partialsummen betrachten wir ihre arithmetischen Mittel $S_n(x)$. Wir haben nun ganz allgemein gezeigt*), daß für eine beliebige endliche und integrierbare Funktion

$$m \leqq S_n(x) \leqq M$$

ist, für

$$n = 1, 2, 3, \cdots, \infty$$

und

$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$

wo M und m die Weierstraßsche obere resp. untere Grenze von $f(x)$ in $(0 \cdots 2\pi)$ bedeuten. Für die arithmetischen Mittel unserer Funktion $f(x)$ haben wir daher

$$-1 \leqq S_n(x) \leqq 1$$

für

$$n = 1, 2, 3, \cdots, \infty$$
$$0 \leqq x \leqq 2\pi,$$

und folglich findet für die arithmetischen Mittel an keiner einzigen Stelle Oszillation statt. Während nun, wie wir sehen werden, die Fourierschen Partialsummen dieser stückweise analytischen Funktion $f(x)$ um den Funktionswert oszillieren (nur eine endliche Anzahl von Stellen des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$ ausgenommen), findet dies für die arithmetischen Mittel an keiner einzigen Stelle statt Es ist also gewiß nicht unwesentlich, daß wir es eben mit den Fourierschen trigonometrischen Polynomen zu tun haben.

Es sei nun $f(x)$ eine beliebige Funktion der Gesamtheit (S_1), und x eine beliebige, aber bestimmte Stelle des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$, die aber von 0 und π verschieden ist. Dann folgt aus der unter (I) gegebenen Form von $R_n(x)$ sofort, daß $R_n(x)$ für unendlich viele Werte von n positiv und für unendlich viele Werte von n negativ ist. Da nämlich

$$\lim_{n=\infty} \eta_n(x) = 0$$

ist, so genügt es bloß zu zeigen, daß

$$\cos(2n+1)\frac{x}{2} = \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)$$

unendlich oft größer ist, als eine gewisse, von n unabhängige positive Zahl A, und unendlich oft kleiner ist als $-A$. Das ist aber wohlbekannt. Man sondert die Fälle, in denen $\frac{x}{\pi}$ irrational oder rational ist, und gelangt in beiden Fällen ganz elementar zu unserer Behauptung.

*) Math. Annalen, Bd. 58, Seite 60.

Wir haben also gezeigt, daß für eine beliebige Funktion von (S_1) *die Fourierschen Partialsummen um* $f(x)$ *oszillieren und zwar für jeden Wert von* x. *Die Stellen* $0, \pi$ *können allein eine Ausnahme bilden.* Ein Beispiel, wo 0 und π wirklich Ausnahmestellen sind, ist die Funktion $f(x)$, die folgenderweise definiert ist:

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } 0 < x < 2\pi,$$

$$f(x) = 0 \text{ für } x = 0.$$

Die Fouriersche Reihe dieser Funktion ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

und $R_n(0)$, $R_n(\pi)$ sind für jedes n gleich Null.

Wir können noch zur Charakterisierung der *Größenordnung* von $R_n(x)$ bemerken, daß für eine beliebige Funktion von (S_1) das Produkt $nR_n(x)$ nicht zu Null konvergiert, sondern für $n = \infty$ eine positive obere und negative untere Unbestimmtheitsgrenze besitzt. Wie die Form (I) von $R_n(x)$ zeigt, hängt der Wert dieser Unbestimmtheitsgrenzen bloß von x und vom Werte des Sprunges $f(2\pi) - f(0)$ ab, und ist sonst von der speziellen Form der Kurve $y = f(x)$ unabhängig.

Ähnlich läßt sich die Frage der Oszillation der Fourierschen Partialsummen für eine beliebige stückweise analytische Funktion erledigen, wenn man nur in der in § 1 angedeuteten Weise für eine passende Form des Restgliedes sorgt. Z. B. für eine Funktion, wie die am Ende von § 1 betrachtete, leistet dies die unter (II) gegebene Form des Restgliedes.

§ 3.

Über die Schnittpunkte der n^{ten} Fourierschen Annäherungskurve mit der gegebenen Kurve bei großen Werten von n.

Um das Bild des Verlaufes der Fourierschen Annäherungskurven zu vervollständigen, wollen wir in diesem Paragraphen folgende, im Sturmschen Geiste gestellte Frage beantworten.

Wie oft wechselt die Differenz $s_n(x) - f(x)$ *im Intervalle von* 0 *bis* 2π *bei großem Werte von* n *ihr Vorzeichen?*

Diese Frage läßt sich unter sehr allgemeinen Bedingungen für $f(x)$ erledigen. Herr Hurwitz hat nämlich folgenden Satz bewiesen*):

*) Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Annalen, Bd. 57, Seite 444.

„Sind in der Reihe der Fourierschen Konstanten

$$a_0,\ a_1,\ a_1',\ a_2,\ a_2',\ \cdots$$

der Funktion $f(x)$ einige Anfangsglieder Null und bezeichnet k den ersten Index, für welchen a_k und a_k' nicht mehr beide Null sind, so ist die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens der Funktion $f(x)$ im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$ mindestens $2k$."

Herr Hurwitz beweist diesen Satz unter sehr allgemeinen Bedingungen für $f(x)$ (l. c.). Wendet man nun diesen Satz auf die Differenz $s_n(x) - f(x)$ an, so findet man, daß diese im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$ mindestens $2n + 2$ Strecken konstanten Vorzeichens besitzt. *Die Anzahl der Strecken konstanten Vorzeichens von $s_n(x) - f(x)$ wächst also unbegrenzt mit dem Index n im Intervalle* $(0 \cdots 2\pi)$.

Für eine Funktion der Gesamtheit (S_1) läßt sich der eben ausgesprochene Satz auch mit Hilfe der unter (I) gegebenen Form von $R_n(x)$ leicht beweisen. Wir erhalten aber auf diesem Wege noch mehr; *wir kommen zum Ergebnisse, daß die Größe der Strecken konstanten Zeichens von $R_n(x)$ im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *mit wachsendem n unbegrenzt abnimmt.*

Um dies zu zeigen, müssen wir zu dem in § 1 Gesagten nur folgendes hinzufügen. Nach dem Fundamentallemma ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Betrachten wir nun die Gesamtheit aller Funktionen $\psi(\alpha)$, die im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$ mit ihrer Ableitung stetig sind und für welche

$$\left| \frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \right| < G$$

für

$$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi,$$

wo G eine positive Zahl bedeutet. Für die Menge dieser Funktionen $\psi(\alpha)$ konvergiert

$$\int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n\alpha)\, d\alpha$$

gleichmäßig zu Null. In der Tat ist z. B.

$$\int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \psi'(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha,$$

also

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \right| < \frac{2\pi G}{n},$$

was zu beweisen war.

Es sei nun ε eine beliebig kleine, aber feste, positive Zahl, und x bewege sich im Intervalle $(\varepsilon \cdots 2\pi - \varepsilon)$. Dann erhalten wir eine Menge von Funktionen $\varphi(\alpha)$ (Bezeichnung von § 1), deren jede mit ihrer Ableitung im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$ stetig ist und für welche $|\varphi'(\alpha)| < G$, $(0 \leqq \alpha \leqq 2\pi)$, wo G eine gewisse positive Zahl bedeutet. Folglich konvergiert für $\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon$ die Funktionsfolge $\eta_n(x)$ gleichmäßig zu Null. Wenn wir dies in Betracht ziehen, so ergibt die Form (I) des Restgliedes schon leicht, daß die Größe der Strecken konstanten Vorzeichens von $R_n(x)$ mit wachsendem n unbegrenzt abnimmt.

Schließlich bemerken wir, daß die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ einer Funktion (S) auch vom Gesichtspunkte dieses Paragraphen aus ein ganz anderes Verhalten zeigen können. Für die Funktion $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ für $\pi < x < 2\pi$ ist die Anzahl der Strecken konstanten Vorzeichens von $S_n(x) - f(x)$ niemals größer als 2.

§ 4.

Die Gibbssche Erscheinung.

Wir beenden das Studium des Verlaufes der Fourierschen Annäherungskurven, indem wir den Verlauf dieser Annäherungskurven in der Umgebung einer einfachen Sprungstelle von $f(x)$ untersuchen. Diese Frage ist eigentlich vollständig gelöst durch das merkwürdige Gibbssche Theorem*). Herr Bôcher hat neuerdings die Aufmerksamkeit auf dieses Theorem gelenkt. In Nr. 9 seiner Arbeit: Introduction to the theory of Fourier's series**) gibt er eine interessante ausführliche Analyse dieser Frage.

Es sei $f(x)$ eine z. B. stückweise analytische Funktion, die an einer einzigen inneren Stelle a des Intervalles $(0 \cdots 2\pi)$ einen einfachen Sprung erleidet. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß $f(a-0) < f(a+0)$.

Es seien nun

$$y = s_n(x)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

die Fourierschen Annäherungskurven.

Die Kurve, die den Grenzwert $\lim_{n=\infty} s_n(x)$ darstellt (graph of the limit, wie Gibbs sagt), ist nun offenbar die Kurve

$$y = f(x), \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < a \quad \text{und für} \quad a < x \leqq 2\pi,$$

*) „Nature", April 27, 1899. Vergl. auch C. Runge: Theorie und Praxis der Reihen (Leipzig, Göschen, 1904), § 19.

**) Annals of Mathematics, vol. 7. Herr Prof. Hurwitz war so freundlich, mich im Juli 1906 während eines Aufenthaltes in Zürich auf die damals kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Bôcher aufmerksam zu machen.

plus der Punkt mit den Koordinaten

$$a, \frac{f(a-0)+f(a+0)}{2}.$$

Lange scheint man nun geglaubt zu haben, daß folgender Satz richtig sei:

Man betrachte die gebrochene (aber stetige) Kurve C, die aus folgenden drei Stücken zusammengesetzt ist:

Erstes Stück, C_1: $y = f(x)$, für $0 \leqq x < a$.

Zweites Stück, C_2: die vertikale geradlinige Strecke, welche die Punkte mit den Koordinaten a, $f(a-0)$ und a, $f(a+0)$ verbindet.

Drittes Stück, C_3: $y = f(x)$, für $a < x \leqq 2\pi$.

Es sei weiter ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl. Man schlage um jeden Punkt der Kurve C als Mittelpunkt mit dem Radius ε einen Kreis. Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene, die nicht außerhalb irgend eines dieser Kreise liegen, bilden einen die Kurve C umgebenden Streifen C_ε. Man glaubte nun irrtümlicherweise, daß die Fourierschen Annäherungskurven $y = s_n(x)$, wenn nur n gehörig groß ist, alle innerhalb des Steifens C_ε liegen, d. h. daß die Grenze der Kurven $y = s_n(x)$ die Kurve C sei. Gibbs bemerkte, daß dies nicht der Fall sei. Die Grenze der Fourierschen Annäherungskurven (limit of the graphs, wie Gibbs sagt) ist (nicht die Kurve C sondern) eine Kurve $\widetilde{C}$, die aus folgenden drei Stücken besteht*):

Erstes Stück: $y = f(x)$ für $0 \leqq x < a$.

Zweites Stück: die vertikale geradlinige Strecke, welche die Punkte mit den Koordinaten

$$a, f(a-0) + \frac{DP_1}{\pi}$$

und

$$a, f(a+0) - \frac{DP_1}{\pi}$$

verbindet.

Drittes Stück: $y = f(x)$ für $a < x \leqq 2\pi$.

Hier bedeutet

$$D = f(a+0) - f(a-0)$$

und

$$P_1 = \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = -0{\cdot}2811\cdots.$$

Die Kurve $\widetilde{C}$ entsteht also aus C einfach dadurch, daß das vertikale

*) Wir führen den Satz fast wörtlich nach Herrn Bôcher an. Loc. cit.

geradlinige Stück C_2 nach unten und nach oben verlängert wird. Die Größe der Verlängerung hat beiderseits denselben Wert. Dieser beträgt ungefähr 9% des Sprunges D.

Es ist nicht uninteressant, daß der durch den Gibbsschen Satz festgestellte Konvergenzdefekt der Fourierschen Partialsummen bei den arithmetischen Mitteln nicht vorhanden ist.

Die Gibbssche Erscheinung tritt bei den Approximationskurven der arithmetischen Mittel nicht auf, denn wir können zeigen, daß diese Approximationskurven $y = S_n(x)$ im früher festgestellten Sinne wirklich zur Kurve C als Grenzkurve konvergieren.

Es sei nämlich ε eine beliebig kleine, aber feste, positive Größe. Dann können wir infolge der Voraussetzung ein positives η (wo $\eta < \varepsilon$) finden, so daß

$$f(a-0) - \frac{\varepsilon}{4} \leqq f(x) \leqq f(a+0) + \frac{\varepsilon}{4},$$

wenn

$$a - \eta \leqq x \leqq a + \eta.$$

Nun ist*)

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos n(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)} f(\alpha)\, d\alpha.$$

In den Intervallen $\left(0, a - \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(a + \frac{\eta}{2}, 2\pi\right)$ konvergiert $S_n(x)$ gleichmäßig zu $f(x)$. Es liege nun x im Intervalle $\left(a - \frac{\eta}{2}, a + \frac{\eta}{2}\right)$. Wir zerlegen

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{a-\eta} \cdots + \frac{1}{2n\pi} \int_{a-\eta}^{a+\eta} \cdots + \frac{1}{2n\pi} \int_{a+\eta}^{2\pi} \cdots.$$

Der erste und dritte Teil konvergiert für $n = \infty$ gleichmäßig zu Null. Der zweite Teil liegt infolge des ersten Integralmittelwertsatzes für genügend großes n gewiß zwischen $f(a-0) - \frac{\varepsilon}{2}$ und $f(a+0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Folglich liegt $S_n(x)$, wenn $a - \frac{\eta}{2} \leqq x \leqq a + \frac{\eta}{2}$, für genügend großes n gewiß zwischen $f(a-0) - \varepsilon$ und $f(a+0) + \varepsilon$. Hiermit ist gezeigt, daß die Kurven $y = S_n(x)$ im früher festgestellten Sinne zur Kurve C konvergieren.**)

*) S. Math. Annalen, Bd. 58, S. 54—56.

**) Diesen Satz kann man natürlich a priori ebensowenig einsehen wie den Satz, daß für die Fourierschen Annäherungskurven die Grenze die Kurve $\tilde{C}$ ist.

II. Teil.

Von den Koeffizienten der Fourierschen Reihe.

Es sei $f(x)$ eine Funktion der Gesamtheit (S_1), d. h. es sei $y = f(x)$ ein einziger analytischer Bogen*), der durch die Punkte mit den Koordinaten 0, $f(+0)$ und 2π, $f(2\pi - 0)$ begrenzt ist, wo $f(+0) \neq f(2\pi - 0)$. Es sei weiter

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

die Fouriersche Reihe von $f(x)$. Dann gilt folgender Satz:

Von einem gewissen Gliede an sind alle Glieder der Folge

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

von Null verschieden, haben dasselbe Vorzeichen und nehmen dem absoluten Betrage nach fortwährend und unbegrenzt ab.

Ist $f'(+0) \neq f'(2\pi - 0)$, *so gilt dasselbe für die Folge*

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots.$$

Beweis. Zunächst ist $\lim a_n = 0$ z. B. infolge des Fundamentallemmas. Weiter, da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$$

ist, folgt

$$\Delta_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left(\sin (n+1)\,\alpha - \sin n\alpha\right) d\alpha,$$

oder

$$\Delta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \cos (2n+1) \frac{\alpha}{2} \, d\alpha.$$

Führen wir nun die Funktion

$$\psi(\alpha) = f(\alpha) \sin \frac{\alpha}{2}$$

und das Integral

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} \psi''(\alpha) \cos (2n+1) \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \tag{7}$$

*) Diesen Bogen soll man sich aber nicht gerade als monoton vorstellen; er kann im Intervalle $(0 \cdots 2\pi)$ eine beliebige, aber endliche Anzahl von Maxima und Minima haben.

ein. Zweimalige partielle Integration liefert

$$\varepsilon_n = -(\psi'(2\pi) + \psi'(0)) - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \frac{\pi \Delta_n}{2},$$

und weil

$$\psi'(2\pi) + \psi'(0) = -\frac{f(2\pi)}{2} + \frac{f(0)}{2}$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$\Delta_n = a_{n+1} - a_n = \frac{f(2\pi) - f(0) - 2\varepsilon_n}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi},$$

wo wegen (7) und infolge des Fundamentallemmas

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Aus dieser bemerkenswerten Form von Δ_n folgt nun unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes.

Ähnlich verfährt man in bezug auf die b_n. Es ist nämlich

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin\frac{\alpha}{2} \sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}\, d\alpha.$$

Führt man also

$$\int_0^{2\pi} \psi^{(IV)}(\alpha) \sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

ein, so erhält man durch viermalige partielle Integration

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-(2n+1)(f'(2\pi) - f'(0)) + \delta_n}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^3 \pi}$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

aus welcher Gleichung man die gewünschten Schlüsse ziehen kann.

* * *

Die vorangehende Entwicklung kann auch so aufgefaßt werden, daß sie eine Präzisierung des Fundamentallemmas der Theorie der Fourierschen Reihen für stetige und einigemal differenzierbare Funktionen enthält. *In der Tat können wir jetzt für die in Betracht kommenden Funktionen $\psi(x)$ nicht nur behaupten, daß*

$$i_n = \int_0^{2\pi} \psi(x) \sin nx\, dx$$

mit wachsendem n zu Null konvergiert, sondern auch das Vorzeichen von i_n bei großen Werten von n verfolgen. Dies ist uns durch Anwendung eines einfachen Kunstgriffes gelungen. Nun gab Riemann einen Beweis des Fundamentallemmas, welcher auf eine Zerlegung des Integrals i_n nach den Wellen der Kurve $y = \sin nx$ beruht, und welche die richtige Einsicht in das Wesen des Lemmas gestattet. Es ist wünschenswert, daß wir auch das *Vorzeichen* von i_n für großes n auf Grund dieser Dirichlet-Riemannschen Zerlegung bestimmen können. Das ist in der Tat möglich. Wir wollen die Untersuchung hier nicht ausführlich auseinandersetzen, sondern bemerken nur, daß sie mit Hilfe eines Integralmittelwertsatzes, der auch sonst gut brauchbar ist*), leicht durchzuführen ist.

Dieser Mittelwertsatz, den man ganz elementar beweisen kann, lautet folgendermaßen:

Es seien $\varphi(x)$ und $f(x)$ zwei, für das Intervall (a, b) definierte Funktionen. Die Kurve $y = \varphi(x)$ sei symmetrisch in bezug auf die gerade Linie, die durch den Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ des Intervalls $(a \cdots b)$ geht und auf dem Intervalle senkrecht steht. D. h. es sei:

$$\varphi(a + \xi) = \varphi(b - \xi) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Außerdem sei $\varphi(x)$ im Intervalle überall nicht negativ. Vorausgesetzt nun, daß die Kurve $y = f(x)$ in $(a \cdots b)$ überall konkav ist, bestehen folgende Ungleichungen:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ist die Kurve $y = f(x)$ in (a, b) überall konvex, so ist der Sinn der Ungleichungen umzukehren.

Dieser Mittelwertsatz gibt für das Integral $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ Grenzen

---

*) Z. B. für $i = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ liefert dieser Mittelwertsatz sofort die durch Herrn Bôcher (loc. cit. Fußnote) gegebenen Ungleichungen

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{4}{2k+1} < |i| < \frac{1}{\pi}\,\frac{2k+1}{k(k+1)},$$

welche für die Theorie und Ausrechnung des Integrals $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ nützlich sind.

an, die im allgemeinen näher zueinander gelegen sind, als die durch den ersten Mittelwertsatz gelieferten. In der Tat ist im allgemeinen

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|<M-m,$$

wo M die obere, m die untere Grenze von $f(x)$ für das Intervall $(a\cdots b)$ bedeutet.

Wenn wir nun die Teilintegrale

$$\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} f(x)\sin nx\,dx$$

nicht, wie üblich, mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes, sondern mit Hilfe des eben angeführten abschätzen, so gelangen wir leicht zu der gewünschten Präzisierung des Fundamentallemmas.

Über algebraische Raumkurven.

Von

A. Brill in Tübingen.

Bei einer projektiven Behandlung der algebraischen Gebilde pflegt man die der Homogenität wegen eingeführte Koordinate mit den Cartesischen als gleichberechtigt anzusehen und geometrisch zu deuten. Unzweifelhaft gewinnt dabei die Einkleidung der Probleme an Allgemeinheit und Symmetrie. Oft aber ergeben sich bei der Durchführung Weitläufigkeiten, die diesen Vorzug teilweise aufheben, und es hat sich für gewisse Untersuchungen als vorteilhaft erwiesen, zu der Auszeichnung einzelner Koordinaten zurückzukehren.

Dieser Fall tritt ein, wenn es sich um die algebraische Darstellung der Raumkurven handelt. Versucht man, wie es nahe liegt, die Raumkurve durch den Inbegriff aller Kegel darzustellen, die über ihr stehen, so zeigt sich die Gleichung des Kegels, dessen Spitze in einem unbestimmten Raumpunkte liegt, mit Parametern überladen. Dagegen erscheint diese Gleichung, wie der Verfasser in einer Note in den Göttinger Nachrichten von 1901 (S. 156) gezeigt hat, einer weiteren Behandlung eben noch fähig, wenn die Spitze auf einer bestimmten Kante des Koordinatentetraeders angenommen wird, wenn man also zwei von den Quotienten der Variabelen als algebraische Funktionen des dritten ansieht. Denn trotz der beschränkten Veränderlichkeit eines Kegels, dessen Spitze auf jener ausgezeichneten Kante des Tetraeders, der „Hauptkante“, wie wir sie nennen wollen, liegt, läßt sich seine Gleichung doch als „Gleichung der Raumkurve“ ansprechen, weil die Schar, die er darstellt, die Kurve eindeutig und völlig bestimmt.

Bildet man von dieser Kegelgleichung die Diskriminante hinsichtlich der ausgezeichneten Variabelen, so erhält man (§ 4 jener Note) die wirklichen und die scheinbaren Doppelpunkte getrennt. Sie zerfällt nämlich rational in zwei Faktoren, von denen einer, der den scheinbaren Doppelpunkten entspricht, — ein vollständiges Quadrat — noch von dem Para-

meter abhängt, der die Lage der Spitze auf der Hauptkante bestimmt, während der andere ein Büschel von Tangentialebenen an die Raumkurve und, gleichfalls in der Gestalt eines Doppelfaktors, die wirklichen Doppel- und vielfachen Punkte liefert.

Entnimmt man der Gleichung des Kegels die Koeffizienten der Potenzen jenes Parameters, der die Spitze bestimmt, und setzt sie einzeln gleich Null, so erhält man Flächen mit bzw. einem n-fachen Punkt (Kegel), einem $(n-1)$-fachen Punkt (Monoid), einem $(n-2)$-fachen usw. Punkt, lauter Flächen, die durch die Kurve hindurchgehen, die aber sämtlich durch die beiden ersten von ihnen, einen Kegel und ein Monoid, bestimmt sind. Man gelangt so zu der bekannten Cayleyschen Darstellung einer Raumkurve durch Kegel und Monoid, an welche die schönen und fruchtbaren Arbeiten von G. Halphen, R. Sturm, H. Valentiner und M. Noether*) angeschlossen haben.

Die Gleichung des Monoids bei gegebener Kegelgleichung muß gewissen Bedingungen genügen, wenn die Raumkurve nicht Besonderheiten aufweisen soll. Man beschränkt sich gewöhnlich auf die Angabe, daß Zähler und Nenner des Bruches, dem eine der beiden abhängigen Koordinaten gleichgesetzt wird, sich „adjungiert“ (s. Art. 5) verhalten müssen gegenüber der Kegelgleichung, durch welche die andere definiert wird. Auch die rationalen Prozesse, die M. Noether in seiner grundlegenden Abhandlung im 23. Bande der Math. Annalen (S. 339) für die Berechnung der adjungierten Kurven angibt, verlangen außer der Diskriminante die Verwendung noch anderer umständlicher Eliminationsergebnisse. Für die rechnerische Durchführung ist das im folgenden (Art. 6) angegebene Verfahren vorzuziehen, wonach zu einer vorliegenden Kegelgleichung das allgemeinste Monoid mit Hilfe einer Identität bestimmt wird, in die als bekannte Größen außer der linken Seite der Kegelgleichung und ihrer Ableitung nur der „außerwesentliche“ Teiler ihrer Diskriminante eingeht. Aus dieser Identität ergeben sich gleichzeitig zwei verschiedene Monoidgleichungen, deren eine auch für die Bildung der ganzen algebraischen Funktionen einer Variabelen verwendbar ist, mit der überhaupt die hier vorgelegte algebraische Theorie der Raumkurven sich nahe berührt.

Die Gleichung der Kegelschar läßt sich als die einer nichtlinearen

*) Außer einigen früheren Abhandlungen (darunter der von H. G. Zeuthen im 3. Bande der Annali di Mat. 2. Ser. mit wichtigen Abzählungsergebnissen) kommen in Betracht: G. Halphen, Sur la classification des courbes gauches algébriques, Journ. Éc. Polyt. cah. 52, 1882; H. Valentiner, Zur Theorie der Raumkurven, Act. math. II, 1883; M. Noether, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Abhdlg. d. Preuß. Akad. d. Wiss. für 1882; R. Sturm, On some new theorems on curves of double curvature, Rep. Brit. Ass. 1881.

Schar von ebenen Kurven von gleicher Ordnung und gleichem Geschlecht auffassen, die sowohl zerfallende Individuen enthalten als in ihrer Gesamtheit zerfallen kann. Im letzteren Falle zerfällt auch die Raumkurve. Man gewinnt so einen Angriffspunkt für die allgemein noch nicht erörterte Frage des Zerfallens von Raumkurven in Gerade, der wenigstens einige der nächstliegenden Fragen zu beantworten erlaubt (Art. 10).

Durch das Nachstehende möchte ich den in der Note von 1901 gegebenen Beitrag zur Theorie der Raumkurven ergänzen und erweitern. Wie dort, so handelt es sich auch hier nicht um neue Eigenschaften dieser Gebilde, sondern um eine algebraische Darstellung, die gestattet, die bekannten und einige neue Sätze der allgemeinen Theorie mit einheitlicher Beweisführung und genauer Umgrenzung auf Grund der Lehre von den algebraischen Funktionen zu versehen.

1.

Ein nach Lage und Gestalt veränderlicher algebraischer Kegel, nicht zerfallend oder zerfällbar, habe seine Spitze auf einer geraden Linie, der Kante $z = t = 0$ des zugrunde liegenden Koordinatentetraeders, welche die „Hauptkante“ heißen möge. Der Kegel wird durch eine homogene Gleichung zwischen z, t, $\lambda x + y$ dargestellt (wo λ ein mit der Spitze veränderlicher Parameter ist), in welcher, weil mit der Lage der Spitze auch die Gestalt sich ändern kann, der Parameter λ auch noch für sich auftritt. Bedeutet das Funktionszeichen Ω eine hinsichtlich z, t, $\lambda x + y$ ganze (reduktibele oder irreduktibele) Funktion, so stellt

$$\Omega(\overline{\lambda x + y,\ z,\ t;\ \lambda}) = 0, \tag{1}$$

wo der Strich die homogen auftretenden Veränderlichen zusammenfaßt, den Inbegriff jener Kegel dar, die im allgemeinen eine Fläche umhüllen werden. Ihre Schnittkurve mit einer Ebene, die durch die Hauptkante geht,

$$z = \varrho t, \tag{2}$$

wo ϱ eine Konstante ist, erhält man, wenn man diese Gleichung mit (1) kombiniert. Besteht noch daneben die Gleichung einer Ebene durch die Kegelspitze

$$\lambda x + y = \nu t, \tag{3}$$

so können λ, ν als Linienkoordinaten in jener Ebene aufgefaßt werden, und man erhält durch Einsetzen von z, $\lambda x + y$ aus (2), (3) in (1) eine Gleichung

$$f(\lambda, \nu;\ \varrho) = 0, \tag{4}$$

welche die von der Geraden (3) umhüllte Schnittkurve in den Linien-

koordinaten λ, ν darstellt. Umgekehrt gelangt man von der Gleichung (4) wieder zu (1), wenn man ν und ϱ aus (2) und (3) einsetzt. Ist nun m die Klasse der Schnittkurve, und macht man die Funktion f in (4) hinsichtlich λ, ν durch eine dritte Variabele μ homogen, die dann auch in (3) einzuführen ist, setzt man ferner

$$\lambda x + \mu y = \nu t = \omega,$$

so ergibt sich aus (4) wieder die Gleichung der Kegelschar, die in entwickelter Form die Gestalt hat:

$$\begin{aligned}(5) \qquad 0 = \Omega(\lambda, \mu, \omega, z, t) \equiv\ & a_k \omega^m \\ & + (a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu)\,\omega^{m-1} \\ & + (a_{k+2}\lambda^2 + b_{k+2}\lambda\mu + c_{k+2}\mu^2)\,\omega^{m-2} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_n\lambda^m + b_n\lambda^{m-1}\mu + \cdots + q_n\mu^m,\end{aligned}$$

wo die $a, b, c, \ldots$ homogene Funktionen von z, t je vom Grade der Indizes sind, und

$$k + m = n$$

die Ordnung des beweglichen Kegels ist. Wenn a_k nicht identisch verschwindet, so ist die Hauptkante $z = t = 0$ k-fache Kante aller Kegel des Systems $\Omega = 0$. Man erhält die Gleichung der Fläche, welche die Kegel umhüllen, wenn man an Stelle der Linienkoordinaten $\lambda, \mu, \nu = \frac{\omega}{t}$ in der Gleichung $\Omega = 0$ Punktkoordinaten einführt.

Wir machen nun die Annahme, daß die in den Ebenen $z + \varrho t$ gelegenen Schnittkurven der Nullfläche in das Produkt von n Punkten ausarten. Dann wird aus dieser Fläche eine Raumkurve, über welcher die Kegel des Systems stehen. Da dann ferner die Gleichung (4) in ein Produkt von n Linearfaktoren in λ, ν zerfällt, so ist dies auch mit dem Ausdruck Ω (5) in λ, μ, ω der Fall, so daß man

$$\begin{aligned}(5\text{a}) \qquad \Omega(\lambda, \mu, \omega, z, t) \equiv\ & a_k\,(\omega - \lambda x_1 - \mu y_1)\,(\omega - \lambda x_2 - \mu y_2)\cdots \\ & \cdots(\omega - \lambda x_m - \mu y_m)\end{aligned}$$

setzen kann, wo die $x_i, y_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ im allgemeinen irrationale Funktionen der Variabelen z, t sind.

Man kann die Gleichung $\Omega = 0$ (5, 5a) eines unbestimmten Kegels $\frac{\lambda}{\mu}$ des Systems, in den Koordinaten $\omega = \lambda x + \mu y$, z, t geschrieben, als *Gleichung der Raumkurve* auffassen, über welcher er steht, oder man kann $\Omega = 0$ als Gleichung der Schnittkurve jenes unbestimmten Kegels mit einer festen Ebene, d. h. als Gleichung der „Projektion der Raumkurve“ auf diese Ebene, von dem mit $\frac{\lambda}{\mu}$ veränderlichen Punkt der Hauptkante aus entworfen, ansehen.

Umgekehrt läßt sich die Gleichung einer jeden Raumkurve auf die Form $\Omega = 0$ (5) bringen. Denn ist eine solche als der teilweise Durchschnitt der beiden Flächen (für $t = 1$)

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

gegeben, und eliminiert man mittels

$$\omega = \lambda x + \mu y$$

x und y, so erhält man eine Gleichung von der Form $\Omega = 0$, welche in so viele in ω, z rationale Faktoren zerfällt, als die Raumkurve Teilkurven enthält, weil mit der Raumkurve zugleich der Kegel mit unbestimmter Spitze zerfällt, der über ihr steht.

Die Forderung der rationalen Zerfällbarkeit von Ω hinsichtlich λ, μ, ω läßt sich noch in anderer Weise formulieren. Setzt man in (5) wieder

$$\omega = \lambda x + \mu y$$

ein und ordnet man nach Potenzen von λ, so müssen, weil die Gleichungen aller Kegel $\frac{\lambda}{\mu}$ durch die Koordinaten irgend eines Kurvenpunktes erfüllt werden, die Koeffizienten dieser Potenzen für die Kurvenpunkte einzeln verschwinden. Man erhält so die Gleichungen von $m+1$ Flächen, die durch die Raumkurve gehen, nämlich

$$A = 0, \tag{6a}$$

$$A'(x)\, y + B = 0, \tag{6b}$$

$$\tfrac{1}{2} A''(xx) y^2 + B'(x) y + C = 0, \tag{6c}$$

. . . . . .

$$a_k y^m + b_{k+1} y^{m-1} + c_{k+2} y^{m-2} + \cdots + q_n = 0, \tag{6q}$$

wenn

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + a_{k+2} x^{m-2} + \cdots + a_n = a_k (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

$$B = b_{k+1} x^{m-1} + b_{k+2} x^{m-2} + \cdots + b_n = -a_k \Sigma y_1 (x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

$$C = c_{k+2} x^{m-2} + \cdots + c_n = a_k \Sigma y_1 y_2 (x - x_3) \cdots (x - x_m),$$

. . . . . .

gesetzt wird, die Striche die partiellen Ableitungen nach den eingeklammerten Variabelen und die Summen Σ die je durch ein Glied dargestellten symmetrischen Funktionen der m Variabelenpaare $x_1 y_1; x_2 y_2; \cdots; x_m y_m$ bedeuten. Wir wollen in der Folge die linke Seite von (6q) mit Y bezeichnen, also die Gleichung, durch die $\frac{y}{t}$ mit $\frac{z}{t}$ verknüpft ist, durch $Y = 0$ darstellen, wo

$$Y \equiv a_k y^m + b_{k+1} y^{m-1} + \cdots + q_n \tag{6q}$$

ist. $A = 0$ (6a) ist die Gleichung des „Kegels A“ n^{ter} Ordnung, mit der

Spitze in dem Punkt $x = z = t = 0$ (oder der „Kurve A“); (6b) ist die Gleichung eines Monoids, d. h. einer Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkt an derselben Stelle; (6c) die einer ebensolchen mit $(n-2)$-fachem Punkt an derselben Stelle und 2-fachem Punkt in $y = z = t = 0$; usw. Die vorletzte von den Gleichungen (6) ist wieder ein Monoid mit dem $(n-1)$-fachen Punkt in $y = z = t = 0$; endlich $Y = 0$ die Gleichung eines Kegels mit der Spitze ebenda. Man bemerke den hinsichtlich der Koordinaten x, y symmetrischen Aufbau des Gleichungssystems (6).

Treten in den Gleichungen der Kegel (ebenen Kurven)

$$A = 0, \quad Y = 0$$

keine Doppelfaktoren auf (was wir im folgenden immer annehmen), so sind die Kanten dieser Kegel (Punkte dieser Kurven) durch die Gleichungen der beiden Monoide einander eindeutig zugeordnet. Eine Ausnahme machen nur die singulären Stellen, wo zusammenfallenden Kanten (Punkten) des einen Gebildes getrennte des anderen entsprechen können, sowie, in dem Falle, daß die Ternärformen A oder Y imprimitiv sind (d. h. eine ganze Funktion von z, t als Faktor auszuscheiden gestatten), die allen Koeffizienten der Potenzen von x bzw. y gemeinsamen Linearfaktoren. Jeder solche Faktor, gleich Null gesetzt, stellt, räumlich gedeutet, eine Ebene dar, dem nur eine Kante des anderen Kegels entspricht (Art. 9, 10).

Aus $a_k = 0$ bestimmen sich k durch die Hauptkante gehende Ebenen $\frac{z}{t}$, welche die Raumkurve in ihren k Schnittpunkten mit der Hauptkante berühren. Das Verhältnis $\frac{\lambda}{\mu}$ der Abstände dieser Punkte von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$ berechnet sich aus

$$\lambda a_{k+1} + \mu b_{k+1} = 0,$$

geschrieben je in dem entsprechenden Wurzelwert von a_k.

2.

Die Diskriminante D_Ω des Polynoms Ω von ω, das oben (Art. 1) in irrationaler Form durch das Produkt

$$\Omega = a_k \prod_i (\omega - \lambda x_i - \mu y_i)$$

von $m = n - k$ Faktoren der angeschriebenen Art dargestellt wurde, ist

$$D_\Omega = a_k^{2m-2} \prod_{ik} [\lambda(x_i - x_k) + \mu(y_i - y_k)]^2,$$

wo $\prod_{ik}$ ein Produkt von $\frac{1}{2} m(m-1)$ Faktoren ist. Andererseits ist bekanntlich die Diskriminante als homogene ganze Funktion vom

$[n(n-1)-k(k-1)]^{\text{ten}}$ Grad rational in z, t dadurch darstellbar, daß man die Resultante aus Ω und der Ableitung $\Omega'(\omega)$ bildet. Dieser Ausdruck stimmt bis auf einen Zahlenfaktor mit jener irrationalen Form überein, wenn man die symmetrischen Funktionen der Variabelenpaare x_i, y_i, unter Berücksichtigung der zwischen ihnen bestehenden Relationen*), in den Koeffizienten (der rationalen Form) von Ω ausdrückt. Bei dieser Umgestaltung verliert D_Ω nicht die Eigenschaft, eine hinsichtlich λ, μ homogene ganze Funktion $m(m-1)^{\text{ten}}$ Grades zu sein. Hinsichtlich z, t jedoch ist die rationale Form im allgemeinen kein vollständiges Quadrat, weil $\prod_{ik}$ nur eine einfach symmetrische Funktion der Paare x_i, y_i ist, nicht das Quadrat einer solchen. Daher sondert sich aus D_Ω eine rationale ganze Funktion von z, t aus, etwa $K(z,t)$:

$$D_\Omega = K(z,t)\cdot[L(z,t;\lambda,\mu)]^2,$$

wo der Grad von L hinsichtlich z, t von Eigenschaften von Ω abhängt, die sogleich zu besprechen sind, und wo man L als eine hinsichtlich z, t primitive Form, d. h. von Faktoren befreit, die λ, μ nicht enthalten, ansehen kann, wenn man zuläßt, daß in K auch quadratische Faktoren auftreten. Setzt man also

$$K = K'K''^2,$$

wo wieder K' und K'' Binärformen in z, t sind, und K' als von Doppelfaktoren befreit angesehen werden kann, so erhält die Diskriminante von Ω die folgende Gestalt (Gött. Nachr. 1901, S. 164):

$$D_\Omega = K'(z,t)\,[K''(z,t)]^2\,[L(z,t;\lambda,\mu)]^2,$$

wo K', K'', L Binärformen in z, t sind. Diese Faktoren haben eine einfache geometrische Bedeutung. Einem Linearfaktor von K' oder K'' (der unabhängig von $\frac{\lambda}{\mu}$ den Diskriminanten aller Kegel der Schar gemeinsam ist) entspricht eine Ebene durch die Hauptkante, welche die Raumkurve entweder einfach oder doppelt berührt oder in einem wirklichen Doppel-(vielfachen)Punkt trifft. $L=0$ ergibt Ebenen, die durch solche Doppel-(mehrfache)Kanten des Kegels $\frac{\lambda}{\mu}$ gehen, welche Sehnen der Raumkurve sind; $L=0$ ergibt also die „scheinbaren Doppelpunkte“ der Raumkurve für den Punkt $\frac{\lambda}{\mu}$.

Für $\mu=0$, $\lambda=1$ geht Ω in $A(x,z,t)$ (Art. 1 (6a)) über, die Diskriminante D_A von A wird also

$$D_A = V(z,t)\cdot\nabla^2(z,t),$$

*) Vergl. wegen dieser Relationen: Junker, Math. Ann. Bd. 38, 45, sowie einen Aufsatz des Verfassers in Math. Ann. Bd. 50.

wenn man

$$K' = V; \quad K'' \cdot [L]_{\mu=0,\,\lambda=1} = \nabla$$

setzt. Den Faktor V nennen wir, wie üblich, den „wesentlichen“ oder „Verzweigungsteiler“, ∇^2 den außerwesentlichen oder Doppelpunktsteiler der Diskriminante von A. — Da umgekehrt zu jeder gegebenen Kurve A sich, wie wir später (Art. 10) sehen werden, eine Raumkurve Ω bestimmen läßt, deren Projektion sie ist, so *gilt der hier gegebene Beweis für die Zerlegung der Diskriminante für jede ebene Kurve A.*

Wir schließen eine Bemerkung an, die sich auf die Änderung der in der Gleichung $\Omega = 0$ auftretenden, noch frei verfügbaren Konstanten bezieht. Gebraucht man die Wendung: eine Kurve „artet aus“, wenn zwischen diesen Konstanten irgend welche Relationen eintreten, so läßt sich aus dem Vorstehenden unmittelbar der Schluß ziehen, *daß die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte einer Raumkurve bei keiner Ausartung sich vergrößern kann.* Denn der Grad des hinsichtlich z, t primitiven Faktors L kann sich durch Spezialisierung der Konstanten zwar erniedrigen (indem sich ein Faktor aus allen Gliedern ausscheidet, der dann in K eingeht), niemals aber erhöhen.

Nimmt man insbesondere an, daß durch Ausartung der Raumkurve $\Omega = 0$ die Projektion A einen singulären Punkt erhält, der zu den vorhandenen hinzutritt, so wird in den Faktoren der Diskriminante

$$D_\Omega = K' K''^2 L^2,$$

sofern sie nicht identisch verschwinden, eine Änderung in der Weise eintreten, daß der Grad von $K'' L$ sich erhöht, während der von K' abnimmt. Da die Funktion L primitiv vorausgesetzt wurde, so kann sich nur der Grad von K'' erhöhen. Dies besagt:

Wenn bei der Ausartung einer Raumkurve zu den vorhandenen vielfachen Punkten einer ihrer Projektionen ein neuer solcher hinzutritt, so bildet sich diesem entsprechend auf der Raumkurve selbst ein wirklicher vielfacher Punkt.

Man kann hierauf einen von M. Noether in seiner Arbeit über reduktibele algebraische Kurven (Acta math. 8, S. 162), freilich nur für Schnittpunktbeziehungen, ausgesprochenen Satz gründen, wenn man aus der Analysis situs den folgenden Anschauungsbeweis entnimmt.

Zerfällt infolge der Ausartung einer Raumkurve die Projektion A in etwa zwei Teilkurven, so zerfällt auch die zugehörige Riemannsche Fläche in zwei Teilflächen, die vor dem Zerfallen zusammenhingen in der Weise, daß mindestens ein Blatt der einen Fläche mit einem der anderen mittels einer Doppellinie verbunden war. Indem die Doppellinien durch Vereinigung der Verzweigungspunkte, die sie begrenzen,

verschwinden, bilden sich Doppelpunkte (Riemann, Theor. der Ab. Funkt, Art. 6) der Kurve A, von denen ein Zweig der einen, einer der anderen Teilkurve angehört. Daher (siehe F. Enriques, Sulla propr. caratt. etc., Rend. Ist. Bol. 1904, 11. Dec.) muß beim Zerfallen einer ebenen Kurve sich aus dem wesentlichen Teiler der Diskriminante mindestens ein Doppelfaktor ausscheiden und in den außerwesentlichen Teiler übergehen. Nach dem Zerfallen in zwei Teilkurven wird also die Kurve A mindestens einen Doppelpunkt mehr besitzen als sie vorher hatte, der dann gegenseitiger Schnittpunkt der Teilkurven ist.

Wenn nun eine Raumkurve durch Ausartung in zwei Teilkurven zerfällt, so treffen sich diese somit in mindestens noch einem Punkt.

3.

Weil die Funktion Ω hinsichtlich λ, μ in Linearfaktoren zerfällt, so sind die als Koeffizienten in den $m+1$ Ternärformen $A, B, C, \cdots$ auftretenden $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Binärformen $a, b, c, \cdots$ durch gewisse Relationen miteinander verknüpft. Denn sie lassen sich alle mit Hilfe von a_k als symmetrische Funktionen der m Paare von Wurzeln

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \cdots;\ x_m, y_m$$

der Gleichungen $A = 0$, $Y = 0$ in folgender Weise darstellen

$$a_{k+1} = -a_k \Sigma x_i; \quad b_{k+1} = -a_k \Sigma y_i;$$
$$a_{k+2} = a_k \Sigma x_i x_k; \quad b_{k+2} = a_k \Sigma x_i y_i; \quad c_{k+2} = a_k \Sigma y_i y_k;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In der Tat kann man die Ternärformen $C, D, \cdots$ vermöge der Gleichungen (6c), (6d), $\cdots$, (6q) des Art. 1 rational durch die Koeffizienten der beiden

$$A \equiv a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \cdots + a_n,$$
$$B \equiv \qquad b_{k+1} x^{m-1} + \cdots + b_n$$

ausdrücken, nachdem man y aus (Art. 1)

$$A'(x)\, y + B = 0 \tag{6b}$$

berechnet und in (6c), (6d), $\cdots$ eingesetzt hat. Damit jedoch $C, D, \cdots$ *ganze* Funktionen von x, z, t werden, müssen zwischen den Koeffizienten der Formen A, B noch gewisse Beziehungen bestehen, die so beschaffen sind, daß, wenn man x aus (6b) und $A = 0$ eliminiert, die sich für y ergebende Gleichung von der Form (6q):

$$Y \equiv a_k y^m + b_{k+1} y^{m-1} + \cdots + q_n = 0,$$

ist, daß also der Koeffizient von y^m mit dem von x^m in A übereinstimmt. Man wird sogleich sehen, daß die Erfüllung dieser Forderung auch hinreicht, um $C, D, \cdots$ zu ganzen Funktionen zu machen.

Sei

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \cdots + a_n$$

eine reduktibele oder irreduktibele ganze homogene Funktion von x, z, t, die wir in der Folge, eben so wie Y, der Einfachheit wegen aus lauter verschiedenen Faktoren zusammengesetzt und vorerst primitiv, d. h. ohne einen allen Koeffizienten a_k, a_{k+1}, $\cdots$, a_n gemeinsamen Teiler annehmen wollen. Dann bestimmt sich aus der Gleichung

$$A = 0$$

oder aus ihren irreduktibelen Bestandteilen $\frac{x}{t}$ als algebraische Funktion von $\frac{z}{t}$. Nimmt man hierzu die Ternärform B so an (wie dies zu machen ist, wird in Art. 6 gezeigt werden), daß durch Elimination von x aus $A = 0$ und aus

$$y = -\frac{B}{A'},$$

wo $A' = \frac{\partial A}{\partial x}$ ist, eine Gleichung $Y = 0$ mit $a_k y^m$ als höchstem Glied entsteht, so ist in einer über der komplexen Ebene $\frac{z}{t}$ ausgebreiteten (zerfallenden oder nicht zerfallenden) Riemannschen Fläche die algebraische Funktion $\frac{y}{t}$ von $\frac{z}{t}$ ebenso verzweigt wie $\frac{x}{t}$ und mit $\frac{x}{t}$ *gleichunendlich* in dem Sinne, daß beide Funktionen dieselben Pole besitzen. Denn man erhält die n Pole von $\frac{x}{t}$, indem man $t = 0$ in $A = 0$ einsetzt. Es ergeben sich k derselben aus $z = 0$, $t = 0$ in Verbindung mit $a_k = 0$ (zur Bestimmung der k Verhältnisse $\frac{z}{t}$); die m übrigen aus $t = 0$, $z \neq 0$. Eben dieselben n Pole liefert aber jene Gleichung $Y = 0$ für die Funktion $\frac{y}{t}$.

Damit also Y die angegebene Form habe, *ist der Zähler B in dem Ausdruck*

$$\frac{y}{t} = -\frac{B}{tA'}$$

so zu bestimmen, daß die Funktion $\frac{y}{t}$ wie $\frac{x}{t}$ unendlich wird. Wir nehmen an, dies sei geschehen. Mit $\frac{x}{t}$ und $\frac{y}{t}$ gleichverzweigt und gleichunendlich ist aber dann auch die Funktion*)

$$\frac{\omega}{t} = \frac{\lambda x + \mu y}{t}.$$

Eliminiert man also x und y aus dieser Gleichung und den beiden

*) Dies gilt auch von der noch allgemeineren Funktion $\frac{\omega + \tau_1}{t}$, wo τ_1 eine lineare Binärform ist.

$$A = 0, \qquad A'y + B = 0,$$

so wird in dem Eliminationsergebnis $\Omega = 0$ die ganze Funktion Ω von ω, z, t gleichfalls mit einem Glied $a_k \omega^m$ beginnen müssen, und weil $\Omega = 0$ auch in den Wurzelpaaren x_i, y_i mit der Gleichung (5a) des Art. 1 übereinstimmt, muß $\Omega = 0$ mit dieser und also mit (5) identisch sein. In den Koeffizienten von μ^2, μ^3, $\cdots$ treten dann aber nur ganze Funktionen von z, t, ω auf; also sind die C, D, $\cdots$ Ternärformen in x, z, t; w. z. b. w.

Die ebenen Kurven, die durch die Gleichungen

$$A(x, z, t) = 0; \qquad Y(y, z, t) = 0; \qquad \Omega(\omega, z, t) = 0$$

dargestellt werden, entsprechen sich wegen der beiden Monoidgleichungen, die in dem System (6) des Art. 1 auftreten und nicht identisch verschwinden können, wenn A, Y keine Doppelfaktoren besitzen, ein-eindeutig. Sie haben also, auch hinsichtlich der Teilkurven, in die sie etwa zerfallen, dasselbe Geschlecht.

Da die algebraischen Funktionen $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ für die n Punkte der Kurve A, in denen sie von $t = 0$ getroffen wird, einfach unendlich werden, so müssen sie, nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie, auch für n Punkte von A verschwinden, ebenso wie jede lineare Funktion von $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ mit konstanten Koeffizienten. Ferner verschwindet jede ganze Funktion q^{ter} Ordnung dieser Größen für qn Punkte von A. Daraus folgt der bekannte Satz, daß eine Raumkurve n^{ter} Ordnung von jeder Ebene in n Punkten, von jeder Fläche q^{ter} Ordnung in qn Punkten getroffen wird.

4.

Zerfällt die Form Ω in Formen niedrigerer Ordnung hinsichtlich ω, so zerfällt zugleich mit sämtlichen Kegeln der Schar die Raumkurve selbst, während die Monoide und die Flächen (6c), (6d), $\cdots$ (Art. 1) nicht zerfallen. Denn vergleicht man, wenn etwa Ω in zwei Faktoren zerfällt, in der Identität

$$\Omega = \overline{\Omega}\,\overline{\overline{\Omega}},$$

wo die Striche die Teilkurven andeuten, die Koeffizienten der Potenzprodukte λ, μ miteinander, so erhält man zwar

$$A = \overline{A}\,\overline{\overline{A}}; \qquad Y = \overline{Y}\,\overline{\overline{Y}};$$

aber:

$$A'y + B = (\overline{A}'y + \overline{B})\,\overline{\overline{A}} + (\overline{\overline{A}}'y + \overline{\overline{B}})\,\overline{A}; \text{ usw.}$$

daher

$$y = -\frac{\overline{B}\,\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}\,\overline{A}}{\overline{A}'\,\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}'\,\overline{A}}.$$

Umgekehrt folgt aus dem rationalen Zerfallen von A allein hinsichtlich der Variabelen x das Zerfallen von Ω hinsichtlich ω.

Man kann den allgemeinen Beweis dieser Behauptung auf den für den Sonderfall

$$a_k = t^k$$

zurückführen, wo dann die Größen $\frac{\omega}{t}$, $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ *ganze* algebraische Funktionen von $\frac{z}{t}$ sind. Zerfällt nun die Ternärform A in die irreduktibeln Faktoren

$$A = \overline{A}\,\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{\overline{A}}}\cdots,$$

für welche dann auch (in verständlicher Bezeichnung)

$$a_{\overline{k}} = t^{\overline{k}};\ a_{\overline{\overline{k}}} = t^{\overline{\overline{k}}};\ \cdots;\ \overline{k} + \overline{\overline{k}} + \cdots = k$$

ist, so zerfällt Ω in derselben Weise. Denn setzt man $t = 1$, und genügt die Funktion x_i z. B. der Teilgleichung $\overline{A} = 0$ (vom Grade $\overline{n}$ in x und z), so ist x_i eine ganze algebraische Funktion von z, und

$$\omega_i = \left[\lambda x_i - \mu \frac{B}{A'}\right]_{x = x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \overline{n})$$

eine rationale Funktion*) von z, x_i, die als ganze algebraische Funktion von z nur für $z = \infty$ unendlich wird. Bildet man nun die zu ω_i konjugierten Werte $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{\overline{n}}$, so ist das Produkt

$$\overline{\Omega} = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_n),$$

als eine in z rationale und zugleich ganze algebraische Funktion von z, eine rationale ganze Funktion von z (vgl. Kronecker, Über die Diskriminante, J. f. Math. 91, S. 306). Daher besitzt Ω den in z ganzen rationalen Faktor $\overline{\Omega}$, der in ω vom Grad $\overline{n}$, wie A in x ist, w. z. b. w.

Ist nun der Faktor a_k von x^m in A eine ganze Funktion k^{ten} $(k > 0)$ Grades von z (für $t = 1$), und sind die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$, $\cdots$ bezw. $a_{\overline{k}}$, $a_{\overline{\overline{k}}}$, $\cdots$, so daß

$$a_k = a_k\, a_{\overline{k}} \cdots$$

ist, so führt man diesen Fall auf den vorigen dadurch zurück, daß man statt x eine neue Veränderliche

$$u = a_k x$$

einsetzt. Dann geht die Identität

$$A = \overline{A}\,\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{\overline{A}}}\cdots$$

---

*) Die Annahme, daß $y = -\frac{B}{A'}$ eindeutig bestimmbar sei, setzt voraus, daß nicht zwei von den Funktionen $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$, $\cdots$ einander gleich sind.

nach Multiplikation mit a_k^{m-1} über in

$$a_k^{m-1} A = \left(a_k^{m-1} \cdot \frac{a_k}{a_{\bar{k}}} A\right)\left(a_k^{\bar{m}-1} \cdot \frac{a_k}{a_{\bar{k}}} A\right) \cdots,$$

wo

$$m = \bar{m} + \bar{\bar{m}} + \cdots$$

ist, oder in

$$u^m + u^{m-1} a_{k+1} a_k + \cdots = (u^{\bar{m}} + u^{\bar{m}-1} a_{\bar{k}+1} a_{\bar{k}} + \cdots)(u^{\bar{\bar{m}}} + u^{\bar{\bar{m}}-1} a_{\bar{\bar{k}}+1} a_{\bar{\bar{k}}} + \cdots) \cdots$$

wo die u nun wieder ganze Funktionen von z sind, auf die der frühere Satz anwendbar ist.

In geometrischer Fassung lautet der hiermit bewiesene Satz:

Zerfällt die Projektion einer Raumkurve, von einem Raumpunkt aus genommen, durch den die Kurve nicht geht), in nur verschiedene Kurven niedrigerer Ordnung, so zerfällt die Raumkurve selbst in solche je von derselben Ordnung.*

5.

Man kann nun von der Gleichung für $\frac{x}{t}$

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

allein ausgehen, und eine Funktion $\frac{y}{t}$ durch passende Wahl der Ternärform n^{ter} Ordnung B in

$$\frac{y}{t} = -\frac{B}{t A'} \tag{2}$$

so zu bestimmen verlangen, daß sie die gleichen Pole wie $\frac{x}{t}$ hat.

Bezüglich der Form A wollen wir zu den früheren Forderungen, I. daß sie keine Doppelfaktoren besitze und primitiv sei, die weiteren zufügen, II. daß $A = 0$ nur vielfache Punkte mit getrennten Tangenten besitze, daß also insbesondere a_k nur verschiedene Linearfaktoren habe, und III. daß der Verzweigungsteiler der Diskriminante mit dem außerwesentlichen, namentlich also mit a_k, keinen Faktor gemeinsam habe. Von diesen vereinfachenden Annahmen werden wir bloß die bezüglich der Primitivität von A später fallen lassen.

Damit die rechte Seite von (2) bloß für die n Stellen $t = 0$, $A = 0$ unendlich wird, muß B für alle diejenigen Stellen von $A = 0$ verschwinden, für die $A' = 0$ ist. Soll namentlich in einem i-fachen Punkte $z = \alpha t$, $x = \beta t$ der Kurve $A = 0$ $\frac{B}{A'}$ einen endlichen Wert annehmen, so muß jede von den i Entwicklungen von $x - \beta t$ nach aufsteigenden Potenzen

*) Diese Beschränkung folgt aus der Annahme, daß die Funktionen A und Y primitiv sind (Art 3).

von $z - \alpha t$, in $\frac{B}{tA'}$ eingesetzt, einen endlichen Wert ergeben. In einem i-fachen Punkt von A, wo die Entwicklung von A nach aufsteigenden Potenzen von $z - \alpha t$, $x - \beta t$ mit Gliedern i^{ter} Dimension beginnt, hat $A' = 0$ einen $(i-1)$-fachen Punkt, weil nach den Annahmen II, III der Differentialquotient von A nach x mit Gliedern $(i-1)^{\text{ter}}$ Dimensionen beginnen muß, außer für die Stelle $z = t = 0$, für die $A'(x)$ von höherer Ordnung verschwindet. Demnach wird der Nenner tA' von $\frac{y}{t}$ für jede Entwicklung wie $(z-\alpha t)^{i-1}$ verschwinden, und da das gleiche mit dem Zähler eintreten soll, muß auch B dort einen $(i-1)$-fachen Punkt besitzen, also sich adjungiert verhalten. Dies gilt außer für die im Endlichen gelegenen i-fachen Punkte von A auch für diejenigen Stellen $A = 0$, $t = 0$, für die $z \neq 0$ ist.

Die Stelle $z = t = 0$ verlangt eine besondere Betrachtung, aus der hervorgehen wird, daß B hinsichtlich x bloß bis zum $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad ansteigt. Sei B von der Form

$$B = b_{k+1-\lambda} x^{m-1+\lambda} + b_{k+2-\lambda} x^{m-2+\lambda} + \cdots + b_n,$$

wo λ eine positive Zahl ist, und $b_{k+1-\lambda}$ nicht identisch verschwinden möge. Ist α_1 einer der Linearfaktoren von a_k, so wird, weil identisch

$$xA' = mA - A_1$$

ist, wo

$$A_1 = a_{k+1} x^{m-1} + 2a_{k+2} x^{m-2} + \cdots + ma_n$$

gesetzt ist, für $z = t = 0$, $\alpha_1 = 0$ (was durch eine beigefügte Null bezeichnet werden möge), $A = 0$:

$$\frac{y}{t} = -\frac{x}{t}\left[\frac{B}{A_1}\right]^0.$$

Der eckige Klammerausdruck wird für $\lambda = 0$ endlich sein, wenn keine der Formen b_{k+1}, a_{k+1} den Faktor α_1 besitzt. Er kann auch für $\lambda > 0$ endlich sein, wenn $b_{k+1-\lambda}$ den Faktor α_1, also, weil a_k lauter verschiedene Faktoren besitzt, den Faktor a_k hat. Dann aber läßt sich der Grad von B in x mit Hilfe von $A = 0$ zunächst um 1, und indem man so weiterschließt, auf den $(m-1)^{\text{ten}}$ herabdrücken.

Man hat also, wenn $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ gleiche Pole haben,

$$B = b_{k+1} x^{m-1} + b_{k+2} x^{m-2} + \cdots + b_n; \tag{3}$$

und zwar ist

$$\left[\frac{y}{x}\right]^0 = \left[\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right]^0,$$

wenn weder a_{k+1} noch b_{k+1} einen Teiler mit a_k gemeinsam haben. *Hat aber eine dieser Formen einen solchen mit a_k gemeinsam, so muß ihn auch die andere haben, wenn $\frac{y}{t}$ und $\frac{x}{t}$ gleichunendlich sind.*

Der Fall verschiedener Pole wird in Art. 10 behandelt werden.

Die Eigenschaften der Form B, vermöge deren $\frac{y}{t}$ und $\frac{x}{t}$ gleichunendlich werden, sind also die folgenden:

1. In jedem i-fachen Punkt $(i>1)$ der Kurve A hat B einen $(i-1)$-fachen Punkt.
2. An allen Stellen, wo A' einfach verschwindet, verschwindet auch B.
3. Ein etwa gemeinsamer Teiler von a_{k+1} und a_k ist auch solcher von b_{k+1}.

Ich werde nun zeigen, wie man eine Form B von den angegebenen Eigenschaften durch einen einzigen Prozeß (entweder unmittelbar oder nach einer leichten Abänderung) gewinnt.

6.

Von dem außerwesentlichen Teiler der Diskriminante (Art. 2) D_A von A läßt sich ein Faktor Δ (vom Grade δ in z, t) abspalten, der (immer abgesehen von der Stelle $z=t=0$) in jedem Doppelpunkt der Kurve A einfach, in jedem dreifachen doppelt, in jedem i-fachen $(i-1)$-fach verschwindet, der sich also in den im Endlichen gelegenen singulären Stellen von A zu A adjungiert verhält. Dieser Faktor ist rational in z, t darstellbar.

Wir bilden das Produkt $\Delta\mathsf{B}$, wo

$$\mathsf{B} = \beta_{k+1}x^{m-1} + \beta_{k+2}x^{m-2} + \cdots + \beta_n$$

ist. Dasselbe läßt sich nach einem bekannten Satze von M. Noether (Math. Ann. 6) in die Gestalt bringen

$$\Delta\mathsf{B} = MA + NA', \tag{1}$$

(wo M, N Ternärformen von bezw. der δ^{ten} und $(\delta+1)^{\text{ten}}$ Dimension sind), sofern das Produkt $\Delta\mathsf{B}$ in den Schnittpunkten der Kurven A, A', deren Gleichungen

$$A=0; \quad A'(x)=A'=0$$

sind, die folgenden Bedingungen erfüllt:

In jedem i-fachen Punkt $(i>1)$ $x=\alpha t$, $z=\beta t$ von A, wo A' einen k-fachen Punkt und einen Schnittpunkt mit A von nicht höherer Multiplizität als ik besitzt, stimmt die Entwicklung von $\Delta\mathsf{B}$ nach aufsteigenden Potenzen von $z-\alpha t$, $x-\beta t$ hinsichtlich aller Glieder bis zur $(i+k-2)^{\text{ten}}$ Dimension einschließlich mit der rechten Seite überein.

Weil k infolge einer früheren Bemerkung gleich $i-1$ ist, so muß

1′. B in den Doppelpunkten $(i=2)$ von A, ebenso wie Δ, nur einfach verschwinden, dagegen muß sich B in den Punkten höherer Viel-

fachheit der Kurve A nicht notwendig adjungiert verhalten, wenn auch umgekehrt jede adjungierte Funktion B der Identität (1) genügt.

2′. In den einfachen Schnittpunkten von A und A', für die Δ nicht verschwindet, muß B verschwinden.

3′. Das Verhalten der Form B an der Stelle $z = t = 0$ entnimmt man einer Umformung der Identität (1), die in der Einführung der Form

$$A_1 = a_{k+1}x^{m-1} + 2a_{k+2}x^{m-2} + \cdots + ma_n \equiv mA - xA'$$

an Stelle von A besteht und so lautet:

(1a) $$\Delta\mathsf{B} = PA_1 + QA',$$

wo nun die Formen

$$P = -\frac{1}{m}M, \qquad Q = \frac{1}{m}(mN + xM)$$

wieder bezw. von den Graden δ und $\delta + 1$ sind. Sind nämlich a_k und a_{k+1} teilerfremd, so ergibt die Forderung 3 (Art. 5), welche (1a) der Punkt $z = t = 0$ stellt, für β_{k+1} keine Bedingung, wenn der Grad von $\Delta\mathsf{B}$

$$\delta + (k+1) > k + (k+1) - 2, \quad \text{also} \quad \delta > k - 2$$

ist. Tritt aber in a_{k+1} ein Linearfaktor auf, den auch a_k hat, so müssen die beiderseitigen Entwicklungen nach aufsteigenden Dimensionen von z, t in mehr als $2k$ Gliedern übereinstimmen. Dann muß entweder auch β_{k+1} diesen Faktor haben, oder die Grenze für δ sich erhöhen.

Schreibt man nun dasjenige System von Gleichungen an, das die Identität (1) ergibt, wenn man die Ternärformen B, M, N mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt (bez. der Formen N, M vergl. Art. 7) und die Koeffizienten der Potenzen von x beiderseits gleichsetzt (nötigenfalls sie auch nach denen von z, t auflöst), so *bilden diese Gleichungen ein lineares System für jene Koeffizienten als Unbekannte*, dessen Determinante nicht verschwinden kann, weil, wie sich sogleich ergeben wird, eine Form B in jedem Fall existiert.

In den auf diese Weise simultan erhaltenen Formen B, M, N wird eine Anzahl von Koeffizienten unbestimmt bleiben. Die Form B erfüllt dann die Bedingungen 1′., 2′., 3′.

Diese Bedingungen für B stimmen aber fast genau mit den oben (Art. 5) für die Form B im Zähler des Bruches $\frac{y}{t}$ gestellten 1., 2., 3. überein. In der Tat, mit 2. fällt 2′. zusammen. Das in 3. geforderte Verhalten in $z = t = 0$ stimmt mit dem von 3′. überein, wenn a_k und a_{k+1} teilerfremd sind. Ist dies nicht der Fall, so muß b_{k+1} den gemeinsamen Faktor gleichfalls besitzen; β_{k+1} nur dann, wenn $\delta \leqq k - 2$ ist. Daher sind für $\delta > k - 2$ die geforderten Funktionen B unter den von der Identität (1) gelieferten B unterbegriffen. Der Fall $\delta \leqq k - 2$ wird

in Art. 7 besonders behandelt werden. Endlich deckt sich die Forderung 1. für B mit 1'. für B in dem Falle, daß A nur Doppelpunkte besitzt. Treten aber höhere vielfache Punkte auf, so umfaßt wieder die Vollschar der Formen B diejenige der B als Teilschar, die dann allein zu verwenden ist.

*Daher genügt in jedem Falle die Form $B = \mathsf{B}$ der Identität**)

$$\Delta\mathsf{B} = MA + NA', \tag{1}$$

und zwar ergibt sich aus ihr $\mathsf{B} = B$ ohne weiteres, wenn:

1. die Kurve A, außer an der Stelle $z = t = 0$, nur Doppelpunkte hat,
2. a_k und a_{k+1} teilerfremd sind,
3. die Zahl δ der Doppelpunkte von A größer als $k - 2$ ist.

In allen anderen Fällen ist aus der linearen Schar der Formen B die der B nachträglich auszuscheiden durch die Forderungen 1. und 3. des Art. 5. Unter den Lösungen der Identität (1) befindet sich eine triviale, die unter Umständen die einzig mögliche ist, nämlich die:

$$M = m\Delta\sigma; \quad N = \Delta(-\sigma x + \tau_1); \quad B = A_1(x)\sigma + A'(x)\tau_1,$$

wo σ eine Konstante, τ_1 eine lineare Binärform in z, t ist. Überhaupt, wenn B, M, N ein Lösungssystem der Identität ist, so ist ein solches auch

$$\varrho B + A_1\sigma + A'\tau_1; \quad \varrho M + n\Delta\sigma; \quad \varrho N + \Delta(-\sigma x + \tau_1),$$

wo ϱ wieder eine Konstante ist.

Die Form B ist also immer nur bis auf vier linear und homogen auftretende willkürliche Konstanten genau bestimmt. Diese entsprechen einer Transformation der Ordinate y in $y + \sigma x + \tau_1$, also einer Verschiebung der Ebene $y = 0$ des Koordinatentetraeders, oder auch einer projektiven Veränderung der Kurve.

Damit nun eine eigentliche Funktion B noch möglich sei, muß, nachdem die Forderungen 1., 2., 3. erfüllt sind, die Anzahl der in B noch verfügbaren linear auftretenden Konstanten mindestens gleich vier sein.

---

*) Nach dem gleichen Verfahren der simultanen Bestimmung zweier Lösungen läßt sich auch der Integrand eines Abelschen Integrals 1. Gattung und überhaupt jede zu der Kurve A adjungierte Kurve $\Psi(x, z, t) = 0$ von der Ordnung $s \geqq n - 3$, für $k = 0$, mit Hilfe der Identität ermitteln

$$V(z, t)\,\Delta(z, t)\,\Psi(x, z, t) = G(x, z, t) \cdot A + H(x, z, t) \cdot A',$$

wo V (vom Grad v) der Verzweigungsfaktor der Diskriminante von A ist, Δ dieselbe Bedeutung hat, wie im Text, und G, H Ternärformen von den Dimensionen $v + \delta + s - n$, $v + \delta + s - n + 1$ sind. Bezüglich des Verhaltens von Ψ in den i-fachen ($i > 2$) Punkten von A ist ein ähnlicher Vorbehalt wie im Text bezüglich des von B zu machen.

Bekanntlich ist die Anzahl der in einer algebraischen Funktion $\frac{y}{t}$, die wie $\frac{x}{t}$ verzweigt ist, linear und homogen auftretenden unbestimmten Konstanten, wenn n die Anzahl ihrer Pole, p das Geschlecht irgend einer durch die Gleichung $A = 0$ dargestellten nicht zerfallenden Kurve n^{ter} Ordnung ist, gleich oder größer als $n - p + 1$. Für $p \geqq n - 2$ existieren, sofern die Kurve A nicht einer sogleich anzugebenden Bedingung genügt, keine eigentlichen Raumkurven n^{ter} Ordnung mehr, deren Projektion A ist, und die erwähnte triviale Lösung B liefert dann eine ebene, mit A projektiv verwandte Kurve, deren Gleichung sich aus

$$y = \sigma x + \tau_1; \quad \omega = \lambda x + \mu y; \quad A = 0$$

ergibt. Doch wird in diesem Falle die Anzahl der in B enthaltenen Konstanten wieder größer als $n - p + 1$, wenn*) die h Doppelpunkte von A für eine adjungierte Kurve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch sie geht, nur $h - 1$ Bedingungen darstellen. Daher werden für $p \geqq n - 2$ noch ∞^4 mit $\frac{x}{t}$ gleichunendliche Funktionen $\frac{y}{t}$ existieren, durch die dann wieder eigentliche Raumkurven definiert sind, wenn die Projektion A jener Forderung entsprechend gewählt wird.

Ein Eingehen auf diese Fälle würde zur Voraussetzung haben, daß man die Form der Gleichung einer ebenen Kurve von gegebenem Geschlecht angeben kann. Dies ist jedoch nur in Einzelfällen möglich. Jedenfalls sind aber auch sie in unserer Darstellung einbegriffen.

7.

Aus der Identität (1) des vorigen Art. ergibt sich eine zweite Darstellung der Funktion y, die den Vorzug hat, daß der Nenner eine Binärform (in z, t) ist. Weil nämlich B der Gleichung genügt

$$\Delta B = MA + NA', \tag{1}$$

so ist

$$y = -\frac{B}{A'} \tag{2}$$

für $A = 0$ auch in der Form darstellbar

$$y = -\frac{N}{\Delta}, \tag{3}$$

wo der Nenner Δ der im Art. 6 angegebene Faktor des außerwesentlichen Teilers der Diskriminante D_A, der Zähler N von der Dimension $\delta + 1$

*) Ich entnehme dies der in der Einleitung erwähnten Abhandlung von M. Noether, § 3.

ist. Auch für die Form N gilt, wie für B, gegenüber der aus (1) sich ergebenden, daß sie in einem i-fachen Punkt, für $i > 2$, von A in eine adjungiert sich verhaltende zu verwandeln ist. Nach Erfüllung dieser Forderung genügen B und N wieder der Identität (1).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß N hinsichtlich x bloß bis zum Grad $m-1$ ansteigt, wenn in

$$A = a_k x^m + a_{k+1} x^{m-1} + \cdots + a_n \tag{4}$$

x bis zum Grad m ansteigt. Denn wenn in

$$\frac{y}{t} = \frac{N}{t\Delta}$$

$$N = n_{\delta+1} + n_\delta x + \cdots + n_0 x^{\delta+1}$$

gesetzt wird, so muß, damit $\frac{y}{t}$ an der Stelle $z = t = 0$, $\alpha_1 = 0$ wie $\frac{x}{t}$ unendlich wird (α_1 ist wieder ein Faktor von a_k, und zunächst $k > 0$), der aus dem i^{ten} Glied von N gebildete Quotient

$$\frac{n_i x^{\delta-i+1}}{\Delta t} = \frac{x}{t}\,\frac{x^{\delta-i} n_i}{\Delta},$$

der an dieser Stelle unendlich wird wie die $(\delta-i+1)^{\text{te}}$ Potenz von $\frac{x}{t}$, falls n_i nicht den Faktor α_1 besitzt, identisch verschwinden, wenn $\delta > i$ ist.

Daher steigt entweder N in x bloß bis zur ersten Potenz an, oder besitzt wenigstens der Koeffizient der höchsten Potenz den Faktor α_1, und also den Faktor a_k.*) Im letzteren Fall kann man, falls der Grad von N in x höher als $m-1$ ist, durch Abziehen der Form A, mit passend gewählten Faktoren (die dann in M eingehen) multipliziert, diesen Grad folgeweise auf den $(m-1)^{\text{ten}}$ herabdrücken. Diese Bemerkung, sowie das Folgende, gilt auch für den Fall $k = 0$.

Die so vereinfachte Form N — der dann in der Identität (1) eine Form M vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grad in x entsprechen wird —

$$N = n_{\delta-m+2} x^{m-1} + n_{\delta-m+3} x^{m-2} + \cdots + n_{\delta+1},$$

wo $n_{\delta-m+2}$ für $m > 2$ wieder den Faktor a_k hat, läßt sich noch in eine andere Gestalt bringen. Man berechne $a_k x^{m-1}$ aus der Gleichung:

$$f_{n-1} = a_k x^{m-1} + a_{k+1} x^{m-2} + \cdots + a_{n-1} = -\frac{a_n}{x},$$

wo f_{n-1} für $z = t = 0$ in derselben Ordnung wie a_n verschwindet. Ist dann

$$\delta - m + 2 \geqq k, \quad \text{oder} \quad \delta \geqq n-2,$$

so nimmt N die Gestalt an

$$p_{\delta-n+2} f_{n-1} + n'_{\delta-n+3} x^{m-2} + \cdots + n'_{\delta+1},$$

*) Dieser Schluß setzt zunächst bloß verschiedene Linearfaktoren von a_k voraus. Man überzeugt sich aber leicht, daß er auch für gleiche gilt.

wo nun das erste Glied, durch $t\Delta$ dividiert, an jener Stelle überhaupt nicht unendlich wird. Weil aber nun der Koeffizient des zweiten Gliedes den Faktor a_k besitzen wird, wenn $\delta \geqq n-3$ und $m > 3$ ist, so kann man wieder x^{m-2} ersetzen durch

$$f_{n-2} = a_k x^{m-2} + a_{k+1} x^{m-3} + \cdots + a_{n-2} = -\frac{1}{x^2}(a_{n-1}x + a_n),$$

und indem man so fortfährt, erhält man schließlich für $\delta \geqq k+1$:

(5) $$N = p_{\delta-n+2} f_{n-1} + p_{\delta-n+3} f_{n-2} + \cdots + p_{\delta-k-1} f_{k+2} - p_\delta x + p_{\delta+1},$$

wo nun die f die wohlbekannten Funktionen sind (s. z. B. Webers Algebra, Bd. I, Art. 74):

$$f_{n-i} = a_k x^{m-i} + a_{k+1} x^{m-i-1} + \cdots + a_{n-i} = -\frac{1}{x^i}(a_{n-i+1} x^{i-1} + \cdots + a_n),$$

und ersichtlich f_{n-i} für $z = t = 0$ in der Ordnung von a_{n-i+1} verschwindet. Die Binärformen p sind so zu bestimmen, daß N an sämtlichen Nullstellen von Δ in derselben Ordnung wie Δ verschwindet.

Ist $\delta < k+1$, so reduziert sich N auf

(5a) $$N = -p_\delta x + p_{\delta+1}.$$

Ebenso wie N lassen sich auch die Formen M und

$$F \equiv MA + NA'$$

in den Funktionen f_i und den analog für die Ableitungen $A', A'', \cdots$ nach x gebildeten Größen linear ausdrücken. Setzt man nämlich

$$f_i' = m a_k x^{i-k} + (m-1) a_{k+1} x^{i-k-1} + \cdots + (m-i+k) a_i,$$

wo

$$m \geqq i \geqq k+2$$

ist, und nimmt man an

(6) $$-M = p_{\delta-n+2} f'_{n-2} + p_{\delta-n+3} f'_{n-3} + \cdots + p_{\delta-k-1} f'_{k+1} - n p_\delta,$$

wo die p die bereits in N eingeführten Binärformen sind, so wird in

$$F = MA + NA' = p_{\delta-n+2} F_{2n-2} + p_{\delta-n+3} F_{2n-3} + \cdots + p_{\delta-k-1} F_{n+k+1} + p_\delta A_1 + p_{\delta+1} A'$$

der Koeffizient F_{n+i-1} von $p_{\delta-i+1}$ (wo i von $n-1$ bis $k+2$ geht), wenn man $A = f_n$, $A' = f'_{n-1}$ setzt,

$$F_{n+i-1} = -f_n f'_{i-1} + f'_{n-1} f_i,$$

sein, oder, wie man nach einer kleinen Rechnung findet, wenn

(7) $$f_{l,s} = l a_k x^{s-k} + (l-1) a_{k+1} x^{s-k-1} + \cdots + (l-s+k) a_s$$

gesetzt wird:

(7a) $$F_{n+i-1} = a_i (n-i) f_{n-1} - (x^{m-i-2} a_{i+k+1} f_{i+1,i} + x^{m-i-3} a_{i+k+2} f_{i+2,i} + \cdots + a_{n-1} f_{m-1,i}) - a_n f_{m,i-1},$$

wo der Klammerausdruck Null zu setzen ist, wenn $m-i-2$ einen negativen Wert hat. Die Koeffizienten F_{n+i-1} sind quadratisch in den

Koeffizienten a von A und steigen ersichtlich in bezug auf x bloß bis zum Grad $m-1$ an. Dies gilt demnach auch von der Form

$$F = MA + NA'.$$

Durch Einführung der Funktionen $f_{k+2}, f_{k+3}, \cdots, f_{n-1}$ an Stelle der Potenzen $x^2, x^3, \cdots, x^{m-1}$ wurde die Allgemeinheit der Form N nicht beeinträchtigt, und da M so gewählt wurde, daß F dieselbe Mannigfaltigkeit (Zahl der homogen und linear eintretenden unbestimmten Koeffizienten) besitzt wie N und hinsichtlich x nur bis zum Grad $m-1$ ansteigt, so geht die Identität (1) über in

$$\Delta B = F = \sum_{i=n-1}^{k+2} p_{\delta-i+1} F_{n+i-1} + p_\delta A_1 + p_{\delta+1} A', \tag{8}$$

wo die F_{n+i-1} die durch (7), (7a) definierten Funktionen sind, und wo nun bloß noch die Binärformen p so zu bestimmen sind, daß der Faktor Δ sich aus den Koeffizienten sämtlicher Potenzen $x^{m-1}, x^{m-2}, \cdots, x, 1$ in F aussondert. *Die Bildungen* (5), (6) *und* (8) *für* N, M *und* ΔB *erfüllen somit die Identität* (1) für alle Werte der Koeffizienten a von A und ersetzen also diese durch *eine independente Darstellung der Formen* N *und* ΔB.

Hat man Δ aus den Koeffizienten von F ausgesondert, und hat A bloß Doppelpunkte, so liegen in den beiden Ausdrücken B und N die Zähler der Funktion $\frac{y}{t}$ fertig gebildet vor. Hat aber A i-fache Punkte, für die $i > 2$ ist, so sind noch, wie in Art. 6 angegeben, die adjungierten Kurven auszuwählen.

Die gleichunendlichen Funktionen $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ gehen in *ganze algebraische Funktionen* über, wenn $k = 0$ ist. Durch das Vorstehende ist also die Aufgabe gelöst, zu einer durch die Gleichung $A = 0$ bestimmten algebraischen Funktion $\frac{x}{t}$ die allgemeinste ebenso verzweigte ganze Funktion $\frac{\omega}{t}$ zu finden, die in derselben Ordnung wie $\frac{x}{t}$ unendlich wird.

8.

Zunächst mögen die vorstehenden Bildungen an einigen Beispielen vorgenommen werden.

1. Für

$$A = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

also $n = m = 3$, $k = 0$, erhält man mit $i = 2$ ((7a) im vor. Artikel):

$$\begin{aligned} F_4 = a_2 f_2 - a_2 f_{3,1} &= a_2(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) - a_3(3a_0 x + 2a_1) \\ &= x^2 a_0 a_2 + x(a_2 a_1 - 3a_0 a_3) + a_2^2 - 2a_1 a_3, \end{aligned}$$

woraus sich

$$F = p_{\delta-1}F_4 + p_\delta A_1 + p_{\delta+1}A' \quad \text{und} \quad N = f_2; \quad -M = f_1' = 3a_0x + 2a_1$$

ergibt. — Nimmt man auf A einen Doppelpunkt an, und setzt etwa

$$a_2 = \varkappa_1 b_1; \qquad a_3 = \varkappa_1^2 c_1,$$

wo immer die Indizes den Grad der bezeichneten Binärform in z, t angeben, so wird $\Delta = \varkappa_1$, und aus F sondert sich der Faktor $\varkappa_1$ aus. Man erhält

$$B = a_0b_1x^2 + (b_1a_1 - 3a_0c_1\varkappa_1)x + \varkappa_1 b_1^2 - 2a_1c_1\varkappa_1,$$
$$N = a_0x^2 + a_1x + \varkappa_1 b_1$$

und demnach die allgemeinste ganze algebraische Funktion dritten Grades von $\frac{z}{t}$, bis auf eine in x, z, t lineare Funktion,

$$\frac{y}{t} = -\frac{B}{A'} = -\frac{N}{\Delta},$$

wodurch, in Verbindung mit $A = 0$, $\omega = \lambda x + \mu y$ die *Raumkurve dritter Ordnung* dargestellt wird.

2. Für

$$A = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

also $n = m = 4$, $k = 0$, erhält man mit $i = 3$ (Art. 7):

$$F_6 = a_3f_3 - a_4f_{4,2} = a_3(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) - a_4(4a_0x^2 + 3a_1x + 2a_2),$$

und mit $i = 2$:

$$F_5 = 2a_2f_3 - a_3f_{3,2} - a_4f_{4,1}$$
$$= 2a_0a_2x^3 + (2a_1a_2 - 3a_0a_3)x^2 + 2(a_2^2 - a_1a_3 - 2a_0a_4)x - (a_2a_3 + 3a_1a_4).$$

Hiermit wird

$$\Delta B = F = p_{\delta-2}F_6 + p_{\delta-1}F_5 + p_\delta x A' + p_{\delta+1}A'.$$

Nimmt man zwei Doppelpunkte ($\delta = 2$) an, indem man etwa

$$a_3 = b_1\varkappa_2, \qquad a_4 = b_0\varkappa_2^2$$

setzt, womit $\Delta = \varkappa_2$,

$$A = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + b_1\varkappa_2 x + b_0\varkappa_2^2 = f_4$$

wird, so sondert sich der Faktor $\Delta = \varkappa_2$ aus F_6, nicht aber aus F_5 aus. Demnach muß $p_{\delta-1} = p_1 \equiv 0$ sein; p_2 und p_3 aber müssen durch $\varkappa_2$ teilbar sein. Hiernach wird, bis auf einen konstanten Faktor und eine mit $\varkappa_2 A'$ multiplizierte lineare Funktion von x, z, t,

$$B = \frac{1}{\varkappa_2}F_6 = a_0b_1x^3 + (a_1b_1 - 4a_0b_0\varkappa_2)x^2 + (a_2b_1 - 3a_1b_0\varkappa_2)x + b_1^2\varkappa_2 - 2a_2b_0\varkappa_2.$$

Die hiermit oder besser mit $N = a_0x^3 + a_2x^2 + a_2x + b_1\varkappa_2$ gebildete, wie $\frac{x}{t}$ verzweigte ganze Funktion, die in vier Punkten Null und unendlich wird, lautet

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{t\varkappa_2}(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + b_1\varkappa_2)$$

oder auch

$$\frac{y}{t} = -\frac{\varkappa_2}{xt}.$$

Eliminiert man x aus

$$A = 0, \quad \omega = \lambda x - \frac{\mu\varkappa_2}{x},$$

so erhält man die Gleichung der *Raumkurve vierter Ordnung vom Geschlecht* 1:

$$\begin{aligned} 0 = \Omega = {} & \omega^4 a_0 + \omega^3[a_1\lambda + b_1 a_0\mu] \\ & + \omega^2[a_2\lambda^2 + (a_1b_1 - 4\varkappa_2 b_0 a_0)\lambda\mu + a_2 b_0 a_0\mu^2] \\ & + \omega[b_1\varkappa_2\lambda^3 + (a_2b_1 - 3\varkappa_2 b_0 a_1)\lambda^2\mu + (a_1a_2b_0 - 3\varkappa_2 a_0 b_1 b_0)\lambda\mu^2 + \varkappa_2 a_1 b_0 a_0^2\mu^3] \\ & + \varkappa_2^2 b_0\lambda^4 + \varkappa_2(b_1^2 - 2a_2b_0)\lambda^3\mu + (a_2^2b_0 + 2\varkappa_2^2 a_0 b_0^2 - 2a_1b_1b_0\varkappa_2)\lambda^2\mu^2 \\ & + \varkappa_2 b_0^2(a_1^2 - 2a_0a_2)\lambda\mu^3 + \varkappa_2^2 b_0^3 a_0^2\mu^4. \end{aligned}$$

Was die Bildung der *Diskriminante* D_Ω von Ω angeht, so stimmt der wesentliche Teiler mit dem der Diskriminante D_A von A überein. Da der außerwesentliche Teiler der letzteren $\varkappa_2^2$ ist, so hat man

$$D_\Omega = \frac{1}{\varkappa_2^2} D_A L^2,$$

wo D_A eine leicht zu bildende Determinante ist. Die Bildung von L ist mit Rechnung verknüpft. Man findet

$$\begin{aligned} L = {} & (\lambda^2 a_0 - \mu^2 b_0)^2((\lambda^2 a_0 + \mu^2 b_0)\varkappa_2 - \lambda\mu a_2) + (\lambda^2 a_0 + \mu^2 b_0)\lambda^2\mu^2 a_1 b_1 \\ & - \lambda^3\mu^3(b_1^2 a_0 + a_1^2 b_0), \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$\lambda\sqrt{a_0} = \varrho; \quad \mu\sqrt{b_0} = \sigma; \quad \frac{a_1}{\sqrt{a_0 b_0}} = \alpha_1; \quad \frac{b_1}{\sqrt{a_0 b_0}} = \beta_1; \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_0 b_0}} = \alpha_2$$

und

$$\frac{b_1^2 a_0 + a_1^2 b_0}{\sqrt{a_0 b_0^3}} = \gamma_2$$

setzt:

$$L = (\varrho^2 - \sigma^2)((\varrho^2 + \sigma^2)\varkappa_2 - \alpha_2\varrho\sigma) + (\varrho^2 + \sigma^2)\varrho^2\sigma^2\alpha_1\beta_1 - \varrho^3\sigma^3\gamma_2.$$

Man kann an diesen Ausdruck die Bedingung für ein *Zerfallen der Raumkurve* Ω anschließen. Setzt man nämlich $\varrho = v\sigma$, wo v eine Konstante ist, in L ein, und verlangt nun, daß L für jeden Wert von $\frac{z}{t}$ verschwinde, so ergibt sich zwischen den Koeffizienten von A die Beziehung:

$$(1) \qquad (1 - v^2)^2((1 + v^2)\varkappa_2 - \alpha_2 v) + (1 + v^2)v\alpha_1\beta_1 - v^3\gamma_2 = 0,$$

vermöge deren sich aus L der Faktor $\lambda\sqrt{a_0}v - \mu\sqrt{b_0}$, der von z, t unabhängig ist, ausscheidet. Er bestimmt einen Punkt der Hauptkante, durch

den unendlich viele Sehnen derselben gehen, und da gleichzeitig sich der Faktor $\lambda\sqrt{a_0} - \mu\sqrt{b_0}v$ aussondert, weil die Gleichung (1) in v eine reziproke ist, so zerfällt, wenn die Relation (1) besteht, die Kurve in zwei Kegelschnitte, deren Ebenen durch die angegebenen Punkte der Hauptkante gehen. Sie schneiden sich in zwei Punkten, weil in

$$L = (\lambda\sqrt{a_0}v - \mu\sqrt{b_0})(\lambda\sqrt{a_0} - \mu\sqrt{b_0}v)\,\Lambda(\lambda, \mu; z, t)$$

der Faktor Λ in z, t vom zweiten Grad ist, was auf nur zwei scheinbare Doppelpunkte schließen läßt. — Das weitere Zerfallen in Gerade, das sich leicht bewirken läßt, übergehen wir hier.

3. Um auch ein Beispiel für die Bildung einer *adjungierten Kurve* zu geben, nehmen wir an:

$$A = x^3 a_1 - 3\lambda\mu a_1 b_2 x + \lambda^3 b_2^2 + \mu^3 a_1^2 b_2 = 0.$$

Die Diskriminante $D_A = a_1^4 b_2^2(\lambda^3 b_2 - \mu^3 a_1)^2$ hat den Verzweigungsteiler $V = a_1^4 b_2^2$ und den außerwesentlichen Teiler $\Delta^2 = (\lambda^3 b_2 - \mu^3 a_1^2)^2$. Zur Bestimmung der adjungierten Kurve Ψ $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung dient (Note zu Art. 6) die Identität

$$V\Delta\Psi = AG + A'H,$$

wo G in x vom ersten, H vom zweiten Grade ist. Man findet, nach Division mit $a_1^4 b_2$, aus

$$b_2(\lambda^3 b_2 - \mu^3 a_1)(\psi_0 x + \psi_1) = A(g_0 x + g_1) + \tfrac{1}{3} A'(h_0 x^2 + h_1 x + h_2)$$

das Lösungssystem:

$$G = x\lambda + \mu^2 a_1,$$
$$H = -x^2\lambda - x\mu a_1 + 2\mu\lambda^2 b_2,$$
$$\Psi = x\lambda - \mu^2 a_1.$$

4. Endlich bestimmen wir als *Beispiel zu dem Fall* $\delta < k+1$ solche auf Flächen zweiter Ordnung gelegene Raumkurven, welche die Erzeugenden der einen Schar i-fach, die der anderen k-fach treffen. A kann dann in der Gestalt angenommen werden

$$A = a_k x^i + b_k x^{i-1}\varkappa_1 + c_k x^{i-2}\varkappa_1^2 + \cdots + q_k \varkappa_1^i,$$

wo, wie immer, $\varkappa_1$, a_k, b_k, $\cdots$ Binärformen in z, t von der Ordnung des Index sind. Für die Raumkurve hat man (5a) Art. 7) zunächst

$$y = -\frac{-p_{i+1}x + p_i}{\varkappa_1^{i-1}}.$$

Weil aber in $x = 0$, $\varkappa_1 = 0$ der Zähler von y ebenso wie der Nenner sich adjungiert verhalten muß, so scheidet der erstere den Faktor $\varkappa_1^{i-2}$ aus, und y nimmt, bis auf eine additive Linearform, die einer projektiven Transformation entspricht, die Form an

$$y = \frac{p_1 x}{\varkappa_1},$$

woraus sich, zugleich mit $A = 0$ und $\omega = \lambda x + \mu y$, die Gleichung der Raumkurve $i + k = n^{\text{ter}}$ Ordnung ergibt:

$$\Omega = a_k \omega^i + b_k \omega^{i-1}(\varkappa_1 \lambda + p_1 \mu) + \cdots + q_k(\varkappa_1 \lambda + p_1 \mu)^i = 0.$$

Haben alle Formen a_k, b_k, $\cdots$, q_k einen Linearfaktor α_1 gemeinsam, so *zerfällt die Raumkurve* in eine in der Ebene $\alpha_1 = 0$ gelegene Gerade und eine Raumkurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlecht $p' = p - n + k + 1$, wo p das Geschlecht der Raumkurve n^{ter} Ordnung ist, durch deren Zerfallen, wie man leicht erkennt, i neue Doppelpunkte der Projektion entstehen. Diesen können, nach einem in Art. 2 bewiesenen Satz, scheinbare Doppelpunkte nicht entsprechen. Die Gerade schneidet also die Raumkurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in noch mindestens i Punkten.

9.

Die k Schnittpunkte einer Raumkurve n^{ter} Ordnung R_n (wir werden sie, wenn p ihr Geschlecht ist, auch mit R_n^p bezeichnen)

$$\begin{aligned} \Omega = 0 = {} & a_k \omega^m \\ & + (a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu)\,\omega^{m-1} \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + a_n \lambda^m + b_n \lambda^{m-1}\mu + \cdots + q_n \mu^m. \end{aligned}$$

mit der Hauptkante bestimmen sich (Art. 1) aus $a_k = 0$. Ein Linearfaktor α_1 von a_k kann, wenn $\frac{\omega}{t}$ mit $\frac{x}{t}$ gleichunendlich ist, nicht Faktor von a_{k+1} sein, ohne solcher von b_{k+1} zu sein (Art. 5). Sei

$$a_k = \alpha_1 a_{k-1}$$

und α_1 nicht Faktor von b_{k+1}. Dann gibt es einen endlichen Wert $\frac{\mu_0}{\lambda_0}$ von $\frac{\mu}{\lambda}$ derart, daß identisch

$$\lambda_0 a_{k+1} + \mu_0 b_{k+1} = \alpha_1 \alpha_k \tag{1}$$

ist, wo α_k eine Binärform k^{ter} Dimension ist. Der zugehörige Punkt P_0 der Hauptkante bestimmt sich aus

$$\lambda_0 x + \mu_0 y = 0,$$

wo

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0} = -\left[\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right]^0$$

ist, und durch den Index Null der Punkt $P_0(z = t = 0, \alpha_1 = 0)$ bezeichnet werden möge. Wir bestimmen für später die Tangente in diesem Punkte durch Ermittlung einer durch die Schnittlinie der Ebenen

$$\lambda_0 x + \mu_0 y = 0, \quad t = 0$$

gehenden Tangentialebene

$$\frac{x}{t} + \frac{\mu_0}{\lambda_0}\frac{y}{t} = \varrho$$

an die Raumkurve.

Die Konstante ϱ erhält man durch Einsetzen der Koordinaten $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ eines dem Punkt P_0 benachbarten Punktes. Ist nämlich, wie früher,

$$\begin{aligned} A' &= m a_k x^{m-1} + (m-1) a_{k+1} x^{m-2} + \cdots, \\ A_1 &= a_{k+1} x^{m-1} + 2 \cdot a_{k+2} x^{m-2} + \cdots, \\ B &= b_{k+1} x^{m-1} + b_{k+2} x^{m-2} + \cdots, \end{aligned}$$

so erhält man, wegen

$$x A' + A_1 = m A = 0$$

und

$$y A' + B = 0,$$

$$\frac{x}{t} + \frac{\mu_0}{\lambda_0}\frac{y}{t} = \frac{x}{t} - \left[\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right]^0 \frac{y}{t} = -\left[\frac{A_1 b_{k+1} - B a_{k+1}}{A' b_{k+1} \cdot t}\right]^0 \tag{2}$$

oder, wenn auch $a^0_{k+1} \neq 0$ ist, die Gleichung der Tangentialebene in der Form:

$$\frac{x}{t} - \left[\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right]^0 \cdot \frac{y}{t} = -\frac{1}{m-1}\left[\frac{2 a_{k+2}}{t a_{k+1}} - \frac{b_{k+2}}{t b_{k+1}}\right]^0. \tag{2a}$$

Es möge nun eine Koordinatentransformation ausgeführt werden, durch die an Stelle der Ebene $X = 0$ eine durch den Punkt P_0 gehende Ebene tritt. Führt man in Ω statt λ, μ die Parameter λ', μ' ein vermöge der Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda' \lambda_0, \\ \mu &= \lambda' \mu_0 - \mu' \lambda_0, \end{aligned}$$

so geht

$$\omega = \lambda x + \mu y$$

über in

$$\omega = \lambda' x' + \mu' y',$$

wo

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_0 x + \mu_0 y \\ y' &= -\lambda_0 y \end{aligned}$$

ist, und λ_0, μ_0 durch die Gleichung (1) definiert sind.

Dann wird der Koeffizient von ω^{m-1} in Ω:

$$a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu = \lambda' \alpha_1 \alpha_k - \mu' \lambda_0 b_{k+1} = a'_{k+1}\lambda' + b'_{k+1}\mu',$$

und Ω erhält die Form:

$$\begin{aligned} \Omega' = \alpha_1 \alpha_{k-1} \omega^m &+ (\alpha_1 \alpha_k \lambda' - \lambda_0 b_{k+1} \mu')\, \omega^{m-1} \\ &+ (a'_{k+2}\lambda'^2 + b'_{k+2}\lambda'\mu' + c'_{k+2}\mu'^2)\, \omega^{m-2} + \cdots. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda_0 b_{k+1}$ den Faktor α_1 nicht besitzt, *so können die Funktionen* $\frac{y'}{t}$ *und* $\frac{x'}{t}$ *nicht mehr gleichunendlich sein.* In der Tat beweist man allgemein, daß, *wenn in*

$$\Omega = a_k \omega^m + (a_{k+1}\lambda + b_{k+1}\mu)\,\omega^{m-1} + \cdots$$
$$= a_k \prod_1^m (\omega - \lambda x_i - \mu y_i),$$

wo Π das Produkt von m wie der Klammerausdruck gebildeten Faktoren ist, α_1 *Faktor von* a_k *und* a_{k+1}, *nicht aber von* b_{k+1} *ist, dann notwendig* α_1 *Faktor auch von* a_{k+2}, a_{k+3}, $\cdots$, a_n *sein muß,* d. h. daß die Projektion A zerfällt in

$$A = \alpha_1 \mathsf{A},$$

wo A eine Ternärform $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Denn vergleicht man, indem man der Übersichtlichkeit wegen $t = 1$ setzt, die Koeffizienten von ω^{m-1} in den beiden Ausdrücken für Ω:

$$\lambda a_{k+1} + \mu b_{k+1} = -\, a_k \sum_1^m (\lambda x_i + \mu y_i),$$

so erhält man für $\alpha_1 = 0$ (was durch eine beigesetzte Null bezeichnet werden möge)

$$\mu b_{k+1}^0 = -\,\lambda [a_k \Sigma x_i]^0 - \mu [a_k \Sigma y_i]^0.$$

Daher muß, weil $a_k^0 = 0$ ist, für $\alpha_1 = 0$ mindestens eine Wurzel y_i und zwar, weil in Y $b_{k+1}^0 \neq 0$ ist, nicht mehr als eine, etwa y_1, in der Weise unendlich werden, daß zugleich

$$[a_k x_1]^0 = 0; \quad [a_k y_1]^0 = -\, b_{k+1}$$

wird, daß also x_1^0 endlich bleibt. Dann aber wird

$$\Omega = [a_k(\omega - \lambda x_1 - \mu y_1)]^0 \prod_2^m (\omega - \lambda x_i^0 - \mu y_i^0) = \mu b_{k+1}^0 \prod_2^m (\omega - \lambda x_i^0 - \mu y_i^0).$$

Daher ist α_1 Faktor aller von μ freien Glieder, also Faktor von A, w. z. b. w.

Man könnte auch aus der Eigenschaft von $\frac{x}{t}$, einen Pol weniger zu haben als $\frac{y}{t}$, schließen, daß diese Funktion einer Gleichung von einer um 1 niedrigeren Dimension genügen muß.

Durch Einführung der Koordinatenebene $x' = 0$ an Stelle von $x = 0$ erhält demnach Ω die Form:

$$\begin{aligned}\Omega' = {} & \alpha_1 \alpha_{k-1} \omega^m \\ & + (\alpha_1 \alpha_k \lambda' + b'_{k+1} \mu') \omega^{m-1} \\ & + (\alpha_1 \alpha_{k+1} \lambda'^2 + b'_{k+2} \lambda' \mu' + c'_{k+2} \mu'^2) \omega^{m-2} \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \alpha_1 \alpha_{n-1} \lambda'^m + b'_n \lambda'^{m-1} \mu + \cdots + q'_n \mu^m .\end{aligned}$$

Daher enthält die nichtlineare Schar von Kegeln gleicher Ordnung $\Omega' = 0$, ebenso wie den Kegel mit der Spitze in $x' = z = t = 0$, so, den k Wurzeln von $a_k = 0$ entsprechend, k in eine Ebene und einen Kegel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallende Individuen, die dasselbe Geschlecht wie $\Omega' = 0$ haben, weil $\frac{x'}{t}$ als lineare Funktion von $\frac{x}{t}$ und $\frac{y}{t}$ ebenso wie diese und $\frac{\omega}{t}$ verzweigt ist. — Der gewöhnlich aus der Anschauung erschlossene *Satz von der Graderniedrigung des Projektionskegels*, dessen Spitze auf der Raumkurve liegt, ist also nur der Ausdruck einer bemerkenswerten Eigenschaft des Polynoms Ω.

Die Koordinaten der m Schnittpunkte, welche die Gerade $\alpha_1 = 0$ mit der Kurve $\mathsf{A} = \mathsf{A}_{n-1} = 0$ außerhalb $z = t = 0$ gemeinsam hat, werden, in den Quotienten

$$y' = -\frac{B'}{\alpha' \mathsf{A}'}$$

eingesetzt, nicht alle die Funktion

$$B' = b'_{k+1} x'^{m-1} + b'_{k+2} x'^{m-2} + \cdots + b'_n$$

zum Verschwinden bringen, wenn $\frac{y'}{t}$ auf $\alpha_1 = 0$ einen Pol mehr hat als $\frac{x'}{t}$. Man findet die x'-Koordinate des letzteren, indem man die Tangente an die Raumkurve in $P_0 (z = t = 0, \alpha_1 = 0)$ herstellt. Man erhält (2a)

$$\frac{x'}{t} = -\frac{1}{m-1} \left[\frac{2\alpha_{k+1}}{t \alpha_k} - \frac{b'_{k+2}}{t b'_{k+1}} \right]_{\alpha_1 = 0} .$$

Dieser Wert von $\frac{x'}{t}$, zusammen mit $\alpha_1 = 0$, wird $B' = 0$ nicht befriedigen, während alle anderen Schnittpunkte von $\alpha_1 = 0$ mit $\mathsf{A} = 0$ dies tun.

Ein Beispiel zu diesen Vorkommnissen liefert Nr. 2 in Art. 8, wenn man dort $a_0 = 0$ annimmt und zugleich λ, x mit μ, y vertauscht.

Es kann eintreten, daß sich zugleich mit α_1 eine Anzahl $\varrho - 1$ weiterer Linearfaktoren von a_k aus A aussondern, wenn man die Transformation von λ, μ in λ', μ' ausführt. Dann hat die Raumkurve in $x' = z = t = 0$ einen ϱ-fachen Punkt, dem, wie man leicht sieht, ein Projektionskegel zugehört, der in ϱ Ebenen und einen Kegel $(n-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt.

10.

Es handelt sich nun um die Umkehrung der Frage des vorigen Artikels. Gegeben sei die Gleichung eines zerfallenden Projektionskegels, dessen Spitze in einem ϱ-fachen Punkt der Raumkurve liege:

$$A = A_n = \alpha_\varrho \mathsf{A}_{n-\varrho} = \alpha_\varrho \mathsf{A},$$

wo

$$\mathsf{A} = a_{k-\varrho} x^m + a_{k-\varrho+1} x^{m-1} + \cdots + a_{n-\varrho}$$

nun wieder primitiv sei. Man verlangt diejenige Funktion $\frac{y}{t}$ zu bestimmen, die wieder zu der Gleichung $\Omega = 0$ einer Raumkurve n^{ter} Ordnung R_n führt.

Nachdem, wie in dem Falle $\varrho = 0$ (Art. 6), der dem außerwesentlichen Faktor der Diskriminante D_{A} von A entnommene Faktor Δ (vom Grade δ) ermittelt ist, hat man auf der Kurve A irgend $\varrho (\leqq k)$ Stellen

$$z = \alpha^{(i)} t, \quad x = \beta^{(i)} t \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

beliebig anzunehmen, für welche die Funktion $\frac{\omega}{t}$ — abgesehen von den $n - \varrho$ Polen, die sie mit $\frac{x}{t}$ gemeinsam hat — unendlich werden soll, wobei wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, daß die Produkte

$$\alpha_\varrho = \alpha_0 (z - \alpha' t)(z - \alpha'' t) \cdots (z - \alpha^{(\varrho)} t)$$
$$\beta_\varrho = \beta_0 (x - \beta' t)(x - \beta'' t) \cdots (x - \beta^{(\varrho)} t)$$

nicht für die singulären Stellen von A, außer $z = t = 0$, und nicht für die Verzweigungsstellen verschwinden und nur verschiedene Faktoren haben.

Man setze nun die Identität an

$$\beta_\varrho \Delta B = M\mathsf{A} + \alpha_\varrho N\mathsf{A}', \tag{1}$$

wo B die Gestalt hat

$$B = b_{k+1} x^{m-1} + b_{k+2} x^{m-2} + \cdots + b_n,$$

und wo die Formen M und N die Dimensionen $\delta + 2\varrho$, $\delta + \varrho + 1$ und die Grade $m - 2$ und $m - 1$ in x haben. Die aus dieser Identität zugleich mit M und N sich ergebende Funktion B wird außer in den Verzweigungs- und den δ singulären Punkten von A (im Falle höherer als zweifacher Punkte ist wieder die nachträgliche Beschränkung auf die adjungierte Schar, wie in Art. 6, vorzunehmen) noch in denjenigen $m\varrho - \varrho$ Punkten verschwinden, in denen die Geraden des Büschels $\alpha_\varrho = 0$ außerhalb $z = t = 0$ die Kurve $\mathsf{A} = 0$ treffen, mit Ausnahme der ϱ Punkte $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, weil dort β_ϱ verschwindet. Was die Stelle $z = t = 0$ angeht, so ergibt sich durch eine Betrachtung ähnlich der des Art. 6, daß aus ihr für

$$\delta > k - \varrho - 2$$

der Form B keine Bedingungen erwachsen.

Bildet man mit den so bestimmten Formen B, N die Quotienten

$$\frac{y}{t} = -\frac{B}{t\alpha_\varrho \mathsf{A}'} = -\frac{N}{t\beta_\varrho \Delta}, \tag{2}$$

so läßt sich wieder, wie in dem ähnlichen Fall des Art. 5, beweisen, daß $\frac{y}{t}$ sowohl die $m = n - k$ Stellen von A, wo $\frac{x}{t}$ mit $t = 0$, $z \neq 0$ unendlich wird, als auch die $k - \varrho$ Pole von $\frac{x}{t}$, die sich aus $a_{k-\varrho} = 0$ bestimmen, zu Polen hat. Endlich verschwindet B für alle Nullstellen von A' in gleicher Ordnung, wie A'. Daher hat $\frac{y}{t}$ bloß noch die ϱ Stellen $z = \alpha^{(i)}$, $x = \beta^{(i)}$, für die wohl α_ϱ, nicht aber B verschwindet, zu Polen, deren Gesamtzahl für $\frac{y}{t}$ somit auf $m + (k - \varrho) + \varrho = n$ ansteigt. Somit wird die durch Elimination von x aus (2) und

$$\mathsf{A} = 0; \quad \omega = \lambda x + \mu y$$

entstehende Gleichung $\Omega = 0$ mit

$$\alpha_\varrho a_{k-\varrho}\, \omega^m$$

als höchstem Gliede beginnen und eine (eigentliche oder ebene) Raumkurve n^{ter} Ordnung mit ϱ-fachem Punkt in $x = z = t = 0$ darstellen, deren Tangenten nach den Polen

$$z - \alpha^{(i)} t = 0, \quad x - \beta^{(i)} t = 0$$

von $\frac{y}{t}$ gerichtet sind.

Die Identität (1) läßt sich in zwei zerlegen, was die Berechnung der Formen B und N erleichtert. Ermittelt man nämlich zunächst zwei Formen B und N aus der Identität

$$\Delta \mathsf{B} = \mathsf{MA} + \mathsf{NA}', \tag{3}$$

wo Δ, A, A' die frühere Bedeutung haben, B, M, N Ternärformen vom Grade bzw. n, $\delta + \varrho$ und $\delta + \varrho + 1$ sind, die in x bzw. zum Grade $m - 1$, $m - 2$, $m - 1$ ansteigen, was auf dem in Art. 6 angegebenen Wege in expliziter Weise geschehen kann, so kann man nun den noch unbestimmt gebliebenen Koeffizienten von N (von denen die in M und B abhängen) weiter auferlegen, der Identität zu genügen

$$\beta_\varrho \mathsf{N} = \mathsf{PA} + \alpha_\varrho N, \tag{4}$$

wo P und N Ternärformen $(\delta + 3\varrho - n + 1)^{\text{ter}}$ und $(\delta + \varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, die in x bis zum Grad $\varrho - 1$ und $m - 1$ ansteigen. Sie drückt aus, daß die aus (3) erhaltene Form N noch für alle $\varrho m - \varrho$ Verschwindungswerte von α_ϱ und A, die nicht in $z = t = 0$ und nicht auf $\beta_\varrho = 0$ fallen, verschwindet. Multipliziert man (3) mit β_ϱ und setzt $\beta_\varrho \mathsf{N}$ aus (4) ein, so erhält man wieder die Identität (1), wenn man

$$\mathsf{M}\beta_\varrho + \mathsf{PA}' = M$$

setzt. — Genau genommen hat man übrigens in den Formen B, M, N von (3), bevor man N aus (4) einsetzt, diejenigen besonderen Werte der Konstanten sich eingetragen vorzustellen, die sich aus (4) ergeben.

Zugleich mit N ergibt sich die modifizierte Form N, die sich ebenso wie N zur Darstellung der Funktion $\frac{y}{t}$ verwenden läßt. Aus (2) und (4) ergibt sich nämlich

$$y = -\frac{N}{\beta_\varrho \Delta} = -\frac{\mathsf{N}}{\alpha_\varrho \Delta}. \tag{5}$$

Bezüglich der Anzahl q der in B und N (oder N) linear auftretenden unbestimmten Konstanten läßt sich eine ähnliche Bemerkung machen wie in Art. 6 für den Fall $\varrho = 0$. Ist wieder n die Anzahl der Pole der Funktion $\frac{y}{t}$, p das Geschlecht der Kurve $\mathsf{A} = 0$, so ist $q \geqq n - p + 1$. Und zwar läßt sich für $\varrho > 0$ jede beliebige Kurve $\mathsf{A} = 0$ zur Projektion einer eigentlichen Raumkurve machen, weil man immer die Zahl ϱ so groß wählen kann, daß für $n = \varrho + \nu$ die Bedingung

$$p \leqq n - 3$$

erfüllt ist.

11.

Aus dem Vorstehenden entnimmt man die Mittel für einen Beitrag zu der von der Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften für das Jahr 1902 gestellten mathematischen Preisaufgabe. Es handelt sich im wesentlichen um die Frage, ob jede Familie von eigentlichen Raumkurven in ein System von Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, ausarten könne. — Einem Algebraiker sei zunächst die Bemerkung erlaubt, daß es rechnerisch verwendbare Kriterien des Zerfallens einer Raumkurve bisher nicht gab. Denn daß eine der sie ausschneidenden Flächen zerfällt, genügt nicht. Der erzeugende Kegel kann zerfallen (Art. 9) oder in einen mehrfachen niederer Ordnung ausarten, ohne daß die Raumkurve zerfällt, und umgekehrt kann diese zerfallen (Art. 10), ohne daß der Kegel zerfällt. — Der Mangel wird so lange bestehen, als es an einer expliziten Darstellung der Raumkurven, wie sie Halphen in der Einleitung (Nr. V) zu seiner Preisschrift (s. oben Einl.) wünschte, fehlt. Wie nun in gewissem Sinne, nämlich soweit es die Theorie der ebenen Kurven zuläßt, durch unsere Gleichung $\Omega = 0$ der Raumkurve diese Lücke ausgefüllt wird, so ergibt sich auch eine algebraisch befriedigende Definition für das Zerfallen der Kurve in dem Zerfallen jener Gleichung $\Omega = 0$ der Kegelschar. Die Antwort freilich auf die Frage, ob und wie ein Zerfallen erfolgen kann, ist damit nicht gegeben. Sie hängt mit der heikelen Aufgabe zusammen,

die Variation der Konstanten, welche das Zerfallen bewirkt, so einzurichten, daß alle Zwischenfälle übersehbar werden. Für unsere Darstellung insbesondere würde es sich um das Zerfallen der ebenen Kurve handeln, welche die Projektion der Raumkurve ist. An Sätzen hierüber fehlt es jedoch fast gänzlich.

Nun gewährt aber der vorstehende Artikel die Möglichkeit, das Zerfallen einer ebenen Kurve, welche Projektion einer Raumkurve von gleicher Ordnung ist, wenigstens in eine Gerade und eine Kurve von nächst niedrigerer Ordnung und von gleichem Geschlecht algebraisch zu übersehen. Dieser Umstand erlaubt es dann weiter, der Frage nach der Zerfällbarkeit gewisser Raumkurven in Gerade näher zu treten und sie wenigstens für die Raumkurven mit den niedrigsten Geschlechtszahlen zu beantworten.

Eine R_n^ν mit ϱ-fachem Punkt auf der Hauptkante stellt sich nach Art. 10 dar durch das System von Gleichungen

$$0 = \mathsf{A} = a_{k-\varrho} x^m + a_{k-\varrho+1} x^{m-1} + \cdots + a_{n-\varrho}, \tag{1}$$

$$y = -\frac{B}{\alpha_\varrho \mathsf{A}'} = -\frac{N}{\beta_\varrho \Delta}, \tag{2}$$

wo sich B und N simultan aus der Identität ergeben:

$$\beta_\varrho \Delta B = M\mathsf{A} + \alpha_\varrho N\mathsf{A}', \tag{3}$$

und die durch

$$\alpha_\varrho = 0, \quad \beta_\varrho = 0$$

gegebenenen Wertepaare $\frac{z}{t} = \alpha^{(i)}$; $\frac{x}{t} = \beta^{(i)}$ ϱ Pole von $\frac{y}{t}$ auf A bestimmen, die zu denen von $\frac{x}{t}$ hinzutreten.

Die Form B verschwindet (Art. 10) an allen $m-1$ Verschwindungsstellen, die irgend einer der Linearfaktoren von α_ϱ (außer in $z = t = 0$) auf A hat, die Stelle ausgenommen, wo auch $\beta_\varrho = 0$ ist. Sind nun in B noch genügend viele (die Anzahl wird gleich bestimmt werden) Konstante verfügbar, und bestimmt man diese so, daß B an den ϱ Stellen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ verschwindet, so zerfällt die Raumkurve.

In der Tat, verschwindet B außer für jene $m-1$ Nullstellen von α_1 noch für die m^{te}, so wird die Gleichung, die durch Einsetzen des Wertes $\alpha_1 = 0$ in $B = 0$ entsteht, und die in x vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad ist, durch die m verschiedenen Wurzelwerte $\frac{x}{t}$, die den Schnittpunkten von $\alpha_1 = 0$ mit $\mathsf{A} = 0$ (außerhalb $z = t = 0$) entsprechen, befriedigt. B muß also α_1 als Faktor enthalten, und α_ϱ, wenn B für alle Stellen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ verschwindet. Dann muß aber wegen der Identität (3) auch M den Faktor α_ϱ haben, weil ihn A nicht hat, und die Identität geht über in

$$\beta_\varrho \Delta \mathsf{B} = \overline{M}\mathsf{A} + \overline{N}\mathsf{A}', \tag{4}$$

wo der Grad der Funktionen B, $\overline{M}$ je um ϱ niedriger in z, t ist, als der von B und M war, und wo die Form $\overline{N}$ sich dadurch von N unterscheidet, daß sie für die ϱ Wertepaare $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ verschwindet. Die Form $\overline{N}$ muß hiernach alle Nullpunkte besitzen, die β_ϱ und A gemeinsam haben. Sie läßt sich daher nach dem Noetherschen Satz in die Gestalt bringen

$$\overline{N} = \mathsf{A}\Gamma + \beta_\varrho \mathsf{N}.$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so erhält man

$$\beta_\varrho \Delta \mathsf{B} = (\overline{M} + \Gamma \mathsf{A}')\mathsf{A} + \beta_\varrho \mathsf{N}\mathsf{A}'.$$

Hiernach muß auch $\overline{M} + \Gamma \mathsf{A}'$ durch β_ϱ teilbar sein, und man hat, wenn der andere Faktor M ist,

$$\Delta \mathsf{B} = \mathsf{M}\mathsf{A} + \mathsf{N}\mathsf{A}', \tag{5}$$

wo die Funktionen B, N von den Dimensionen $n - \varrho$, $\delta - \varrho + 1$ sind. Dabei hat die Mannigfaltigkeit der Formenscharen B und N, die der Bedingung genügen, in den Punkten $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ von A zu verschwinden, gegenüber den Scharen B und N um höchstens ϱ abgenommen, so daß ihre Mannigfaltigkeit noch mindestens gleich

$$n - p + 1 - \varrho = (n - \varrho) - p + 1$$

ist, wenn $\mathsf{A}^p_{n-\varrho}$ eine allgemeine Kurve ihres Geschlechtes ist. Daher stellen die Gleichungen (1), (5) und die aus (2) hervorgegangene

$$y = -\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}'} = -\frac{\mathsf{N}}{\Delta} \tag{6}$$

eine allgemeine und eigentliche (nicht ebene) Raumkurve dar, wenn

$$(n - \varrho) - p + 1 \geqq 4 \tag{7}$$

ist*), und die R^p_n mit ϱ-fachem Punkt eine allgemeine Raumkurve ihrer Art war. Aus der Gleichung des veränderlichen Kegels $\Omega = 0$ scheidet sich dann der Faktor α_ϱ aus, weil zugleich mit $\frac{y}{t}$ auch $\frac{\omega}{t}$ die ϱ Pole $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ verliert, und den sich absondernden ϱ Ebenen $\alpha_\varrho = 0$ entsprechen die ϱ in ihnen liegenden von dem Punkt $x = z = t = 0$ nach den Stellen $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ von A gehenden Geraden. Man hat also den Satz:

*) Unter welchen Umständen man diese Einschränkung fallen lassen kann, ergibt sich aus einer Bemerkung, die ich Herrn Valentiner verdanke, wonach die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ebene Kurve $\mathsf{A}^p_{n-\varrho}$ $(n-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlecht p, für die $(n-\varrho) - p + 1 < 4$ ist, Projektion einer Raumkurve R^p_n von der n^{ten} Ordnung ist, darin besteht, daß ihre h Doppelpunkte zusammen mit ϱ anderen Punkten (nämlich den $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$) für eine Kurve $(n-4-\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung nur $h + \varrho - 1$ Bedingungen darstellen. Den Beweis führt man auf dem von H. Valentiner und M. Noether in den angeführten Arbeiten betretenen Wege.

Eine eigentliche Raumkurve $R^p_{n-\varrho}$ $(n-\varrho)^{ter}$ Ordnung vom Geschlecht p läßt sich immer als Zerfallprodukt einer eigentlichen Raumkurve R^p_n n^{ter} Ordnung von demselben Geschlecht mit ϱ-fachem Punkt auffassen, von der sich die ϱ Tangenten in diesem Punkt abgespalten haben. Und zwar trifft jede dieser Geraden die $R^p_{n-\varrho}$ noch in *einem* Punkt, in welchen nämlich derjenige Punkt der R^p_n übergegangen ist, der längs der Tangente dem ϱ-fachen benachbart ist. Er entspricht einem der Pole $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ der Funktion $\frac{y}{t}$.

Umgekehrt zerfällt in der angegebenen Weise jede allgemeine Raumkurve R^p_n mit einfachem Punkt $(\varrho = 1)$ auf der Hauptkante, für die $p < n-3$ ist, in eine *allgemeine, eigentliche* R^p_{n-1} und eine sie schneidende Gerade R_1. Diese R^p_{n-1} läßt sich dann weiter, wenn auch $p < n-4$ ist, nach Ausführung einer Koordinatentransformation, durch welche die Hauptkante wieder zum Schnitt mit der Kurve gebracht wird*), in eine R^p_{n-2} und eine sie schneidende Gerade R_1' spalten. Und zwar wird diese Gerade außerdem noch die zuerst abgeschiedene Gerade R_1 treffen, wenn man als Projektionszentrum denjenigen Punkt wählt, in dem die Gerade R_1 die Kurve R^p_{n-1} trifft. — Fährt man so fort, so läßt sich insbesondere *jede Kurve R^0_n vom Geschlecht Null in ein System von Geraden verwandeln, von denen jede später ausgeschiedene die nächstvorhergehende trifft.* Denn die R^0_3, bis zu der man wegen der Ungleichung

$$p < n-3$$

für $p = 0$ noch herabgehen kann, ist an diese nicht mehr gebunden, weil ihr Zerfallprodukt selbst eine ebene Kurve ist, kann also in der angegebenen Weise weiter gespalten werden.

Ebenso ist *eine R^1_n in ein ebensolches System von Geraden und eine R^1_4 zerfällbar,* die von der zuletzt ausgeschiedenen getroffen wird, für $p = 2$ bleibt ebenso schließlich eine R^2_5 übrig, usw.

Die weitere Zerfällung der übrig bleibenden R^1_4, R^2_5, R^3_6, $\cdots$ läßt sich nicht mehr durch Ausartung des Monoids bei unverändertem Kegel, d. h. bei unverändertem Geschlecht des Zerfallprodukts, sondern nur durch Spaltung des Kegels selbst erreichen, wie sie in Art. 8 an den auf Flächen zweiter Ordnung gelegenen Raumkurven vorgenommen wurde. Zu diesen gehören aber eben jene R^1_4, R^2_5, gewisse R^3_6 usw. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die anderen Restkurven muß einer anderen Stelle vorbehalten bleiben.

*) Dies geschieht, indem man z. B. $z + \sigma x$ an Stelle von z einführt und die Konstante σ passend bestimmt.

12.

Als Beispiel zu dem vorletzten Artikel möge noch die Gleichung einer $R_6^{(3)}$, die auf einer Fläche dritter Ordnung liegt, mit Hilfe ihrer Projektion $\mathsf{A}_5^{(3)}$ von einem Kurvenpunkt aus gebildet werden. Wir nehmen an:

$$0 = A = \alpha_1 \mathsf{A}_5^{(3)} = \alpha_1(a_2 x^3 + a_3 x^2 + b_2 \varkappa_2 x + b_1 \varkappa_2^2), \tag{1}$$

also $n = 6$, $m = 3$, $k = 3$, $\varrho = 1$, $\Delta = \varkappa_2$, $\delta = 2$ und bilden zunächst die in der Identität (3) des Art. 10 auftretende Form N analog derjenigen (5) des Art. 7:

$$\mathsf{N} = p_0(a_2 x^2 + a_3 x + b_2 \varkappa_2) + p_3 x + p_4,$$

die nun noch der Forderung zu genügen hat, für $\varkappa_2 = 0$, $\mathsf{A} = 0$ zu verschwinden. Mit dem Faktor von p_0 ist dies der Fall; p_3, p_4 müssen noch je den Faktor $\varkappa_2$ haben. Indem man $b_2 \varkappa_2 p_0$ in p_4 eingehen läßt, erhält man

$$\mathsf{N} = p_0(a_2 x^2 + a_3 x) + p_1 \varkappa_2 x + p_2 \varkappa_2. \tag{2}$$

Wählt man den Pol von $\frac{y}{t}$ in demjenigen Schnittpunkt von $\alpha_1 = 0$ mit $\mathsf{A} = 0$, für den $x + r_1 = 0$ ist, wo denn also die Binärform r_1, für $-x$ in A eingesetzt, $\mathsf{A} = 0$ macht, wenn $\alpha_1 = 0$ angenommen wird, so hat N der weiteren Identität zu genügen ((4) Art. 10):

$$\mathsf{N}(x + r_1) = \mathsf{P}\mathsf{A} + \alpha_1 N. \tag{3}$$

Vergleicht man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man für

$$N = n_2 x^2 + n_3 x + n_4$$

$\mathsf{P} = p_0$ und drei in r_1 lineare Gleichungen, aus denen sich durch Elimination von r_1 die folgenden ergeben ($p_0 = 1$ gesetzt):

$$\begin{aligned} b_2 a_2 + p_1 \alpha_3 - p_2 a_2 &= \alpha_1 \nu_3, \\ b_1 a_2 + p_1 p_2 \qquad\quad &= \alpha_1 \nu_2, \\ b_1 \alpha_3 - p_2 b_2 + p_2^2 &= \alpha_1 \varrho_3, \end{aligned} \tag{4}$$

wo

$$\alpha_3 = a_3 + p_1 \varkappa_2 \tag{4a}$$

gesetzt ist, und die Größen ν_2, ν_3, ϱ_3 in (4) und

$$\begin{aligned} \nu_3 \varkappa_2 &= n_2 \alpha_3 - a_2 n_3, \\ \nu_2 \varkappa_2^2 &= n_2 p_2 \varkappa_2 - a_2 n_1, \\ \varrho_3 \varkappa_2^2 &= n_3 p_2 \varkappa_2 + \alpha_3 n_4 \end{aligned} \tag{4b}$$

Binärformen sind, während die p der Bedingung genügen, daß die linken Seiten in (4) für $\alpha_1 = 0$ verschwinden. Bildet man nun mit Hilfe der p die Funktion ((5) Art. 10)

$$y = -\frac{\mathsf{N}}{\alpha_1 \Delta} = -\frac{a_2 x^2 + a_3 x + p_1 \varkappa_2 x + p_2 \varkappa_2}{\alpha_1 \varkappa_2} \tag{5}$$

oder auch

$$y = -\frac{p_1 x^2 + (p_2 - b_2)\, x - b_1 \varkappa_2}{\alpha_1 x} \tag{5a}$$

und eliminiert x und y aus (5) und

$$\omega = \lambda x + \mu y; \qquad \mathsf{A} = a_2 x^3 + a_3 x^2 + b_2 \varkappa_2 x + b_1 \varkappa_2^2 = 0,$$

so erhält man, unter Berücksichtigung der Relationen (4), die Gleichung einer auf dem Monoid dritter Ordnung (5a) gelegenen Raumkurve R_6^3, die sich ohne Mühe bilden läßt. Wir wollen hier nur die Gleichung des Kegels Y angeben:

$$Y = \alpha_1 a_2 y^3 + (2 a_2 b_2 + p_1 a_3 - 3 p_2 a_2)\, y^2 + (a_2 \varrho_3 + 2 p_1 \nu_2 \varkappa_2 - \nu_3 (2 p_2 - b_2))\, y + \varrho_3 \nu_3 - \nu_2^2 \varkappa_2 = 0,$$

wo die p, ν, ϱ durch die Gleichungen (4) zusammenhängen. Dies ist die Gleichung einer Kurve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten, von denen übrigens drei in dem dreifachen Punkt $z = t = 0$ vereinigt sind.

Wenn die Projektion A dadurch zerfällt, daß b_1 gemeinsamer Faktor aller Koeffizienten a_2, a_3, b_2, b_1 ist, so haben vermöge der Relationen (4), (4a), (4b) den Faktor b_1 auch die Formen α_3 und p_2, und wegen (4a) auch p_1; dann haben ihn aber ν_3, ν_2, ϱ_3 doppelt. Damit scheidet sich b_1 auch aus Y einfach ab; der andere Faktor stellt eine Kurve fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkt in $y = 0$, $b_1 = 0$ und zwei Doppelpunkten dar, und die Raumkurve R_6^3 spaltet sich in eine R_5^1 und ihre dreifache Sehne $y = 0$, $b_1 = 0$.

Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt.

(Aus einem Briefe an Herrn Hilbert.)

Von

MICHAEL BAUER in Budapest.

I.

Herr H. Weber hat in seinem Lehrbuche der Algebra einen einfachen Beweis der Tatsache geliefert, daß unbegrenzt viele ganzzahlige Gleichungen n^{ten} Grades ohne Affekt existieren. Sein Beweis stützt sich auf die Annahme, daß n eine Primzahl ist und daß zwei der Wurzeln imaginär, die übrigen dagegen reell sind. Daß die erste Annahme unwesentlich ist, war schon durch Ihre*) Abhandlung bekannt, in welcher zum ersten Male der Satz bewiesen ist. H. Weber hat jedoch auch die Vermutung ausgesprochen, daß auch die Annahme über die Realitätsverhältnisse der Wurzeln unwesentlich sei.

Die Resultate meiner jüngst erschienenen Arbeiten**) lassen in der Tat sehr bequem erkennen, daß es wirklich so ist.

1) Die Gleichung

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (1)$$

(c_i rational ganz)

hat keinen Affekt, wenn ihre Puiseuxschen Zahlen in bezug auf gewisse Primzahlen gewissen Bedingungen genügen. Man kann das auch so formulieren: Die Gleichung (1) hat keinen Affekt, wenn die Koeffizienten gewissen Bedingungen von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} c_i &\equiv 0 \pmod{A_i}, \\ (c_i,\ B_i^2) &= B_i \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

genügen. Man kann ohne weiteres auch den allgemeineren Satz aussprechen: Die Gleichung

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (I)$$

(c_i rational ganz)

*) Crelles Journal Bd. 110, S. 104—129.

**) Crelles Journal Bd. 132, S. 21—35.

hat keinen Affekt, wenn die Koeffizienten gewissen Bedingungen von der Gestalt

$$\text{(I*)} \qquad \begin{matrix} c_i \equiv 0 \pmod{A_i}, \\ (c_i,\ B_i^2) = B_i \end{matrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

genügen und noch

$$\text{(I**)} \qquad \left(c_0, \prod_{i=1}^{n} A_i B_i\right) = 1$$

ausfällt.

2) Es sei jetzt

$$\text{(II)} \qquad z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \gamma_n = 0$$

eine *beliebige* Gleichung, deren Koeffizienten reell sind, mit der einzigen Bedingung, daß die Wurzeln verschieden seien. Nun beweist man leicht, weil c_0 beliebig gewählt werden kann, daß Gleichungen von der Gestalt (I) existieren, für welche

$$\left| \gamma_i - \frac{c_i}{c_0} \right| < \delta$$

ausfällt, wo δ eine beliebige positive Zahl ist.

Es gibt also Gleichungen

$$z^n + \frac{c_1}{c_3} z^{n-1} + \cdots + \frac{c_n}{c_0} = 0$$

ohne Affekt, deren Koeffizienten beliebig wenig von γ_i abweichen; deren Wurzeln infolgedessen dieselben Realitätsverhältnisse aufweisen, wie die Wurzeln von (II). (Beachtet man die Realitätsverhältnisse nicht, so kann (II) ganz beliebig sein.)

II.

Die fundamentalen Sätze des Herrn Dedekind*) „Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen“ und sein Satz, der in einer Abhandlung von Herrn Frobenius**) mitgeteilt ist, geben auch ein Mittel, um die Existenz von Gleichungen ohne Affekt zu beweisen.

1) Man konstruiere die Gleichung

$$\text{(1)} \qquad f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

die folgende Eigenschaften aufweist. Es soll für zwei Primzahlen $p_i > n$ $(i = 1, 2)$ eine Zerlegung von der Gestalt

$$\text{(2)} \qquad f(z) \equiv g_{n_i}(z) \prod_{k=1}^{n-n_i} (z - \alpha_{k_i}) \pmod{p_i}$$

*) Göttinger Abhandlungen 1878. Außer dem Hauptsatze vgl. noch p. 19.

**) Berl. Sitzungsberichte 1896. S. 697.

gelten, wo $g_{n_i}(z)$ (mod. p_i) eine irreduzible Form n_i^{ten} Grades ist, und die übrigen Faktoren (mod. p_i) verschieden ausfallen. Diese Bedingungen können offenbar erfüllt werden; wenn man (2) in bestimmter Weise vorschreibt, sind dadurch die Koeffizienten von (1) nur (mod. $p_1 p_2$) gegeben. Infolgedessen können den Koeffizienten z. B. noch die Bedingungen

$$(3) \qquad \begin{gathered} c_i \equiv 0 \pmod{r} \\ (c_n, r^2) = r \end{gathered}$$

auferlegt werden, wo r eine von p_i verschiedene Primzahl bedeutet.

2) Nun ist nach (3) die Gleichung (1) irreduzibel.

Aus (2) folgt dann nach den Sätzen des Herrn Dedekind, daß die n-buchstabige Galoissche Gruppe der Gleichung auch solche Substitutionen enthält, die aus einem n_i-gliedrigen Zykel bestehen. Wählt man jetzt

$$n_1 = 2, \quad n_2 = q, \quad \frac{n}{2} < q < n,$$

wo q eine Primzahl ist, so besitzt die Gleichung (1) keinen Affekt. (Ist die Zahl n eine Primzahl, so können p_2 und n_2 von der Betrachtung ganz ausgeschlossen werden.)

Die Differentialgleichungen der Invarianten und Semiinvarianten einer binären (ternären) Form.

Von

F. Junker in Stuttgart.

Die Invarianten φ der binären Form

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots$$

genügen bekanntlich den vier partiellen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} n a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-2) a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots = \mu \varphi, \\ a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_3 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \cdots = \mu \varphi, \\ a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \cdots = 0, \\ n a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots = 0, \end{cases}$$

die bereits von Cayley*) aufgestellt worden sind. Daß dieses System ein vollständiges ist, hat Clebsch in seinen „Binären Formen", p. 310, allgemein bewiesen. Außer diesen partiellen Differentialgleichungen sind im allgemeinen keine weiteren mehr vorhanden. Nur wenn es sich darum handelt, besondere Invarianten wie beispielsweise Diskriminanten und Resultanten zu charakterisieren, lassen sich noch andere Differentialgleichungen angeben, wie die Herren Brioschi**) und Nöther***) gezeigt haben.

Analoge Gleichungen gelten für die Kovarianten der Form f.

Zur Berechnung des algebraischen Ausdrucks einer Invariante

$$\varphi = \sum \alpha\, a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots,$$

wo α_1, α_2, α_3, $\cdots$ unbestimmte Koeffizienten bedeuten sollen, sind die

*) Crelles J. Bd. 47.

**) Crelles J. Bd. 53 und Annali di Mathem. Bd. 2 (1859).

***) Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, übersetzt von Walter, S. 275.

beiden letzten Gleichungen des Systems (1), die gewöhnlich mit $\delta\varphi = 0$ und $\delta'\varphi = 0$ bezeichnet werden, ausreichend, wenn man die Bedingung hinzunimmt, daß eine Invariante isobarisch und vom Gewicht $\mu = \frac{1}{2} n\varrho$ ist, wobei

$$\varrho = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$$

den Grad und

$$\mu = 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 + \cdots$$

das Gewicht der Invariante bedeuten soll. Die Anwendung der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta'\varphi = 0$ auf den angeschriebenen Ausdruck für φ gibt bekanntlich ein System von linearen Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten α.

In der vorliegenden Arbeit wird beabsichtigt, die vier Differentialgleichungen des Systems (1) auf drei äquivalente Gleichungen mit neuen Veränderlichen zu reduzieren und insbesondere die beiden letzten Gleichungen von (1) $\delta\varphi = 0$ und $\delta'\varphi = 0$, die, wie soeben bemerkt worden ist, gewöhnlich zur Darstellung der Invarianten dienen, durch eine einzige zu ersetzen. Dies wird dadurch erreicht, daß man, wie in § 2 bis § 4 ausgeführt wird, die partikulären Lösungen der Differentialgleichung $\delta\varphi = 0$, nämlich

$$(2) \qquad \begin{cases} C_0 = a_0, \; C_2 = a_0 a_2 - a_1^2, \; C_3 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3, \; \cdots, \\ C_n = a_0^{n-1} a_n - \binom{n}{1} a_0^{n-2} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_0^{n-3} a_1^2 a_{n-2} - \cdot\cdot \\ \qquad\qquad \cdot\cdot + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} a_0 a_1^{n-2} a_2 + (-1)^{n-1} (n-1) a_1^n, \end{cases}$$

die als fundamentale *Semiinvarianten* von f bekannt sind, an Stelle der $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ als Veränderliche in die übrigen Differentialgleichungen, insbesondere in die Gleichung $\delta'\varphi = 0$, einführt. Geschieht dies — und das ist meines Wissens noch von keiner Seite versucht worden —, so wird an Stelle der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta'\varphi = 0$ eine *einzige Differentialgleichung* $D\varphi = 0$ gewonnen (Formel (4*) und (6*)), deren Integrale sämtlich Invarianten von f sind. Diese Gleichung aufzustellen und für einige Fälle zu untersuchen, ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit.

Bis auf eine Potenz von a_0 lassen sich die Größen C auch als Koeffizienten einer Form $F(\xi\eta)$ darstellen, in welche die Originalform $f(xy)$ durch die Substitution $x = \xi - \frac{a_1}{a_0}\eta$, $y = \eta$ übergeführt wird. Invariantentheoretisch betrachtet, sind sie bis auf eine Potenz von a_0 nichts anderes als die Leitkoeffizienten der von Hermite eingeführten „*Schwesterformen*“ $\mathfrak{G}$ (formes associées), durch welche bekanntlich alle Invarianten und Kovarianten von f, und umgekehrt, rational dargestellt werden können. An Stelle der Schwesterformen Hermites können, wie

Clebsch bemerkt hat, auch die Kovarianten zweiten und dritten Grades von f treten, nämlich die geraden Überschiebungen ψ von f über sich selbst und deren Funktionaldeterminanten χ mit f, so daß alle Kovarianten, also auch die Hermiteschen Schwesterformen, durch diese Funktionen, und umgekehrt, rational dargestellt werden können, wie bald darauf Herr Gundelfinger*) bewiesen hat. Diesen Gedanken hat später Herr Gordan**) in seiner Arbeit über „Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Kovarianten" weiter ausgeführt und zugleich die weiteren Aufgaben gelöst, die Koeffizienten einer binären Form f als rationale Funktionen der beiden ersten und der Leitglieder der ψ und χ, sowie als rationale Funktionen der beiden ersten und der beiden Anfangskoeffizienten der ψ darzustellen.

Beziehen sich diese grundlegenden Arbeiten also mehr auf die Frage nach der gegenseitigen Darstellbarkeit dieser verschiedenen Formen durcheinander, so ist wenigstens im folgenden ein neuer Weg gekennzeichnet, durch Integration einer einzigen Differentialgleichung die unabhängigen In- und Kovarianten von f direkt als Funktionen der C darzustellen.

Endlich gibt die Einführung der C auch Anlaß zu einer einfachen Darstellung der Syzygien zwischen den Grundformen von f.

In § 6 bis § 8 werden schließlich noch die Differentialgleichungen der Invarianten des ternären Gebiets einer analogen Behandlung unterzogen und wird bei dieser Gelegenheit bewiesen, daß die Bedingungen des Zerfallens einer Ternärform in Linearfaktoren im allgemeinen als Semiinvarianten anzusehen sind.

§ 1.

Eigenschaften der Funktionen C.

Setzt man in den Lösungen C überall $a_1 = 0$, so geht eine solche, z. B. C_k, bis auf eine Potenz von $a_0 = C_0$ in den entsprechenden Koeffizienten, z. B. a_k, von f über. Um daher eine Invariante oder Semiinvariante $\varphi(a_0 a_1 a_2 \cdots)$ von f als Funktion der partikulären Lösungen C darzustellen, genügt es, in dem Ausdruck für φ überall $a_1 = 0$ und in den übrig bleibenden Gliedern $a_2 = \frac{C_2}{C_0}$, $a_3 = \frac{C_3}{C_0^2}$, $\cdots$, $a_n = \frac{C_n}{C_0^{n-1}}$ zu setzen; es gilt daher identisch die Beziehung

$$(3) \qquad \varphi(a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \varphi\left(1, 0, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0^2}, \cdots, \frac{C_n}{C_0^{n-1}}\right),$$

auf die schon Herr Macmahon***) aufmerksam gemacht hat.

*) Journ. f. Math. 74, S. 405—409 oder Math. Ann. 3, S. 265—267 (1871).

**) Math. Ann. 40, S. 503—526.

***) Quart. Journ. (1883), S. 337—341.

Setzt man ferner in den Lösungen C sämtliche Koeffizienten der ursprünglichen Form f

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1,$$

so geht beispielsweise C_k über in

$$C_k = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n}{2} + (-1)^{n-1}(n-1),$$

oder da das letzte Glied

$$(-1)^{n-1}(n-1) = (-1)^{n-1}\binom{n}{1} + (-1)^n$$

ist, über in

$$C_k = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{1} + (-1)^n = (1-1)^n = 0.$$

Es folgt hieraus, daß die *algebraische Summe der Zahlenkoeffizienten sämtlicher Lösungen C gleich Null ist.* Da nun jede andere Semiinvariante, also auch jede Invariante, von f durch die partikulären Lösungen C dargestellt werden kann, so gilt allgemein der Satz, der sonst auf andere Weise bewiesen zu werden pflegt: *Die algebraische Summe der Zahlenkoeffizienten einer Invariante oder Semiinvariante ist gleich Null.*

§ 2.

Die Differentialgleichungen der Invarianten.

Führt man mit Berücksichtigung, daß für $a_1 = 0$

$$a_0 = C_0,\ a_2 = C_2 C_0^{-1},\ a_3 = C_3 C_0^{-2},\ \cdots,\ a_n = C_n C_0^{-n+1}$$

ist, die Lösungen C der Differentialgleichung $\delta\varphi = 0$ an Stelle der Koeffizienten a als Veränderliche in die Gleichungen (1) ein, so erhält man für $a_1 = 0$ zunächst:

$$\frac{\partial C_2}{\partial a_1} = 0,\ \frac{\partial C_3}{\partial a_1} = -3C_2,\ \frac{\partial C_4}{\partial a_1} = -4C_3,\ \cdots,\ \frac{\partial C_n}{\partial a_1} = -nC_{n-1}$$

und

$$\frac{\partial C_k}{\partial a_k} = C_0^{k-1},\ \frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_k} = \frac{\partial C_{k+2}}{\partial a_k} = \cdots = 0,$$

wobei $k = 2, 3, 4, \cdots, n$ zu setzen ist.

Damit gehen die beiden ersten der Gleichungen (1) unmittelbar über in

$$(4)\qquad \begin{cases} nC_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_0} + (n-2)C_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} + (n-3)C_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_3} + \cdots = \mu\varphi, \\ 2C_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} + 3C_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_3} + 4C_4\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_4} + \cdots = \mu\varphi, \end{cases}$$

während die dritte illusorisch wird und die vierte und letzte die Gestalt annimmt:

$$(4^*)\quad \begin{cases} D\varphi = (n-2)\,C_3\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} + \{(n-3)\,C_4 - 3(n-1)\,C_2^2\}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_3} \\ \qquad\qquad + \{(n-4)\,C_5 - 4(n-1)\,C_2 C_3\}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_4} + \cdots \\ \cdots + \{C_n - (n-1)^2\,C_2 C_{n-2}\}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_{n-1}} - n(n-1)\,C_2 C_{n-1}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_n} = 0. \end{cases}$$

Damit ist das System (1) von vier Differentialgleichungen auf ein solches von drei, (4) und (4*), zurückgeführt. An Stelle der beiden Bestimmungsgleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta'\varphi = 0$ für die Invarianten von f tritt somit nur noch eine einzige, nämlich $D\varphi = 0$, deren Integrale nur noch Invarianten sein können und die deshalb als *Differentialgleichung der Invarianten* bezeichnet werden soll.

Als homogene partielle Differentialgleichung zwischen $n-1$ unabhängigen Veränderlichen $C_2, C_3, \cdots, C_n$ hat diese Gleichung im ganzen $n-2$ unabhängige partikuläre Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-2}$, die nichts anderes als die unabhängigen Invarianten von f darstellen können. Hieraus ergeben sich die Folgerungen:

Eine binäre Form f von der Ordnung n hat $n-1$ unabhängige Semiinvarianten, nämlich $C_2, C_3, \cdots, C_n$, die sich als partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $\delta\varphi = 0$ ergeben, und $n-2$ unabhängige Invarianten $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-2}$, die als partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $D\varphi = 0$ gewonnen werden.

Um diese letzteren zu ermitteln, genügt es, das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung anzuschreiben und zu integrieren:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{0} = \dfrac{dC_2}{(n-2)\,C_3} = \dfrac{dC_3}{(n-3)\,C_4 - 3(n-1)\,C_2^2} = \dfrac{dC_4}{(n-4)\,C_5 - 4(n-1)\,C_2 C_3} = \cdots \\ \cdots = \dfrac{dC_{n-1}}{C_n - (n-1)^2\,C_2 C_{n-2}} = \dfrac{dC_n}{-n(n-1)\,C_2 C_{n-1}}. \end{cases}$$

§ 3.

Die Invarianten der Formen zweiten, dritten und vierten Grades.

Für $n = 2$ lauten die Differentialgleichungen (4*) bzw. (5)

$$D\varphi = 0 \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\varphi}{0} = \frac{dC_2}{0},$$

welche integriert

$$C = C_2 = \text{Const.}$$

geben, d. h.

$$C_2 = a_0 a_2 - a_1^2,$$

oder die Diskriminante ist, wie zu erwarten war, die einzige Invariante von f.

Für $n = 3$ erhält man die Differentialgleichung

$$D\varphi = C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} - 6 C_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} = 0.$$

Die binäre Form dritter Ordnung hat somit *eine* unabhängige Invariante, die sich als Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dC_3}{C_3} = \frac{dC_3}{-6 C_2^2}$$

ergibt. Man erhält aus

$$12 C_2^2 dC_2 + 2 C_3 dC_3 = 0$$

durch Integration

$$\varphi_1 = 4 C_2^3 + C_3^2.$$

Dies ist die Diskriminante der binären Form dritter Ordnung vom Grad 3 und dem Gewicht 6, wie man sich sofort überzeugt, wenn man an Stelle von C_2 und C_3 deren Ausdrücke in den Koeffizienten von f setzt.

Für $n = 4$ hat man als fundamentale Semiinvarianten C_2, C_3 und C_4. Zur Bestimmung der Invarianten erhält man die partielle Differentialgleichung

$$D\varphi = 2 C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + (C_4 - 9 C_2^2) \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} - 12 C_2 C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_4} = 0,$$

deren partikuläre Lösungen durch Integration der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dC_2}{2 C_3} = \frac{dC_3}{C_4 - 9 C_2^2} = \frac{dC_4}{-12 C_2 C_3}$$

gewonnen werden. Aus $\frac{dC_2}{2 C_3} = \frac{dC_4}{-12 C_2 C_3}$ folgt

$$dC_4 + 6 C_2 dC_2 = 0$$

und hieraus durch Integration

$$\varphi_1 = C_4 + 3 C_2^2.$$

Dies ist die Invariante i vom Grad $\varrho = 2$ und dem Gewicht $\mu = 4$.

Ersetzt man in der Gleichung $\frac{dC_2}{2 C_3} = \frac{dC_3}{C_4 - 9 C_2^2}$ oder in

$$(C_4 - 9 C_2^2) dC_2 - 2 C_3 dC_3 = 0$$

den Wert von C_4 durch $C_4 = \varphi_1 - 3 C_2^2$, wo φ_1 als Konstante aufzufassen ist, so folgt

$$(\varphi_1 - 12 C_2^2) dC_2 - 2 C_3 dC_3 = 0$$

und durch Integration

$$\varphi_1 C_2 - 4 C_2^3 - C_3^2 = \varphi_2$$

Damit ist aber als weitere unabhängige Invariante die Invariante j vom Grad $\varrho = 3$ und dem Gewicht $\mu = 6$ gewonnen:

$$\varphi_2 = j = C_2 C_4 - C_2^3 - C_3^2.$$

i und j sind aber bekanntlich die unabhängigen Invarianten der Form vierter Ordnung, durch welche sich alle übrigen Invarianten darstellen lassen müssen. So ist beispielsweise die Diskriminante R vom Gewicht $\mu = 12$; sie wird also von der Form sein:

$$R = \varphi_1^3 + \alpha \varphi_2^2,$$

wo α ein Zahlenkoeffizient ist, der durch die Differentialgleichung $D\varphi = 0$ bestimmt wird. Man erhält $\alpha = -27$, so daß R dargestellt ist durch

$$R = \varphi_1^3 - 27 \varphi_2^2$$

oder durch

$$R = (C_4 + 3 C_2^2)^3 - 27 (C_2 C_4 - C_2^3 - C_3^2)^2.$$

§ 4.

Die Kovarianten der Form f.

Wie schon in der Einleitung bemerkt worden, geht durch die Substitution $x = \xi - \frac{a_1}{a_0}\eta$, $y = \eta$, deren Determinante $\Delta = 1$ ist, jede Kovariante $\varphi(a_0 a_1 a_2 \cdots; x, y)$ der ursprünglichen Form f in eine solche der transformierten $F(\xi, \eta)$ über, deren Koeffizienten Semiinvarianten von f sind. Da nun für $a_1 = 0$ nach § 1:

$$a_0 = C_0,\ a_2 = C_2 C_0^{-1},\ a_3 = C_3 C_0^{-2},\ \cdots,\ a_n = C_n C_0^{-n+1},\ x = \xi,\ y = \eta$$

wird, so folgt:

Um eine gegebene Kovariante oder Semikovariante $\varphi(a_0 a_1 a_2 \cdots; xy)$ der ursprünglichen Form f in eine solche der transformierten Form F überzuführen, deren Koeffizienten Semiinvarianten von f sind, genügt es, in dem Ausdruck für φ überall $a_1 = 0, x = \xi, y = \eta$ und an Stelle der Koeffizienten $a_0, a_2, a_3, \cdots, a_n$ die eben angeführten Ausdrücke $C_0, C_2 C_0^{-1}, C_3 C_0^{-2}, \cdots, C_n C_0^{-n+1}$ zu setzen.

So sind beispielsweise die Kovarianten der binären Form dritter Ordnung dargestellt durch

$$\begin{aligned} f &= C_0 \xi^3 + 3 C_2 \xi \eta^2 + C_3 \eta^3, \\ \Delta &= C_2 \xi^2 + C_3 \xi \eta - C_2^2 \eta^2, \\ Q &= C_3 \xi^3 - 6 C_2^2 \xi^2 \eta - 3 C_2 C_3 \xi \eta^2 - (C_3^2 + 2 C_2^3) \eta^3, \end{aligned}$$

worin $C_0 = a_0 = 1$ gesetzt ist.

Führt man ebenso wie in § 2 an Stelle der Variablen $a_0, a_1, a_2, \cdots; x, y$ die Größen C nebst ξ, η als Veränderliche in die für die Kovarianten gel-

tenden Differentialgleichungen ein, so nehmen die beiden ersten derselben die Gestalt an:

$$(6)\quad \begin{cases} n C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial C_0} + (n-2) C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + (n-3) C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} + \cdots - \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \mu \varphi, \\ 2 C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \quad 3 C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial C_3} + \quad 4 C_4 \frac{\partial \varphi}{\partial C_4} + \cdots - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \mu \varphi, \end{cases}$$

während die dritte ebenso wie die entsprechende des Systems (1) illusorisch wird und die vierte übergeht in

$$(6^*)\qquad D'\varphi = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - (n-1) C_3 \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - D\varphi = 0,$$

wo $D\varphi$ den von § 2 her bekannten Ausdruck bedeutet, so daß man also auch hier sieht, daß sich die Kovarianten einer binären Form als Integrale einer einzigen Differentialgleichung (6*) darstellen lassen. Da dieselbe $n+1$ unabhängige Veränderliche, nämlich ξ, η; $C_2, C_3, \cdots, C_n$, besitzt, so sieht man auch hieraus, daß eine *binäre Form n^{ter} Ordnung n unabhängige Kovarianten besitzt*, die sich durch Integration des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(7)\quad \frac{d\varphi}{0} = \frac{d\eta}{\xi} = \frac{d\xi}{-(n-1) C_2 \eta} = -\frac{d C_2}{(n-2) C_3} = -\frac{d C_3}{(n-3) C_4 - 3 (n-1) C_2^2} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{d C_n}{n (n-1) C_2 C_{n-1}}$$

ermitteln lassen. Unter diesen Lösungen sind, wie im voraus zu erwarten war, auch die Invarianten enthalten, sofern diese eben als Kovarianten von der Ordnung $\nu = 0$ anzusehen sind.

§ 5.

Syzygien.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Kovarianten in der transformierten Gestalt ein Mittel darbieten, die Relationen (Syzygien) zu bestimmen, durch welche die irreduziblen Grundformen einer gegebenen Urform verbunden sind. Erhält man nämlich für eine solche Urform τ irreduzible Kovarianten oder Invarianten, so müssen diese, da nur n von ihnen als unabhängig anzusehen sind, durch $\tau - n$ *identische Relationen* oder *Syzygien* untereinander verbunden sein. Zwischen je $n+1$ Kovarianten muß also stets eine solche Relation bestehen. Nun läßt sich nach Sylvester und Perrin jede dieser Relationen durch eine solche zwischen den Leitgliedern eindeutig ersetzen. Um sie zu ermitteln, genügt es daher, nur die Leitglieder der Kovarianten anzuschreiben und aus den erhaltenen Gleichungen die Größen $C_2, C_3, \cdots, C_n$ nebst der Veränder-

lichen ξ zu eliminieren. Diese Elimination gestaltet sich dadurch einfach, daß unter den Kovarianten von f neben dieser Form selbst noch $n-1$ weitere Grundformen zweiten und dritten Grades, nämlich die geraden Überschiebungen der Form über sich selbst und deren Funktionaldeterminanten mit f, vorhanden sind, welche hinsichtlich der höchsten darin vorkommenden Funktion C_μ vom Gewicht μ des Leitkoeffizienten linear sind. Bezeichnet man deren Leitglieder mit dem Buchstaben A_μ, wo der Index μ das Gewicht des Leitkoeffizienten angeben möge, so sind diese bekanntlich dargestellt durch

$$(8)\quad \begin{cases} A_0 = f = \xi^n, \\ A_2 = C_2\xi^{2n-4},\ A_3 = C_3\xi^{3n-6},\ A_4 = (C_4 + 3C_2^2)\xi^{2n-8}, \\ A_5 = (C_5 + 2C_2C_3)\xi^{3n-10},\ A_6 = (C_6 + 15C_2C_4 - 10C_3^2)\xi^{2n-12}, \\ A_7 = (C_7 + 9C_2C_5 - 5C_3C_4)\xi^{3n-14},\ \cdots. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man der Reihe nach die Größen $\xi, C_2, C_3, \cdots, C_n$ durch die Leitglieder A ausdrücken, durch deren Index μ die zugehörigen Kovarianten eindeutig bestimmt sind. Durch Substitution der gefundenen Werte in die Leitglieder der übrigen $\tau - n$ Kovarianten erhält man ebensoviele Relationen, die voneinander unabhängig sind, da jede folgende ein Leitglied oder, was dasselbe ist, eine Kovariante enthält, die in der vorhergehenden nicht enthalten ist.

Die folgenden Beispiele mögen das Verfahren näher erläutern.

Für $n = 3$ hat man vier irreduzible Grundformen, deren Leitglieder $A_0 = f = \xi^3$, $A_2 = \Delta = C_2\xi^2$, $A_3 = Q = C_3\xi^3$ und $A_6 = R = C_3^2 + 4C_2^2$ sind. Aus den drei ersten erhält man

$$\xi = A_0^{\frac{1}{3}},\ C_2 = A_2A_0^{-\frac{2}{3}},\ C_3 = A_3A_0^{-1},$$

so daß wir nach Substitution dieser Werte in die vierte Form unmittelbar die Relation dritten Grades erhalten:

$$A_6 = (A_3^2 + 4A_2^3)A_0^{-2}$$

oder

$$Q^2 - Rf^2 + 4\Delta^3 = 0,$$

eine Gestalt, welche sie schon von Cayley erhalten hat.

Für $n = 4$ erhält man fünf irreduzible Grundformen, nämlich f, H, T, i und j, die demnach ebenfalls durch $5 - 4 = 1$ Relation verbunden sind. Die Leitglieder dieser Formen sind:

$$A_0 = f = \xi^4,\ A_2 = H = C_2\xi^4,\ A_3 = T = C_3\xi^6,$$

$$A_4 = J_2 = i = C_4 + 3C_2^2 \text{ und } A_6 = J_3 = j = C_2C_4 - C_2^3 - C_3^2,$$

woraus folgt:

$$\xi = f^{\frac{1}{4}},\ C_2 = Hf^{-1},\ C_3 = Tf^{-\frac{3}{2}},\ C_4 = J_2 - 3H^2f^{-2}.$$

Die Substitution der gefundenen Werte in das Leitglied $A_6 = J_3$ führt schließlich zu der Relation vierten Grades:

$$-T^2 = J_3 f^3 + 4H^3 - J_2 f^2 H,$$

die ebenfalls schon von Cayley angegeben worden ist.

Ebenso einfach lassen sich auch die Syzygien der Formen fünfter und sechster Ordnung angeben, sobald nur die Leitglieder in Funktion der Semiinvarianten C dargestellt sind. Dabei zeigt sich, daß sich die Relationen von höherem als dem dritten Grad mit Hilfe der vorher gefundenen auf solche niedrigeren Grades zurückführen lassen.

§ 6.

Die Invarianten und Semiinvarianten des ternären Gebiets.

Die Invarianten der ternären Form

$$f = a_0 z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} f_1 + \binom{n}{2} z^{n-2} f_2 + \cdots + f_n,$$

wo $f_1, f_2, \cdots, f_n$ binäre Formen erster, zweiter, $\cdots$, n^{ter} Ordnung bedeuten sollen, genügen nach Forsyth*) sechs charakteristischen Differentialgleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} D_1 = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \left(2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}}\right) + \left(3a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} + 2a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} + a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}}\right) + \cdots = 0, \\ D_2 = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \left(2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}}\right) + \left(3a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{222}} + 2a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} + a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}}\right) + \cdots = 0, \\ D_3 = n a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1)\left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\right) + (n-2)\left(a_{111} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + \cdots\right) + \cdots = 0, \\ D_4 = n a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1)\left(a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\right) + (n-2)\left(a_{222} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} + \cdots\right) + \cdots = 0, \\ D_5 = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} + 2a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} + a_{111} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} + 2a_{112} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} + 3a_{122} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{222}} + \cdots = 0, \\ D_6 = a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} + 2a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + a_{222} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} + 2a_{122} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} + 3a_{112} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} + \cdots = 0 \end{cases}$$

und befriedigen außerdem in identischer Weise noch die beiden folgenden

$$(9^*)\quad \begin{cases} D_7 = n a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1) a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-2) a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + (n-2) a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} \\ \qquad + (n-3) a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} + (n-4) a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} + \cdots = 0, \\ D_8 = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 2a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} - 2a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} + 3a_{111} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} + a_{112} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} \\ \qquad - a_{122} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} - 3a_{222} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{222}} + 4a_{1111} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{1111}} + \cdots = 0. \end{cases}$$

*) Am. J. XII, S. 1—60, 115—160 (1889) (Ternarianten).

Neben $D_7 = 0$ existiert noch eine zweite Gleichung $D_7' = 0$, die aus dieser durch Vertauschung der Indizes hervorgeht.

Bezeichnet man nach dem Vorgang im binären Gebiet alle Funktionen $\varphi(a)$ der Koeffizienten von f, welche den beiden Differentialgleichungen

$$D_1 = 0 \quad \text{und} \quad D_2 = 0,$$

nicht aber zugleich den beiden folgenden

$$D_3 = 0 \quad \text{und} \quad D_4 = 0,$$

genügen, als *Semiinvarianten* von f, so erhält man neben $C_0 = a_0$ noch $n - 1$ Gruppen von gemeinsamen partikulären Lösungen der beiden Gleichungen $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$, nämlich

$$(10) \quad \begin{cases} C_{11} = a_0 a_{11} - a_1^2, \\ C_{12} = a_0 a_{12} - a_1 a_2, \\ C_{22} = a_0 a_{22} - a_2^2, \\ C_{111} = a_0^2 a_{111} - 3 a_0 a_1 a_{11} + 2 a_1^3, \\ C_{112} = a_0^2 a_{112} - a_0 a_2 a_{11} - 2 a_0 a_1 a_{12} + 2 a_1^2 a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{222} = a_0^2 a_{222} - 3 a_0 a_2 a_{22} + 2 a_2^3 \\ \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

deren Anzahl im ganzen $\sigma = \frac{(n+4)(n-1)}{2}$ beträgt.

Die Lösungen jeder Gruppe gehen aus der ersten in derselben enthaltenen, die mit der entsprechenden Funktion C des binären Gebiets übereinstimmt, mittels des Differentialprozesses D_6 oder aus der letzten mittels des Prozesses D_5 in (9) hervor. Dabei gelten für die Gruppe vom Gewicht k die Beziehungen

$$(11) \quad \begin{cases} C_{k-1,1} = \frac{1}{k} D_6(C_{k,0}), \\ C_{k-2,2} = \frac{1}{k-1} D_6(C_{k-1,1}), \\ C_{k-3,3} = \frac{1}{k-2} D_6(C_{k-2,2}), \\ \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ C_{0,k} = D_6(C_{0,k-1}). \end{cases}$$

Wie leicht zu erkennen, verschwinden sämtliche Lösungen C identisch, sobald man die Koeffizienten a der Form f einander gleichsetzt. Da sich alle übrigen Semiinvarianten und Invarianten von f durch die C darstellen lassen, so gilt auch hier der Satz: Die algebraische Summe der Zahlenkoeffizienten einer Invariante und Semiinvariante ist gleich Null.

Da ferner für $a_1 = a_2 = 0$ jede Lösung C bis auf eine Potenz von a_0

in den entsprechenden Koeffizienten von f übergeht, indem man hierfür erhält

$$C_0 = a_0,\ C_{11} = a_0 a_{11},\ C_{12} = a_0 a_{12},\ C_{22} = a_0 a_{22},\ \cdots,$$

so gilt für jede Semiinvariante oder Invariante in identischer Weise die Beziehung

$$(12) \qquad \varphi(a_0;\ a_1, a_2;\ a_{11}, a_{12}, a_{22};\ \cdots) = \varphi\left(C_0;\ 0, 0;\ \frac{C_{11}}{C_0}, \frac{C_{12}}{C_0}, \frac{C_{22}}{C_0};\ \cdots\right).$$

Führt man die Originalform $f(xyz)$ durch die Substitution

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \zeta - \frac{a_1}{a_0}\xi - \frac{a_2}{a_0}\eta,$$

deren Determinante $\Delta = 1$ ist, in die Form $F(\xi, \eta, \zeta)$ mit verschwindenden zweiten Koeffizienten über, so stimmen die Koeffizienten bis auf Potenzen von a_0 mit den Funktionen $C_0, C_{11}, C_{12}, C_{22}, \cdots$ überein.

In den Lösungen C der Differentialgleichungen $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ ausgedrückt, nimmt beispielsweise die Invariante D der ternären Form zweiter Ordnung

$$D = a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} - 2 a_1 a_2 a_{12} + a_0(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$$

die einfache Gestalt an

$$D = C_0^{-1}(C_{11} C_{22} - C_{12}^2).$$

Eine Semiinvariante φ von f, d. h. also eine gemeinsame Lösung der Differentialgleichungen $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$, geht in eine Invariante von f über, sobald sie außerdem noch den übrigen Gleichungen (9) und (9*) genügt, oder sobald sie isobarisch und vom nämlichen Gewicht $\mu = \mu_1 = \mu_2$ hinsichtlich der Indizes 1 und 2 ist und die Bedingung befriedigt: $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}\varrho n$, wo ϱ den Grad der Invariante und n die Ordnung der Form f bedeutet.

Führt man in die Differentialgleichungen (9) an Stelle der Koeffizienten a von f die Lösungen C als Veränderliche ein, so werden dieselben auf die folgenden zurückgeführt:

$$(13)\quad \begin{cases} D_3 = (n-1)(C_{11}\delta_1 + C_{12}\delta_2) + (n-2)\left(C_{111}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{11}} + C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{12}} + C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{22}}\right) + \cdots = 0, \\ D_4 = (n-1)(C_{22}\delta_2 + C_{12}\delta_1) + (n-2)\left(C_{222}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{22}} + C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{12}} + C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{11}}\right) + \cdots = 0, \\ D_5 = C_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{12}} + 2C_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{22}} + C_{111}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{112}} + 2C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{122}} + 3C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{222}} + \cdots = 0, \\ D_6 = C_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{12}} + 2C_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{11}} + C_{222}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{122}} + 2C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{112}} + 3C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{111}} + \cdots = 0, \\ D_7 = nC_0\frac{\partial\varphi}{\partial C_0} + (2n-2)C_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{11}} + (2n-3)C_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{12}} + (2n-4)C_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{22}} + \cdots = 0, \\ D_8 = 2C_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{11}} - 2C_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{22}} + 3C_{111}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{111}} + C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{112}} - C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{122}} \\ \qquad\qquad - 3C_{222}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{222}} + \cdots = 0 \end{cases}$$

wo $C_0 = a_0 = 1$ und

$$\delta_1 = -\left(3C_{111}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{111}} + 2C_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{112}} + C_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{122}}\right)$$
$$-\left(4C_{1111}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{1111}} + 3C_{1112}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{1112}} + 2C_{1122}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{1122}} + C_{1222}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{1222}}\right) - \cdots$$

gesetzt ist und δ_2 aus δ_1 durch Indizesvertauschung hervorgeht.

Die vorstehenden Gleichungen bieten das Mittel dar, den algebraischen Ausdruck einer ternären Invariante zu berechnen. So nimmt beispielsweise, als Funktion der C dargestellt, die Invariante vierten Grades der ternären Form dritter Ordnung (von Aronhold*) im Jahre 1858 berechnet) die Gestalt an, worin $C_0 = a_0 = 1$ gesetzt ist:

$$S = C_{11}C_{112}C_{222} + C_{22}C_{122}C_{111} - C_{11}C_{122}^2 - C_{22}C_{112}^2 - C_{12}C_{111}C_{222}$$
$$+ C_{12}C_{112}C_{122} + C_{12}^4 + C_{11}^2C_{22}^2 - 2C_{12}^2C_{11}C_{22}$$

oder

$$S = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{22} \\ C_{111} & C_{112} & C_{122} \\ C_{112} & C_{122} & C_{222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix}^2.$$

§ 7.

Die Bedingungen des Zerfallens einer ternären Form in Linearfaktoren.

In seinen früheren Arbeiten**) über symmetrische Funktionen hat der Verfasser die Bedingungen ermittelt, durch welche das Zerfallen einer Ternärform in Linearfaktoren gewährleistet wird, und gewisse Differentialgleichungen für dieselben aufgestellt, ohne damals den Zusammenhang mit der Invariantentheorie herzustellen und zu entscheiden, ob jene Bedingungen als Invarianten oder Semiinvarianten aufzufassen wären. Dieser Teil der Aufgabe soll im nachfolgenden gelöst und gleichzeitig jene Bedingungen für die einfacheren Fälle in Funktion der Lösungen C dargestellt werden.

Die ternäre Form n^{ter} Ordnung

$$f = z^n + \binom{n}{1}z^{n-1}(a_1x + a_2y) + \binom{n}{2}z^{n-2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \cdots$$

zerfällt in die Linearfaktoren

$$z + \alpha_1x + \beta_1y,\ z + \alpha_2x + \beta_2y,\ \cdots,\ z + \alpha_nx + \beta_ny,$$

wenn die Bedingungen erfüllt sind:

*) Crelles J. 1858, S. 116.

**) Math. Ann. 43, S. 226—270 und 45, S. 1—84.

$$(14)\quad \begin{cases} \sum \alpha_1 = \binom{n}{1} a_1, & \sum \beta_1 = \binom{n}{1} a_2; \\ \sum \alpha_1 \alpha_2 = \binom{n}{2} a_{11}, & \sum \alpha_1 \beta_2 = 2\binom{n}{2} a_{12}, \quad \sum \beta_1 \beta_2 = a_{22}; \\ \sum \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \binom{n}{3} a_{111}, & \sum \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 = 3\binom{n}{3} a_{112}, \cdots, \sum \beta_1 \beta_2 \beta_3 = \binom{n}{3} a_{222}; \\ \quad \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = a_{n,0}, & \sum \alpha_1 \alpha_2 \cdots \beta_n = n a_{n-1,1}, \cdots, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n = a_{0,n}. \end{cases}$$

Sei nun $\varphi(a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{22} \cdots) = 0$ eine der Bedingungen des Zerfallens der Form f, so geht dieselbe alsbald in eine Identität über, wenn man darin an Stelle der a mittels der Beziehungen (14) deren Ausdrücke in den Koeffizienten α_i, β_i setzt und zwar unabhängig davon, welche Werte man diesen letzteren Größen auch beilegen mag. Es gilt daher identisch

$$(15)\qquad \varphi\left(\frac{\Sigma\alpha_1}{\binom{n}{1}}, \frac{\Sigma\beta_1}{\binom{n}{1}}, \frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2}{\binom{n}{2}}, \frac{\Sigma\alpha_1\beta_2}{2\binom{n}{2}}, \frac{\Sigma\beta_1\beta_2}{\binom{n}{2}}, \cdots\right) \equiv 0.$$

Wenn dies aber der Fall ist, so folgt weiter, daß die partiellen Ableitungen von φ nach sämtlichen Koeffizienten α_i, β_i ebenfalls identisch verschwinden müssen; es ist daher auch

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} = 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} = 0, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n} = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} = 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2} = 0, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_n} = 0, \end{cases}$$

wie man leicht sieht, wenn man in φ die Koeffizienten α_i, β_i um gewisse Größen λ_i, μ_i wachsen oder abnehmen läßt und die veränderte Funktion φ mittels des Taylorschen Satzes nach Potenzen und Produkten von λ_i, μ_i entwickelt.

Von den Gleichungen (16) ausgehend, gelingt es nun im Verein mit den Beziehungen (14) leicht, für die Funktion φ die Differentialgleichungen

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0$$

sowie

$$D_5 = 0 \quad \text{und} \quad D_6 = 0$$

nachzuweisen und auf diese Weise zu zeigen, daß die Bedingungen im allgemeinen wohl den Charakter von Semiinvarianten, nicht aber den von wirklichen Invarianten besitzen. Denn durch Addition der Gleichungen (16) ergibt sich einerseits

$$(17)\qquad \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = 0, \quad \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} = 0,$$

und wenn man jede der Gleichungen vorher noch mit den entsprechenden Koeffizienten α_i oder β_i multipliziert, andererseits

$$(17^*) \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \alpha_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \beta_i = 0.$$

Dies sind aber dieselben Gleichungen, die der Verfasser schon früher für die Bedingungen φ auf anderem Wege aufgestellt hat. Diese gehen sofort in die Differentialgleichungen $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ bezw. $D_5 = 0$, $D_6 = 0$ über, wenn man vermittels der Beziehungen (14) die Koeffizienten a an Stelle der α, β als Veränderliche einführt. Da sich wohl diese Gleichungen, die für die Semiinvarianten charakteristisch sind, nicht aber die folgenden $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ nachweisen lassen, durch welche die Invarianz von φ erwiesen wäre, so folgt, daß die Bedingungen des Zerfallens der Form f in Linearfaktoren, im allgemeinen betrachtet, nicht als Invarianten, sondern als Semiinvarianten von f aufzufassen sind, ein Resultat, auf das auch schon aus dem Umstand geschlossen werden kann, daß die Bedingungen φ hinsichtlich der Indizes 1 und 2 verschiedene Partialgewichte μ_1 und μ_2 besitzen und infolgedessen auch nicht der Bedingung $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3} \varrho n$ genügen, die für eine Invariante erfüllt sein muß.

§ 8.

Besondere Fälle.

Im nachfolgenden ist der Koeffizient $a_0 = C_0 = 1$ gesetzt worden.

a) Die ternäre quadratische Form

$$f = z^2 + 2zf_1 + f_2$$

zerfällt in Linearfaktoren, wenn die Bedingung dritten Grades erfüllt ist:

$$II_{22} = D = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = 0,$$

die zugleich auch die einzige Invariante der quadratischen Form ist.

b) Die ternäre Form

$$f = z^3 + 3z^2 f_1 + 3zf_2 + f_3$$

zerfällt in Linearfaktoren, wenn die Bedingungen vierten Grades erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
III_{32} &= C_{11} C_{122} - 2 C_{12} C_{112} + C_{22} C_{111} &&= 0, \\
III_{23} &= C_{22} C_{112} - 2 C_{12} C_{122} + C_{11} C_{222} &&= 0, \\
III_{42} &= C_{112}^2 - C_{111} C_{122} + 4 C_{11} II_{22} &&= 0, \\
III_{33} &= C_{112} C_{122} - C_{111} C_{222} + 8 C_{12} II_{22} &&= 0, \\
III_{24} &= C_{122}^2 - C_{222} C_{112} + 4 C_{22} II_{22} &&= 0,
\end{aligned}$$

die sämtlich Semiinvarianten sind, da sie weder den Gleichungen $D_3 = 0$, $D_4 = 0$, noch der Bedingung $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3} \varrho n$ genügen.

c) Für das Zerfallen der ternären Form vierter Ordnung gelten die Bedingungen fünften Grades:

$$IV_{42} = C_{11}C_{1122} - 2C_{12}C_{1112} + C_{22}C_{1111} - 3(C_{112}^2 - C_{111}C_{122}) - C_{11}II_{22} = 0,$$

$$IV_{33} = 2C_{11}C_{1222} - 4C_{12}C_{1122} + 2C_{22}C_{1112} - 3(C_{112}C_{122} - C_{111}C_{222}) - 12C_{12}II_{22} = 0,$$

$$IV_{52} = C_{111}C_{1122} - 2C_{112}C_{1112} + 2C_{122}C_{1111} - 9C_{11}(C_{11}C_{122} - 2C_{12}C_{112} + C_{22}C_{111}) = 0,$$

$$IV_{43} = 2C_{111}C_{1222} - 3C_{112}C_{1122} + C_{222}C_{1111} - 6C_{12}(2C_{12}C_{112} + C_{22}C_{111}) - 3C_{11}(C_{11}C_{222} + C_{22}C_{112}) = 0$$

und außerdem noch

$$IV_{24} = 0, \quad IV_{34} = 0, \quad IV_{25} = 0,$$

die aus den vorhergehenden durch Vertauschung der unteren Indizes hervorgehen.

Stuttgart, im August 1906.

The groups which contain less than six cyclic subgroups of the same order.

By

G. A. Miller of Urbana, U. S. A.

It is sometimes possible to determine the largest number of the cyclic subgroups of the same order that can occur in a given group. The considerations in regard to such a group would be greatly simplified by a knowledge of some properties of all the groups containing a given number of cyclic subgroups. While this problem becomes quite complex for large numbers the small numbers of possible cyclic subgroups present no serious difficulties. Incidently the following investigation establishes several theorems of considerable interest. Among these are the following: There is no group which contains one and only one cyclic and also one and only one non-cyclic subgroup of the same order. If a group of order 2^m contains exactly four cyclic subgroups of the same order which transform two of their number into themselves and permute the other two, the order of the group is 32. The symmetric group of order 24 is completely defined by the fact that it is generated by three cyclic subgroups of order 4 which are non-invariant and do not contain a common subgroup of order 2 nor generate other operators of order 4.

§ 1.

Preliminary considerations.

Let the order of a cyclic subgroup (C) contained in any group (G) be represented by $c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$, where $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$ are distinct primes and $p_1 < p_2 < \cdots < p_\lambda$. We shall first prove that G contains at least p_1 cyclic subgroups of order c whenever it contains more than one cyclic subgroup of this order. If G contains less than $p_1 + 1$ such subgroups each is transformed into itself by every other one and hence they generate the direct product of Sylow subgroups. As at least one of these

must be non-cyclic, its order is $p_1^{\alpha_1+1}$, where $\alpha_1 > 1$.*) That is, *if a group contains exactly p_1 cyclic subgroups of order c the order of the group is divisible by p_1^3 and these cyclic subgroups generate one of two known groups of order cp_1 when either $p_1 > 2$ or $\alpha_1 > 2$.* When $\alpha_1 = p_1 = 2$ there is only one such group and there is no such group when $\alpha_1 = 1$ or 0.

Suppose that G contains less than p_λ cyclic subgroups of order c. We proceed to prove that its Sylow subgroup whose order is a power of p_λ is cyclic. If this were not the case G would contain an operator whose order would be a power of p_λ and which would not be contained in any of the cyclic subgroups of order c. As such an operator would transform each of these cyclic subgroups into themselves it would be commutative with all of their operators whose orders divide $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{\lambda-1}^{\alpha_{\lambda-1}}$. Hence there would be at least p_λ cyclic subgroups of order c which is contrary to the hypothesis. That is, *if G contains less than $p_\lambda > 2$ cyclic subgroups of order c its Sylow subgroup of order p_λ^m is cyclic.*

It will now be assumed that G contains only one cyclic subgroup C of order c and at least one non-cyclic subgroup of this order. We proceed to prove that it contains at least p_1 non-cyclic subgroups of order c. There must be at least one operator s in a Sylow subgroup of the given non-cyclic subgroup of order c such that s^p is in C while s is not in C. The subgroup of order c/p in C together with s generates a group of order c. This is non-cyclic since s cannot be commutative with all the operators of C whose orders are prime to p, otherwise there would be more than one cyclic subgroup of order c in G. The subgroup which has just been found does not involve the operators of C whose order is the highest power of p which divides c. The remaining $p-1$ non-cyclic subgroups of order c may be found by using in place of s the products of s into the first $p-1$ powers of an operator of the highest power of p contained in c.

From the preceding paragraph it follows that if G contains only one cyclic and p_1 non-cyclic subgroups of order c than must these p_1+1 subgroups af order c have the Sylow subgroups of orders $p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ in common and generate a group of order cp_1. This common subgroup and the cyclic subgroup of order $p_1^{\alpha_1}$ in C constitute two invariant subgroups having only the identity in common. Hence this group of order cp_1 may be constructed by establishing a $(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda})$-isomorphism between the Sylow group of order $p_1^{\alpha_1+1}$ and the non-cyclic groups of order $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ which contain the cyclic group of order $p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ invariantly. The number of the latter is clearly equal to the number of

*) Transactions of the American Mathematical Society, vol. 7 (1906), p. 228.

combinations of the primes $p_2, \cdots, p_i$ which are congruent to 1 mod p_1. As the non-cyclic groups of order $p_1^{\alpha_1+1}$ contain a cyclic subgroup of order $p_1^{\alpha_1}$ there is just one such group when $\alpha_1 = 1$. When $\alpha_1 > 1$ and $p_1 > 2$ there are two such groups, when $p_1 = 2$ there are 3 or 5 groups as $\alpha_1 = 2$ or $\alpha_1 > 2$. The preceding systems are composed of *all the possible groups which involve only one cyclic and* p_1 *non-cyclic subgroups of order* c *and are generated by these subgroups.*

The main results of the precedings paragraphs may be stated as follows: There is no group which contains one and only one cyclic and also one and only one non-cyclic subgroup of the same order. If a group contains more than one cyclic subgroup of a given order c the number of these subgroups is at least equal to the smallest prime p_1 which divides c, and when this number is p_1 these subgroups generate a group of order cp_1 which involves only one non-cyclic subgroup of order c and c is divisible by p_1^2. If a group contains only one cyclic subgroup of order c it contains either none or at least p_1 non-cyclic subgroups of this order. If such a group contains exactly p_1 non-cyclic subgroups of order c these generate a group of order cp_1 and p_1 divides the remainder obtained by diminishing at least one of the other prime factors of c by unity.

It is now easy to determine all the groups which contain exactly two cyclic subgroups of order c and are generated by these subgroups. From the above theorems it follows that c is divisible by 4. When $c = 4m$ where m is any odd number there is one and only one such group for every value of m. This group is clearly the direct product of the abelian group of order 8 and of type (2, 1) and the cyclic group of order m. Moreover every such direct product contains just two cyclic subgroups of order $4m$ and is generated by them. When $c = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, there are just two such groups for every value of m. The order of these two groups is $2^{\alpha+1}m$ and one of them is abelian while the other is non-abelian. They are again direct products of the cyclic group of order m and the non-cyclic groups of order $2^{\alpha+1}$ which involve two cyclic subgroups of order 2^α.

As these are the only groups which can be generated by two such subgroups it follows that every group which contains exactly two cyclic subgroups of the same order contains one of the given groups of order $8m$ or $2^{\alpha+1}m$ as a characteristic subgroup. For instance, there is one such group of each of the orders 8, 24, 40, $\cdots$ while there are two of each of the orders 16, 32, 48, $\cdots$. These infinite systems of elementary solvable groups are therefore completely defined by the fact that they contain exactly two subgroups of order c and are generated by these subgroups.

§ 2.

Groups containing exactly three cyclic subgroups of the same order.

When this order c is odd it must be of the form $9m$, where m is any odd number. It has been proved above that there are two groups for every possible value of m which are generated by the three cyclic subgroups of order $9m$. The order of these two groups is $27m$ and one is abelian while the other is non-abelian. The groups are generated by the cyclic group of order $9m$ and an operator of order 3 which is commutative with each operator in the subgroup of order $3m$. If this operator is also commutative with the remaining operators of the cyclic subgroup the resulting group is abelian; if this is not the case it is non-abelian.

The group H generated by the three cyclic subgroups of order c either transforms each one of them into itself or it transforms them according to the symmetric group of order 6. The former condition is satisfied in all the direct products obtained by using the groups of the preceding paragraph as one factor and the cyclic group of order 2^α, where α is arbitrary, as the other. Moreover, if the Sylow subgroup of order 3^k in H is non-cyclic that of order 2^l must be cyclic*) and hence the above gives all the possible groups when the three cyclic groups of order c are invariant under H and the Sylow subgroup of order 3^k is non-cyclic.

When the Sylow subgroup of order 3^k is cyclic that of order 2^l may clearly be either the four group or the quaternion group. That is, H may be the direct product of any cyclic group of odd order and either the four group or the quaternion group. It is easy to see that these are the only values of H when its cyclic subgroups of order c are commutative. That is, *if a group contains exactly three cyclic subgroups of the same order and these are commutative they generate either the direct product of the four group or the quaternion group into a cyclic group of odd order, or they generate the direct product of a cyclic group into one of the non-cyclic groups of order* 3^k *which involves operators of order* 3^{k-1}, $k > 2$.

It remains to consider the case when H transforms the three cyclic subgroups of order c according to the symmetric group (S) of order 6. In this case $p_1 = 2$ and the subgroup of C which corresponds to the identity in S is of order $c/2$. The subgroup of order $p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ contained in C is common to the three cyclic subgroups of order c, otherwise these

*) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 2 (1904), p. 142.

three cyclic subgroups would not be conjugate under H. Moreover, the cyclic subgroup of order 2^{α_1-1}, $\alpha_1 > 3$, is also common since only one cyclic subgroup of order c can correspond to a subgroup of order 2 in S. When $\alpha_1 > 3$, it is therefore only necessary to consider the group generated by two operators of order 2^{α_1} which have a common square. Since each of these operators transforms into its inverse the product of one into the inverse of the other*) and since all the operators of odd order in H are commutative with this product it follows that the order of this product is of the form $3 \cdot 2^k$.

If $k > 1$ the two operators of order 2^{α_1} would generate a group involving more than three cyclic subgroups of order 2^{α_1}. If $k = 1$ these operators may be so chosen as to make $k = 0$. Hence we may assume that $k = 0$ and there is one and only one such group for every value of α_1. That is, *if the three cyclic subgroups of order c are conjugate under H and if $\alpha_1 > 3$, then H is the direct product of any cyclic group of odd order and the group of order $3 \cdot 2^{\alpha_1}$ generated by two operators of order 2^{α_1} which have a common square.*

When the generators s_1, s_2 of two subgroups of order 2^{α_1} in the cyclic groups of order c do not have a common square they may be of order 4 or 8. In the latter case their squares generate the quaternion group. This must be invariant under H since each operator of the cyclic group of order $p_2^{\alpha_2} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ is invariant under H and hence H can involve only three cyclic subgroups of order 8. The product $s_1 s_2^{-1}$ is transformed into $s_2^{-1} s_1$ by s_1 or s_2. Since $s_2^{-1} s_1 = s_2^{-2} (s_1 s_2^{-1})^{-1} s^2$, it follows that the given quaternion group and $s_1 s_2^{-1}$ generate a group which is transformed into itself by s_1 and s_2. It also follows that $s_1^{-1} (s_1 s_2^{-1})^n s_1 = t (s_1 s_2^{-1})^{-n}$, where t is an operator of the above quaternion group. If $n = 12$ each member of this equation is $(s_1 s_2^{-1})^{12}$. Hence $(s_1 s_2^{-1})^{12} = 1$, since this operator is of odd order and s_1 is commutative with every operator of odd order that corresponds to the identity in S. In fact, each of these operators of odd order is invariant under H.

The order of $s_1 s_2^{-1}$ cannot be 12 since $s_1 s_2^{-1}$ is not commutative with the operators of order 4 in the invariant quaternion group which corresponds to the identity in S, and this quaternion group includes all the operators of H whose orders are powers of 2 and which correspond to the identity in S. It may therefore be assumed that $s_1 s_2^{-1}$ is of order 3 and that s_1, s_2 generate one of the two groups of order 48 which involve just 3 cyclic subgroups of order 8 and are generated by these subgroups. One of these is the group of isomorphisms of the non-cyclic group of order 9.

*) Archiv der Mathematik und Physik, vol. 9 (1905), p. 6.

Hence H is the direct product of one of these two groups and any cyclic group of odd order whenever its three cyclic subgroups of order c are non-commutative and involve subgroups of order 8 which do not contain a common subgroup of order 4.

It remains only to consider the case when the three non-commutative subgroups of order c involve operators of order 4 which do not have a common square. Just as in the preceding case it follows that only three subgroups of the order s_1^2 correspond to the identity in S and that these subgroups involve all the operators of an invariant group under H. In the present case this is the four group and $s_1 s_2^{-1}$ is of order 3. Hence the two operators s_1, s_2 of order 4 which are in two of the three cyclic subgroups of order c generate the symmetric group of order 24. This symmetric group is therefore completely defined by the fact that it is generated by three non-invariant cyclic subgroups of order 4 which do not contain a common subgroup of order 2 and that it contains no other operators of order 4.

Combining these results we have the following theorem: *If a group contains exactly three cyclic subgroups of order c and is generated by them it is either the direct product of its Sylow subgroups or it is the direct product of a cyclic group of odd order and one of the following: the group of order* $2^{\alpha_1} \cdot 3$ *which is generated by two operators of order* 2^α *having a common square; the symmetric group of order* 24*; or one of the two groups of order* 48 *which contain just three cyclic subgroups of order* 8 *and are generated by these subgroups.*

§ 3.

The groups which contain exactly four cyclic subgroups of the same order.

We shall first consider the case when each of these four cyclic subgroups is transformed into itself by the other three, that is, when each of three subgroups is invariant under H. That such an H is the direct product of its Sylow subgroups follows directly from the fact that if a cyclic group whose order is a power of a prime is transformed into itself by an operator whose order is a power of a larger prime then each operator of the cyclic group is transformed into itself. As the number of cyclic subgroups of any order in a non-cyclic Sylow group of order p^m, $p > 2$, is at least equal to p*), it follows that c is divisible by 2 or 3, and that H has either a non-cyclic Sylow subgroup of oder 2^m or one of order 9.

*) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 2 (1904), p. 142.

Hence it remains only to determine the groups of order 2^m which contain exactly four cyclic subgroups of order 2^{α_1} and are generated by these subgroups. If such a group is abelian it is either of type $(m-2, 2)$ or of type $(m-2, 1, 1)$. Both of these groups exist for every value of $m > 4$. When $m = 4$ the former does not exist and neither is possible for smaller values of m. When the group of order 2^m is non-abelian and is generated by two of its operators of order 2^{α_1} the fourth powers of these operators generate the same cyclic subgroup, but their squares do not have this property. In this case there are also two possible groups when $m > 5$. When $m = 5$ there is only one such group and for smaller values of m there is none. These two groups are conformal with the abelian group of type $(m-2, 2)$.

Finally, there are two non-abelian groups of order 2^m, $m > 4$, in which the four invariant cyclic subgroups of order 2^{α_1} have 2^{α_1-1} common operators. One of these involves invariant operators of order 2^{α_1} while all the invariant operators of the other are of lower orders. The latter does not exist when $m = 4$. Hence *there are six groups of order* 2^m, $m > 5$, *which involve exactly four cyclic invariant subgroups of order* 2^{α_1} *and are generated by these subgroups.* In each of these groups $m = \alpha_1 + 2$. When $m = 5$ there are only five such groups and their number reduces to two when $m = 4$. Since the number of operators of order 2 in any group of even order is odd there is no such group whem $m < 4$.

The group H may be the direct product of any one of these six groups and any cyclic group of odd order. If this is not the case H must be the direct product of the non-cyclic group of order 9 and a cyclic group whose order is prime to 3. Hence there are at most seven distinct groups of a given order such that each group involves four invariant cyclic subgroups of the same order, is generated by them, and does not involve any operators of this order besides those which are contained in these subgroups. All of these seven groups are only possible when the order of H is of the form $9h$, where h is both prime to 3 and divisible by 64. The smallest order for which all exist is therefore 576. There is no such group unless the order is either of the form $16k$ or of the form $9h$, where h is prime to 3. This completes the determination of the group when each of the four cyclic subgroups of order c is invariant under H.

When the four cyclic subgroups of order c form a single set of conjugates under H they are transformed by H according to a transitive substitution group of degree four, which is generated by its substitutions whose degree is less than four. This could not be the symmetric group since a cyclic group cannot have an $(\alpha, 1)$ isomorphism with the sym-

metric subgroup of order 6 nor could one of the four cyclic groups of order c correspond to a subgroup of order 2 in this symmetric group. Hence H transforms the four conjugate subgroups of order c according to the alternating group of degree 4. We shall represent this alternating group by S.

The operators of order 2^β in one of the four subgroups of order c transform each of the others into itself since no such operator could correspond to an operator of order 2 in S. Hence each of these operators is commutative with every operator of H. This statement follows directly from the following elementary theorem: *If a cyclic group of order p^α, p being a prime, is transformed into itself by an operator s whose order is prime to p then s is either commutative with each of the operators of this cyclic group or the orders of all the products obtained by multiplying s into these operators are prime to p.* From this it follows that the subgroup of H which corresponds to the identity in S is composed of its operators which are invariant under H.*) Moreover, H is the direct product of the group generated by its operators whose orders are of the form $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$, $\alpha_2 > 0$, and a cyclic group whose order is prime to 6.**)

It remains to determine the groups generated by two operators s_1, s_2 of order $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ which generate a group having an $(a, 1)$ isomorphism with S and which has exactly four cyclic subgroups of order $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$. Since only one cyclic subgroup of order $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ can correspond to a subgroup of order 3 in S, it may be assumed that $s_1^3 = s_2^3$. We are therefore concerned with a special class of the groups which are generated by two operators having a common cube. Since the operators which correspond to the identity of S are invariant under H it may be assumed that the order of $s_1 s_2^{-1}$ is a power of 2. We proceed to prove the interesting fact that this order is either 2 or 4. To do this, it will be merely necessary to consider the conjugates of $s_1 s_2^{-1}$ under s_1, viz. the three operators $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$. From the fact that the product of the last two is $s_2^{-2} s_1^2 = s_2 s_2^{-3} s_1^2 = s_2 s_1^{-1} =$ the inverse of $s_1 s_2^{-1}$, it follows that this product is of the same order as $s_1 s_2^{-1}$. Moreover, $(s_1 s_2^{-1})^2$ corresponds to the identity of S and hence is commutative with s_1. That is, the three operators $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$ have a common square. Each of them is transformed into a power of itself by the others since the abelian Sylow subgroup of order 2^{α_1+1} which corresponds to a subgroup of order 2 in S cannot have more than 2 cyclic subgroups of 2^{α_1} and if there are two, one of them corresponds to the identity in S.

---

*) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 7 (1901), p. 360.

**) Transactions of the American Mathematical Society, vol. 1 (1900), p. 66.

From the considerations of the preceding paragraph it follows that the commutator subgroup of the group generated by $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$ is either of order 2 or the identity.*) As these operators have a common square the product of the fourth powers of any two is equal to the fourth power of their product. Hence their order cannot exceed 4 when the product of two is of the same order as one of them. In fact it follows directly that $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$ generate either the four group or the quaternion group.

Suppose that $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$ generate the four group. In this case H contains this invariant subgroup and also the invariant subgroup generated by s_1^3. As these have only the identity in common, H contains the direct product of these groups. To obtain H it is only necessary to extend this direct product by means of s_1, which transforms it into itself and has its cube in it. All of these groups may also be obtained by etablishing a $(4, 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2 - 1})$-isomorphism between the alternating group of order 12 and the cyclic group of order $2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2}$. It is also clear that one and only one such group exists for every value of α_1 and for every value of $\alpha_2 > 0$.**)

When $s_1 s_2^{-1}$, $s_2^{-1} s_1$, $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1^2$ generate the quaternion group and the order of s_1 is odd, H is again formed by extending the direct product of this quaternion group and s_1^3 by means of s_1. When the order of s_1 is 3 the resulting group is the only subgroup of order 24 in the group of isomorphisms of the non-cyclic group of order 9. In general, there is one and only one such H of order $2^3 3^{\alpha_2}$ for every value of $\alpha_2 > 0$. The same system results if we assume $\alpha_1 = 1$. In fact, each of the groups in this infinite system contains exactly four cyclic subgroups of each of the orders 3^{α_2} and $2 \cdot 3^{\alpha_2}$ and is generated by these subgroups. This system may also be obtained by establishing a $(8, 3^{\alpha_2 - 1})$-isomorphism between the given group of order 24 and the cyclic group of order 3^{α_2}. There is evidently one and only one such group for every value of $\alpha_2 > 0$.

When the order of s_1 is divisible by 4 the given quaternion subgroup and the group generated by s_1 have exactly 2 common operators. As the latter is composed of invariant operators the group which they generate is completely determined, and there is one such group for every value of $\alpha_1 > 1$ and $\alpha_2 > 0$. The group H is obtained by extending it by means of s_1 and hence is also completely determined by the values of α_1 and α_2. This system includes the preceding if we merely assume

*) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 6 (1900), p. 337.

**) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 3 (1897), p. 218.

$\alpha_1 > 0$ and $\alpha_2 > 0$. In this case there is again one and only one group for every pair of values of α_1, α_2.

What precedes proves that if a group contains exactly four conjugate cyclic subgroups and is generated by them it is the direct product of a cyclic group whose order is prime to 6 and a group belonging to one of the systems determined above. *It is therefore possible to select generators* s_1, s_2 *of any two of these subgroups such that* $s_1^3 = s_2^3$ *and that the order of* $s_1 s_2^{-1}$ *is either* 2 *or* 4. In the former case the group can be obtained by establishing a $(4, l)$-isomorphism between the alternating group of degree 4 and the cyclic group of order $3l$; in the latter case, it contains the quaternion group invariantly and may be derived as explained in the preceding paragraph.

When one of the four cyclic subgroups of order c is invariant under H while the other three are non-invariant, the latter are transformed by H according to the symmetric group of order 6. Hence the four cyclic subgroups of order c must have all their operators of odd order in common and $\alpha_1 > 1$. It is therefore possible to select two generators s_1, s_2 of two cyclic subgroups of order c so that they generate H and that $s_1^2 = s_2^2$ and $s_1 s_2^{-1}$ is of order 3. The group generated by the invariant cyclic group of order c and $s_1 s_2^{-1}$ is abelian. As s_1 may transform the former in two distinct ways if its order is divisible by 8 while it transforms $s_1 s_2^{-1}$ into its inverse, *there are just two such groups of every order which is divisible by* 48, *while there is only one for every order which is an odd multiple of* 24. The possible group of order 24 may be obtained by extending the cyclic group of order 12 by means of an operator of order 2 which transforms each operator of this cyclic group into its fifth power. In this case $c = 4$.

If two of the cyclic subgroups of order c are invariant under H the other two must also have this property whenever $\alpha_1 > 3$. If this were not the case one of these two invariant subgroups, C_1, would transform the two non-invariant subgroups C_3, C_4 among themselves. Hence C_1 and C_3 would generate a group of order $4c$. It could not be of order $2c$ since C_1 does not transform C_3 into itself. The subgroup of order $2c$ which is generated by C_1 and the square of a generator of C_3 is transformed into itself by this generator. As the order of the commutator subgroup cannot exceed 4 and as this commutator subgroup is in C_1 it must also be in C_3 whenever c is divisible by 16. As the groups of orders 16 and 32 are so well known it appears unnecessary to examine the cases when c is not divisible by 16*), and we have the result

*) The case when $\alpha_1 = 3$ will be considered incidentally in what follows.

that *if a group contains exactly four cyclic subgroups of order c and is generated by them each of these subgroups is invariant whenever at least two of them have this property and* $\alpha_1 > 3$.

It remains only to consider the case when none of the four cyclic subgroups C_1, C_2, C_2, C_4 is invariant under H and they do not form a single set of conjugates. In this case they are conjugate in pairs. We shall assume that C_1, C_2 form one pair. The group generated by C_1, C_2 is of order $2c$ and is invariant under H. Let s_1, s_2, s_3, s_4 represent a set of generators of C_1, C_2, C_3, C_4 respectively. Since $s_1^2 = s_2^{2\alpha}$ it follows that s_3^2 is in $\{C_1, C_2\}$; otherwise the group generated by C_1, C_2, s_3^2 would involve four cyclic subgroups of order c without containing s_3. Hence H is of order $4c$, and H is the direct product of a cyclic group of odd order and a group of order 2^{α_1+2}. The two groups $\{C_1, C_2\}$ and $\{C_3, C_4\}$ have all their operators whose orders are less than 2^{α_1} in common.

If $s_1^2 = s_3^2$ the order of $s_1 s_3^{-1}$ is either 4 or 8.*) In the former case each of the two groups $\{C_1, C_2\}$ and $\{C_3, C_4\}$ is abelian while each of these groups is non-abelian in the latter case. Each of these two groups exists for every value of $\alpha_1 > 3$ and they are the only possible groups when $s_1^2 = s_3^2$. When $\alpha_1 = 3$ the order of $s_1 s_2^{-1}$ is 4 and there is only one possible group of this kind.

When it is impossible to select s_1, s_3 so that $s_1^2 = s_3^2$ they may be selected so that $s_1^2 = t s_3^2$, t being an operator of order 2 in $\{C_1, C_2\}$, which is not a power of an operator of higher order. The two operators $s_1 s_3^{-1}$, $s_3^{-1} s_1$ form a complete set of conjugates under H whenever both of the subgroups $\{C_1, C_2\}$ and $\{C_3, C_4\}$ are abelian and vice versa. In this case there are just two groups for every value of $\alpha_1 > 2$. In one of these the product $s_1 s_2^{-1}$ is of order 2 and in the other it is of order 4. These two groups may also be distinguished by the fact that the operators whose orders are less than 2^{α_1} constitute the abelian subgroups of types $(\alpha_1 - 1, 1, 1)$ and $(\alpha_1 - 1, 2)$ respectively in the two groups of order 2^{α_1+2}.

If $s_1 s_3^{-1}$ has only two distinct conjugates under s_1 and four such conjugates under s_2 then $\{C_1, C_2\}$ is abelian while $\{C_3, C_4\}$ is non-abelian. The commutator subgroup of H is the cyclic subgroup of order 4 in $\{C_1, C_2\}$ which is not contained in a larger cyclic subgroup of $\{C_1, C_2\}$. There is one such group for every value of $\alpha_1 < 3$. When $\alpha_1 = 3$ the two subgroups C_1, C_2 are invariant. This is the only case when a group of order 2^m contains exactly four cyclic subgroups of the same order, is

*) Archiv der Mathematik und Physik, vol. 9 (1905), p. 6.

generated by them, and transforms exactly two of them into themselves. Hence the theorem: *If a group contains exactly four cyclic subgroups of the same order which transform two of them into themselves while they permute the other two these four subgroups generate the direct product of a fixed group of order* 32 *and a cyclic group of odd order.*

It remains only to consider the case when $s_1 s_3^{-1}$ has four distinct conjugates under both s_1 and s_3. In this case both $\{C_1, C_2\}$ and $\{C_3, C_4\}$ are non-abelian. The commutator subgroup is the non-cyclic group of order 4 in $\{C_1, C_2\}$ and there is one possible group for every value of $\alpha_1 > 2$. Hence there are six groups of order 2^m, $m > 5$, which are generated by four cyclic subgroups of order c, involving all the operators of order c, and which transform these four subgroups so that there are two pairs of conjugates. In two of these groups each of the four cyclic subgroups involves the same subgroup of half its order. In two of the remaining ones the generators of each of the two pairs of conjugate subgroups are commutative, while one such pair or no such pair are commutative respectively in the remaining two groups. The group H must therefore be the direct product of one of these six groups and a cyclic group of odd order.

§ 4.

Group containing exactly five cyclic subgroups of the same order.

If these five subgroups $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ of order c from a single set of conjugates under the group H which they generate, they are transformed by H according to the metacyclic or the semi-metacyclic group of degree 5. We shall represent these two substitution groups by T. To the identity of T there correspond all the operators of odd orders in C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Hence these five subgroups have the operators of odd order in common. To each subgroup of order 2 or 4 in T there corresponds one and only one cyclic subgroup of order 2^{α_1} in H. The five cyclic subgroups of order 2^{α_1} in H have a common cyclic subgroup of order $2^{\alpha_1 - 1}$ or $2^{\alpha_1 - 2}$ as five such subgroups could not correspond to the identity in T. Hence H is generated by two operators s_1, s_2 of order c such that $s_1^2 = s_2^2$ or $s_1^4 = s_2^4$.

In the latter case a subgroup of half the order of H is generated by two of its operators having a common square. If these operators are represented by t_1, t_2 we may assume that the order of $t_1 t_2$ is 5. Hence H contains an invariant subgroup of order 5 and also an invariant subgroup generated by s_1^2 or s_1^4 as the order of T is 10 or 20. From this it is clear that *if the five cyclic subgroups of H form a single set of con-*

jugates H may be constructed by a $(5, k)$-isomorphism between T and a cyclic group. Moreover every such isomorphism gives rise to one of the groups in question.

When each of the subgroups C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 is invariant under H, H is the direct product of its Sylow subgroups. It is therefore the direct product of a cyclic group whose order is prime to 5 and one of the two groups of order 5^m which contains just 5 cyclic subgroups of order 5^{m-1}*), since this is the only Sylow group which contains exactly 5 invariant cyclic subgroups of the same order and is generated by them.**) If only C_1 is invariant under H the other four are transformed by H according to the intransitive group of order four since all of them have the operators whose orders are powers of 3 in common. Such an H is therefore the direct product of a group of order 2^m involving just five cyclic subgroups of the same order and a cyclic group of odd order. As the group of order 2^m is also generated by these five cyclic subgroups it is either the octic group or the group of order 16 which contains just 5 subgroups of order 4.***)

The supposition that more than one of these cyclic subgroups is invariant leads to the fact that H is the direct product of its Sylow subgroups and hence to one of the groups given above. The only case that remains to be considered is when there would be two sets of conjugates containing 2 and 3 of these cyclic groups respectively. This case cannot occur since the two conjugates would have all their operators of odd order in common and hence generate a direct product of Sylow subgroups. Hence there are just three classes of groups which contain exactly five cyclic subgroups of order c and are generated by them. In one of these all these subgroups form a single set of conjugates, in the other each of them is invariant, while in the third there are two sets of conjugates each set involving two groups. The groups of the last two classes are direct products of their Sylow subgroups while those of the first are isomorphic either to the metacyclic or to the semi-metacyclic group of degree five.

*) Transactions of the American Mathematical Society, vol. 7 (1906), p. 228.

**) It may be observed that any group which is generated by a series of abelian subgroups such that each is transformed into itself by all the others is the direct product of its Sylow subgroups.

***) Transactions of the American Mathematical Society, vol. 6 (1905), p. 58.

Criteria for the irreducibility of groups of linear homogeneous transformations.

By

HENRY TABER of Worcester, U. S. A.

§ 1.

In what follows G will denote an arbitrarily given group of linear homogeneous transformations in n variables, and A the general transformation

$$x_\varkappa' = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + \cdots + a_{\varkappa n} x_n \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

of G. The group can be either continuous or discontinuous. I shall demonstrate a theorem (theorem 1 below), embodying conditions necessary and sufficient for the irreducibility of a group of linear homogeneous transformations, and supplementary to H. Maschke's well known theorem, that such a group is reducible if some one or more of the non-diagonal coefficients of the group are zero throughout in all transformations of the group.*) Further, I apply the theorem in question to show, when G is generated by infinitesimal transformations, that certain conditions not involving a knowledge of the invariants of the group, or necessarily its finite equations, are sufficient for irreducibility. See theorem 3. Finally, I show by the aid of the latter theorem that no group in n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, generated by r infinitesimal transformations

$$X_i = \xi_{i1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{in}(x)\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

whose constants of multiplication are c_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, \cdots, r)$, contains a subgroup invariant to the adjoined of G, if an integer i can be found, for each pair of distinct integers j and k from 1 to n, for which $c_{ijk} \neq 0$, and if, at the same time, the adjoined contains an infini-

*) Math. Ann., vol. 52 (1899), p. 363.

tesimal transformation $\sum_{i=1}^{r} g_i e_i \frac{\partial}{e_i}$ in which the coefficients $g_1, g_2, \cdots, g_r$ are all distinct. See theorem 4.

Conformally with the notion set forth by Cayley in his 'Memoir on Matrices'*), linear homogeneous transformations, or their matrices, will be regarded as capable of being subjected to the fundamental operations of algebra; and, in general, a linear homogeneous transformation will be identified with its matrix.

We may consider equations (1) as representing a group of deformations (linear homogeneous strains) of n-fold space; and G is termed *reducible* if there is a ν-flat $(0 < \nu < n)$ invariant to G, otherwise *irreducible*. When G is reducible, but not otherwise, the matrices of the collective transformations of G, for a proper choice of coordinates, take the form

$$A' = \begin{vmatrix} A_{11}, & 0 \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

where A_{11} and A_{22} are square matrices of order ν and $n - \nu$ respectively, and A_{12} is a rectangular matrix with $n - \nu$ rows and n columns; and, thus, we have

$$A = CA'C^{-1}, \tag{3}$$

where C represents the transformation of coordinates in question.**)

The collective coefficients of the group G may be restricted to an arbitrarily given domain of rationality. In this case, G is said to be *reducible with respect to* R if there is a ν-flat $(0 < \nu < n)$ invariant to G, the coefficients of whose equations belong to R; otherwise, *irreducible with respect to* R. If G is irreducible with respect to R, but not otherwise, we have as above $A = CA'C^{-1}$, for a properly chosen transformation C of coordinates (which may be so taken that its coefficients all belong to R), where now all the coefficients of A' belong to R.***) If G is reducible with respect to R, it is reducible with respect to the domain of all scalars real and imaginary, that is, is reducible according to the foregoing definition.

In what follows I shall denote by T_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ the transformation

$$x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, \; x_i' = x_j, \; x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0, \tag{4}$$

the coefficients of whose matrix are all zero, except that in the i^{th} row

*) Phil. Trans., 1858, p. 17; see also 'Memoir on the Automorphic Linear Transformation of a Bipartite Quadric Function', ibid., p. 39.

**) Cf. A. Loewy, Trans. Am. Math. Soc., vol. 4 (1903), p. 44.

***) Cf. A. Loewy, loc. cit., p. 59.

and j^{th} column, which is equal to unity. This transformation may be represented by the bilinear form $x_i y_j$. The n^2 transformations which we obtain by giving to i and j all integer values from 1 to n are linearly independent; and we have

$$T_{ij}\,T_{jk} = T_{ik},\quad T_{ij}\,T_{hk} = 0 \qquad (i,j,h,k = 1,2,\cdots,n;\ h \neq j). \tag{5}$$

Every linear transformation whatever in n variables may be expressed linearly in terms of these n^2 transformations; and, in particular, for the general transformation of G, we have

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,T_{ij}. \tag{6}$$

I shall denote by m the maximum number of linear independent transformations of G; and by $A_1, A_2, \cdots, A_m$, where A_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ is defined by

$$x_\varkappa' = a_{\varkappa 1}^{(i)}\,x_1 + a_{\varkappa 2}^{(i)}\,x_2 + \cdots + a_{\varkappa n}^{(i)}\,x_n \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n), \tag{7}$$

any arbitrarily chosen system of m linearly independent transformations of G. From (6), it follows that *the maximum number m of linearly independent transformations of G cannot exceed n^2*. Every transformation of G is expressible linearly in terms of $A_1, A_2, \cdots, A_m$; since, otherwise, G would contain more than m linearly independent transformations. For the general transformation A of G we have

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_m A_m, \tag{8}$$

that is,

$$a_{\varkappa\lambda} = \alpha_1 a_{\varkappa\lambda}^{(1)} + \alpha_2 a_{\varkappa\lambda}^{(2)} + \cdots + \alpha_m a_{\varkappa\lambda}^{(m)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n). \tag{9}$$

Moreover, we have

$$A_i A_j = \gamma_{ij1}\,A_1 + \gamma_{ij2}\,A_2 + \cdots + \gamma_{ijm}\,A_m \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, r), \tag{10}$$

since $A_i A_j$ is a transformation of G for every pair of values of i and j from 1 to m. From (5) and (6) we obtain

$$T_{ii}\,A\,T_{jj} = a_{ij}\,T_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n); \tag{11}$$

therefore, in particular,

$$T_{ii}\,A_h\,T_{jj} = a_{ij}^{(h)}\,T_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n;\ h = 1, 2, \cdots, m). \tag{12}$$

The totality of linear homogeneous transformations

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 A_1 + \mathfrak{a}_2 A_2 + \cdots + \mathfrak{a}_m A_m, \tag{13}$$

where $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_m$ are arbitrary scalars, constitutes a group; since, if

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 A_1 + \mathfrak{b}_2 A_2 + \cdots + \mathfrak{b}_m A_m, \tag{14}$$

we have, by (10),

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j\,\gamma_{ijk}\,A_k. \tag{15}$$

Since $A_1, A_2, \cdots, A_m$ are linearly independent, this group contains m essential parameters. Every transformation of G is a transformation of this group. Therefore, *if G contains r essential parameters $m \geqq r$.*

By a theorem of W. Burnside's, *the group G is irreducible if, and only if, $m = n^2$, that is, if, and only if, it contains n^2 linearly independent transformations.**) In what follows I shall establish, by the aid of Burnside's theorem, a theorem supplementary to Maschke's theorem referred to above. Namely, I shall show that *the group G is reducible if, and only if, either some one, or more, non-diagonal coefficients, of G are zero throughout in all transformations of G, or if the n transformations*

$$x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, \ x_i' = x_i, \ x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0,$$

for $i = 1, 2, \cdots, n$, cannot all be expressed linearly in terms of the transformations of G.

Let us first assume that G is irreducible. Then, by Burnside's theorem, $m = n^2$, that is, G contains n^2 linearly independent transformations $A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$. By (6), the transformations $A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$ are expressible linearly in terms of the n^2 linear transformations

$$T_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

namely, the n^2 transformations

$$(16) \qquad x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, \ x_i' = x_j, \ x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n);$$

and, since the former are linearly independent, the latter, in particular the n transformations T_{ii}, for $i = 1, 2, \cdots, n$, can be expressed linearly in terms of $A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$. Thus, let

$$(17) \qquad T_{ij} = c_{ij}^{(1)} A_1 + c_{ij}^{(2)} A_2 + \cdots + c_{ij}^{(n^2)} A_{n^2} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

If possible, let some one coefficient a_{hk} of the general transformation A of G be zero throughout in all transformations of this group for some definite pair of values of h and k $(1 \leqq h \leqq n, \ 1 \leqq k \leqq n)$. Then in particular,

$$a_{hk}^{(1)} = a_{hk}^{(2)} = \cdots = a_{hk}^{(n^2)} = 0;$$

and, therefore, by (5), (12), and (17),

$$\begin{aligned} T_{hk} &= T_{hh} T_{hk} T_{kk} \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} c_{hk}^{(i)} T_{hh} A_i T_{kk} \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} c_{hk}^{(i)} a_{hk}^{(i)} T_{hk} = 0, \end{aligned}$$

*) Proc. Lond. Math. Soc., 2nd ser., vol. 3 (1905), p. 433.

which is impossible. Therefore, if G is irreducible, the n transformations T_{ii} $(i=1, 2, \cdots, n)$ are expressible linearly in terms of transformations of G, and no coefficient of G is zero throughout.

Let us now assume that each of the n transformations

$$T_{ii} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

is expressible linearly in terms of transformations of G; in which case, by (8), each of these n transformations is expressible in terms of any system $A_1, A_2, \cdots, A_m$ of the maximum number of linearly independent transformations of G; thus let

$$T_{ii} = c_i^{(1)} A_1 + c_i^{(2)} A_2 + \cdots + c_i^{(m)} A_m \qquad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{18}$$

Let us also assume that no non-diagonal coefficient of G is zero throughout; in which case, for each pair of distinct integers i and j from 1 to n, an integer k can be found $(1 \leqq k \leqq m)$ such that $a_{ij}^{(k)} \neq 0$. For, otherwise, if for a assigned pair of values of i and j $(j \neq i)$,

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = \cdots = a_{ij}^{(m)} = 0,$$

then, by (9), $a_{ij} = 0$, that is, some one coefficient of G, outside the diagonal, is zero throughout in each transformation A of G, which is contrary to supposition. Therefore, for each pair of integers i and j from 1 to n, $j \neq i$, we have, by (12) and (18),

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{a_{ij}^{(k)}} T_{ii} A_k T_{jj} \\ &= \frac{1}{a_{ij}^{(k)}} \sum_{h=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} c_i^{(h)} c_j^{(l)} A_h A_k A_l \\ &= \frac{1}{a_{ij}^{(k)}} \sum_{h=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} c_i^{(h)} c_i^{(l)} \gamma_{hkp} \gamma_{plq} A_q, \end{aligned} \tag{19}$$

by (10). Thus, the n^2 linearly independent transformations $T_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ are expressible linearly in terms of the m transformations $A_1, A_2, \cdots, A_m$ Whence it follows that $m = n^2$; and, therefore, by Burnside's theorem, G is irreducible.

We have, therefore, the following theorem:

Theorem 1. *An arbitrarily given group G of linear homogeneous transformations*

$$x_x' = a_{x1} x_1 + a_{x2} x_2 + \cdots + a_{xn} x_n \qquad (x=1, 2, \cdots, n)$$

in n variables is irreducible if, and only if, each of the n transformations

$$x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, x_i' = x_i, x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0,$$

for $i = 1, 2, \cdots, n$, is expressible linearly in terms of transformations of

the group, and if, at the same time, no one, or more, non-diagonal coefficients of G are zero throughout in all transformations of G.

Let now G be any group whatever of linear homogeneous transformations whose coefficients lie in an arbitrary domain R. If G is irreducible with respect to the domain of all scalars real and imaginary, a fortiori, it is irreducible with respect to R. Therefore, from theorem 1 we obtain the following theorem:

Theorem 2. *Let G be any group of linear homogeneous transformations in n variables whose coefficients are all contained in the arbitrarily given domain R of rationality. Then, G is irreducible if no non-diagonal coefficient of G is zero throughout, and if each of the n transformations*

$$x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, x_i' = x_i, x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0$$

for $i = 1, 2, \cdots, n$ is expressible linearly in terms of transformations of G.

We may apply this theorem to show very readily that the subgroup of proper orthogonal substitutions in $n > 2$ variables whose coefficients lie wholly in an arbitrarily given domain R is irreducible. It suffices to prove this theorem for $R = 1$. Let G denote this subgroup. The coefficients of a proper orthogonal substitution in n variables are functions, rational in the domain $R = 1$, of $\frac{1}{2}n(n-1)$ parameters; and, therefore, each system of rational values of the parameters gives a transformation of G. Moreover, no coefficient of a proper orthogonal transformation is zero for all values; and, therefore, no coefficient is zero for all rational values of the parameters. Wherefore, for each pair of integers i and j from 1 to n, there is a rational system of values of the parameters, and, therefore, a transformation A of G, for which $a_{ij} \neq 0$. Whence it follows, that no coefficient of G is zero throughout; and therefore, we have only to show, for $n > 2$, that each of the n transformations T_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ can be expressed linearly in terms of transformations of the group. To establish this, let S_0 denote the identical transformation, and let

$$S_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

denote the proper orthogonal substitution

$$x_1' = -x_1, x_2' = x_2, \cdots, x_{i-1}' = x_{i-1}, x_i' = -x_i, x_{i+1}' = x_{i+1}, \cdots, x_n' = x_n.$$

The n substitutions $S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$ are all transformations of G. If now

$$c_0 S_0 + c_1 S_1 + \cdots + c_{n-1} S_{n-1} = 0$$

then

$$c_0 - c_1 - c_2 - \cdots - c_{n-1} = 0,$$

and, for $k = 2, 3, \cdots, n-1$,

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1} - c_k + c_{k+1} + \cdots + c_{n-1} = 0.$$

But the resultant of this system of equations is equal to $(-1)^n 2^{n-1}(n-2)$,

being the determinant whose constituents in the principal diagonal and in the first row are all equal to -1, except that in the first row and column, which, and also the remaining constituents, is equal to $+1$. Therefore, if $n>2$, the transformations $S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$ are linearly independent; and since these transformations are expressible linearly in terms of $T_{11}, T_{22}, \cdots, T_{nn}$, the latter, if $n>2$, can be expressed linearly in terms of $S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$, and, thus, in terms of proper orthogonal substitutions, which was to be proved.

§ 2.

By the aid of theorem 1, I shall establish certain criteria for the reducibility of a group of linear homogeneous transformations generated by infinitesimal transformations. Let G be generated by the r $(r \leqq m)$ independent infinitesimal transformations $X_1, X_2, \cdots, X_r$, where

$$X_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda}^{(i)} x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \qquad (i=1,2,\cdots,r). \tag{20}$$

I shall denote by B_i the matrix of X_i $(i=1,2,\cdots,r)$: thus,

$$B_i = \begin{vmatrix} b_{11}^{(i)}, & b_{12}^{(i)}, & \cdots, & b_{1n}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)}, & b_{22}^{(i)}, & \cdots, & b_{2n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^{(i)}, & b_{n2}^{(i)}, & \cdots, & b_{nn}^{(i)} \end{vmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,r). \tag{21}$$

Then for the general transformation A of G we have

$$A = e^{\sum_{i=1}^{r} t_i B_i} = 1 + \sum_{i_1=1}^{r} t_{i_1} B_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{r} \sum_{i_2=1}^{r} t_{i_1} t_{i_2} B_{i_1} B_{i_2} + \cdots, \tag{22}$$

where $t_1, t_2, \cdots, t_r$ are arbitrary scalars. The matrices $B_1, B_2, \cdots, B_r$ are linearly independent, being the matrices of independent infinitesimal transformations of G. In what follows, it is not necessary to distinguish between an infinitesimal transformation and its matrix.

If $\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}$ is not an infinitesimal transformation of G, then m is at least as great as $r+1$. In the first place, if $\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}$ is an infinitesimal transformation of the group, the matrix unity is expressible linearly in terms of $B_1, B_2, \cdots, B_r$; and conversely. For, if $\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}$ is an infinitesimal transformation of G, we have

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \cdots + \gamma_r X_r,$$

which is equivalent to

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda} = \gamma_1 b_{\varkappa\lambda}^{(1)} + \gamma_2 b_{\varkappa\lambda}^{(2)} + \cdots + \gamma_r b_{\varkappa\lambda}^{(r)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

where $\varepsilon_{\varkappa\varkappa} = 1$, $\varepsilon_{\varkappa\lambda} = 0$ $(\lambda \neq \varkappa)$; and this system of equations is equivalent to

$$1 = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \cdots + \gamma_r B_r.$$

Next, let

$$A_i = e^{\varrho B_i} = 1 + \varrho B_i + \frac{1}{2}\varrho^2 B_i^2 + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots, r), \tag{23}$$

where ϱ is an arbitrary scalar; and, if possible, let

$$c_0 + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_r A_r = 0 \tag{24}$$

for all values of ϱ; that is, for all values of ϱ let, simultaneously,

$$c_0 \varepsilon_{\varkappa\lambda} + c_1 a_{\varkappa\lambda}^{(1)} + \cdots + c_r a_{\varkappa\lambda}^{(i)} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n), \tag{25}$$

where $\varepsilon_{\varkappa\varkappa} = 1$, $\varepsilon_{\varkappa\lambda} = 0$ $(\lambda \neq \varkappa)$, the scalars $a_{\varkappa\lambda}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ being the coefficients of A_i. Since these coefficients are transcendental integral functions of ϱ, if equations (25) have a solution other than

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_r = 0,$$

we may take c_0, c_1, $\cdots$, c_r to be integral functions of ϱ; and, thus, we may put

$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)}\varrho + \frac{1}{2}c_i^{(2)}\varrho^2 + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots, r), \tag{26}$$

in which case equation (24) becomes

$$\left[c_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)}\right] + \varrho\left[\left(c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)}\right) + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)} B_i\right] \tag{27}$$

$$+ \frac{1}{2}\varrho^2\left[\left(c_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(2)}\right) + 2\sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)} B_i + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)} B_i^2\right] + \cdots = 0,$$

on substituting for A_1, A_2, etc., their expressions in terms of B_1, B_2, etc. Since this equation holds for all values of ϱ, we have, in particular,

$$c_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)} = 0, \tag{28}$$

$$\left(c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)}\right) + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)} B_i = 0, \tag{29}$$

$$\left(c_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(2)}\right) + 2\sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)} B_i + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(0)} B_i^2 = 0. \tag{30}$$

We have

$$c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)} = 0, \tag{31}$$

since, otherwise, by (29) the matrix unity is expressible linearly in terms of $B_1, B_2, \cdots, B_r$, which is contrary to supposition. Therefore, since $B_1, B_2, \cdots, B_r$ are linearly independent, $c_i^{(0)} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$; whence, by (28), $c_0^{(0)} = 0$. Thus we have

$$c_0^{(0)} = c_1^{(0)} = \cdots = c_r^{(0)} = 0. \tag{32}$$

Further,

$$c_0^{(1)} = c_1^{(1)} = \cdots = c_r^{(1)} = 0. \tag{33}$$

For, from (30) and (32), we derive

$$\left(c_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(2)} \right) + 2 \sum_{i=1}^{r} c_i^{(1)} B_i = 0;$$

whence follows

$$c_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{r} c_i^{(2)} = 0, \tag{34}$$

since, otherwise, the matrix unity is expressible linearly in terms of $B_1, B_2, \cdots, B_r$. Therefore, since $B_1, B_2, \cdots, B_r$ are linearly independent, $c_i^{(1)} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$; whence, by (31), we have $c_0^{(1)} = 0$. Again, by the aid of the preceding equations and those obtained by putting equal to zero the terms in (27) involving ϱ^3, we have

$$c_0^{(2)} = c_1^{(2)} = \cdots = c_r^{(2)} = 0; \tag{35}$$

etc., etc. Wherefore,

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_r = 0 \tag{36}$$

for all values of ϱ; and, thus, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ and the identical transformation are linearly independent; that is, $m \geqq r + 1$. Consequently, if $r = n^2 - 1$, and G does not contain the infinitesimal transformation $\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}$, the group is irreducible, by Burnside's theorem, since in this case $m = n^2$.

If $r = n^2$, since $m \geqq r$, we have $m = n^2$, and G is irreducible, which is otherwise evident, since in this case G is the general linear homogeneous group.

Let us assume that no non-diagonal coefficient of the matrices of the collective infinitesimal transformations of G is zero throughout for all the infinitesimal transformations of this group. That is, let us assume that no non-diagonal coefficient is zero in each of the matrices $B_1, B_2, \cdots, B_r$

of the respective infinitesimal transformations $x_1, x_2, \cdots, x_r$ of G; and, therefore, for each pair of distinct integers i and j from 1 to n, we can find an infinitesimal transformation B_k $(1 \leqq k \leqq r)$ for which $b_{ij}^{(k)} \neq 0$. Or, otherwise expressed, let us assume that

$$b_{12}^{(k_{12})} \neq 0,\ b_{13}^{(k_{13})} \neq 0,\ \cdots,\ b_{1r}^{(k_{1r})} \neq 0,$$
$$b_{21}^{(k_{21})} \neq 0,\ b_{23}^{(k_{23})} \neq 0,\ \cdots,\ b_{2r}^{(k_{2r})} \neq 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

where k_{pq} $(p, q = 1, 2, \cdots, r;\ q \neq p)$ are integers not less than 1 nor greater than r. Let i and j be any definite but arbitrary pair of distinct integers from 1 to n; and let

$$A' = e^{\varrho B_k} = 1 + \varrho B_k + \frac{1}{2}\varrho^2 B_k^2 + \cdots, \tag{37}$$

where ϱ is an arbitrary scalar. For ϱ sufficiently small, the non-diagonal coefficients of A' will differ as little as we please from the corresponding non-diagonal coefficients of B_k. Therefore, since $b_{ij}^{(k)} \neq 0$, we have $a'_{ij} \neq 0$ for ϱ sufficiently small. Whence, since $A' = e^{\varrho B_k}$ is a transformation of G, it follows that no non-diagonal coefficient of G is zero throughout. Therefore, by theorem 1, if also each of the n transformations T_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ can be expressed linearly in terms of transformations of G, this group is irreducible.

Let us next assume that $r \geqq n - 1$ and that G contains $n - 1$ infinitesimal transformations

$$Y_i = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} X_j = \mathfrak{b}_1^{(i)} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{b}_2^{(i)} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \mathfrak{b}_n^{(i)} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{38}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

such that

$$\begin{vmatrix} 1, & e^{\mathfrak{b}_1^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_1^{(n-1)}} \\ 1, & e^{\mathfrak{b}_2^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_2^{(n-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & e^{\mathfrak{b}_n^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_n^{(n-1)}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Let $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ denote the matrix of Y_i; and let

$$\mathfrak{A}_i = e^{\mathfrak{B}_i} = \begin{vmatrix} e^{\mathfrak{b}_1^{(i)}}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & e^{\mathfrak{b}_2^{(i)}}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_n^{(i)}} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

The transformations $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_{n-1}$ are transformations of G, being

generated by infinitesimal transformations of G; and, together with the identical transformation (which is also a transformation of G), are linear in $T_{11}, T_{22}, \cdots, T_{nn}$. Moreover, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_{n-1}$, and the identical transformation, are linearly independent. For, if

$$c_0 + c_1\mathfrak{A}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathfrak{A}_{n-1} = 0,$$

we have, simultaneously,

$$c_0 + c_1 e^{\mathfrak{b}_\varkappa^{(1)}} + \cdots + c_{n-1} e^{\mathfrak{b}_\varkappa^{(n-1)}} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n),$$

which is impossible, since the resultant of these equations is, by supposition, not equal to zero. Therefore, in the case supposed, the n transformations $T_{11}, T_{22}, \cdots, T_{nn}$ are expressible linearly in terms of transformations of G.

We have, therefore, the following theorem.

Theorem 3. *Let G be any group of linear homogeneous transformations in n variables generated by r independent infinitesimal transformations $X_1, X_2, \cdots, X_r$ where*

$$X_i = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda}^{(i)} x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

Then G is irreducible if $r = n^2 - 1$ and $\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}$ is not an infinitesimal transformation of the group. Further, G is irreducible if no non-diagonal coefficient is zero in each of the matrices of the respective infinitesimal transformations $X_1, X_2, \cdots, X_r$, that is, if an integer k $(1 \leqq k \leqq r)$ can be found, corresponding to each pair of distinct integers i and j from 1 to n, such that $b_{ij}^{(k)} \neq 0$, and if, at the same time, each of the n transformations

$$x_1' = 0, \cdots, x_{i-1}' = 0, \; x_i' = x_i, \; x_{i+1}' = 0, \cdots, x_n' = 0,$$

for $i = 1, 2, \cdots, n$, can be expressed linearly in terms of transformations of G. Therefore, in particular, G is irreducible if, corresponding to each pair of distinct integers i and j from 1 to n, an integer k can be found such that $b_{ij}^{(k)} \neq 0$, and if, at the same time, G contains $n - 1$ infinitesimal transformations

$$Y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \mathfrak{b}_k^{(i)} x_\varkappa \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

such that

$$\begin{vmatrix} 1, & e^{\mathfrak{b}_1^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_1^{(n-1)}} \\ 1, & e^{\mathfrak{b}_2^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_2^{(n-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & e^{\mathfrak{b}_n^{(1)}}, & \cdots, & e^{\mathfrak{b}_n^{(n-1)}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

We can determine whether or not the group G, generated by infinitesimal transformations, is reducible, as soon as we know its invariants general and special; namely, we have only to ascertain whether among these invariants is a ν-flat $(0 < \nu < n)$. It is to be noted that the above theorem does not require a knowledge of the invariants of the group. To illustrate the application of this theorem, it may be applied to the proper orthogonal group in n variables. As is well known, this group has no finite invariant flat (except the origin) when $n > 2$ and, thus, for $n > 2$, is irreducible. The $r = \frac{1}{2} n(n-1)$ infinitesimal transformations of this group are

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (i=1,2,\cdots,n;\ j=i+1, i+2,\cdots,n).$$

Therefore, no coefficient in the collective infinitesimal transformations of the group is zero throughout. Moreover, as shown pag. 362, when $n>2$, there are n linearly independent transformations S_0, S_1, $\cdots$, S_{n-1} of the group of the form

$$x_1' = \varrho_1 x_1,\ x_2' = \varrho_2 x_2,\ \cdots,\ x_n' = \varrho_n x_n;$$

and, therefore, the transformations T_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ can be expressed linearly in terms of transformations of the group. Whence, by theorem 3, the group is irreducible if $n > 2$.

Finally, let $\mathfrak{G}$ be any group in n variables generated by r independent infinitesimal transformations

$$\mathfrak{X}_i = \xi_{i1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{in}(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i=1,2,\cdots,r),$$

whose constants of composition are c_{ijk} $(i,j,k=1,2,\cdots,r)$. The infinitesimal transformations of the adjoined of $\mathfrak{G}$ are

$$E_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} e_k \frac{\partial}{\partial e_j} \qquad (i=1,2,\cdots,r);$$

and, if this group contains no invariant ν-flat $(\nu<r)$, that is, if the adjoined is irreducible, there is no subgroup of $\mathfrak{G}$ invariant to the adjoined. It is to be noted that the adjoined will contain $r-1$ infinitesimal transformations

$$g_1^{(i)} e_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + g_2^{(i)} e_2 \frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + g_r^{(i)} e_r \frac{\partial}{\partial e_r} \quad (i=1,2,\cdots,r-1),$$

for which

$$\begin{vmatrix} 1, & e^{g_1^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_1^{(r-1)}} \\ 1, & e^{g_2^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_2^{(r-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & e^{g_r^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_r^{(r-1)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

if it contains an infinitesimal transformation

$$g_1 e_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + g_2 e_2 \frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + g_r e_r \frac{\partial}{\partial e_r}$$

in which no two of the g's are equal. We have now, as a consequence of theorem 3, the following theorem:

Theorem 4. *Let $\mathfrak{G}$ be any group in n variables generated by the r independent infinitesimal transformations $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots, \mathfrak{X}_r$, where*

$$\mathfrak{X}_i = \xi_{i1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{in}(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

whose constants of composition are c_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, \cdots, r)$. Then $\mathfrak{G}$ contains no subgroup invariant to the adjoined group, if, for each pair of distinct integers j and k from 1 to r, an integer i $(1 \leqq i \leqq r)$ can be found such that $c_{ijk} \neq 0$, and if, at the same time, each of the r transformations

$$e_1' = 0, \cdots, e_{i-1}' = 0, \; e_i' = e_i, \; e_{i+1}' = 0, \cdots, e_r' = 0,$$

for $i = 1, 2, \cdots, r$, can be expressed linearly in terms of transformations of the adjoined. The latter condition is satisfied if the adjoined contains $r - 1$ infinitesimal transformations

$$g_1^{(i)} e_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + g_2^{(i)} e_2 \frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + g_r^{(i)} e_r \frac{\partial}{\partial e_r} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

such that

$$\begin{vmatrix} 1, & e^{g_1^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_1^{(r-1)}} \\ 1, & e^{g_2^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_2^{(r-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & e^{g_r^{(1)}}, & \cdots, & e^{g_r^{(r-1)}} \end{vmatrix} \neq 0;$$

and, therefore, in particular, if the adjoined contains an infinitesimal transformation

$$g_1 e_1 \frac{\partial}{\partial e_1} + g_2 e_2 \frac{\partial}{\partial e_2} + \cdots + g_r e_r \frac{\partial}{\partial e_r}$$

for which the coefficients $g_1, g_2, \cdots, g_r$ are all distinct.

Die Lagrangesche Multiplikatorenregel in der Variationsrechnung für den Fall von gemischten Bedingungen und die zugehörigen Grenzgleichungen bei variabeln Endpunkten.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

In den Göttinger Nachrichten für 1905 hat Herr Hilbert*) einen durch Strenge und Einfachheit ausgezeichneten Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel gegeben für den Fall, daß die Nebenbedingungen sämtlich Differentialgleichungen sind.

Im folgenden beabsichtige ich, die Hilbertsche Methode auf den Fall *gemischter Nebenbedingungen* und *variabler Endpunkte* auszudehnen, für welche meines Wissens ein den heutigen Anforderungen an Strenge genügender Beweis der Multiplikatorenregel und der Grenzgleichungen überhaupt noch nicht erbracht worden ist. Dabei wird sich zugleich in einem nicht unwesentlichen Punkt eine *Vereinfachung des Hilbertschen Beweises* ergeben.

§ 1.

Das Problem und seine Voraussetzungen.

Indem wir die zulässigen Kurven in Parameterdarstellung**) voraussetzen, betrachten wir die Aufgabe, das Integral

$$J = \int f(y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung, daß die zulässigen Kurven

*) Hilbert, *Zur Variationsrechnung*, Göttinger Nachrichten 1905, p. 159 und Mathematische Annalen Bd. 62, p. 351. Wegen der sonstigen Literatur über den Gegenstand verweise ich auf die Encyklopädie IIA 8 (Kneser), Nr. 8, 10 und IIA 8a (Zermelo und Hahn), Nr. 4.

**) Vgl. dazu Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, p. 228; v. Escherich, Wiener Berichte, Abt. IIa, Bd. 110 (1901), p. 1361.

$$y_i = y_i(t) \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

p Differentialgleichungen

$$\varphi_\alpha(y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, p \tag{1}$$

und q endlichen Gleichungen

$$\psi_\beta(y_1, \cdots, y_n) = 0 \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q \tag{2}$$

genügen sollen, wobei $p + q = m < n - 1$ vorausgesetzt wird.

Die Funktionen f und φ_α sollen in $y_1', \cdots, y_n'$ positiv homogen sein und zwar f von der Dimension $+1$. Dann sind die Relationen (1), sowie der Wert des Integrals J von der Wahl des Parameters t unabhängig.

Die Koordinaten $(y_{10}, \cdots, y_{n0})$, $(y_{11}, \cdots, y_{n1})$ der beiden Endpunkte der zulässigen Kurvenbogen sollen r Bedingungsgleichungen

$$\chi_\gamma(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0 \qquad \gamma = 1, 2, \cdots, r \tag{3}$$

genügen; überdies müssen sie natürlich die aus (2) folgenden Bedingungen

$$\psi_\beta(y_{10}, \cdots, y_{n0}) = 0, \quad \psi_\beta(y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0 \tag{4}$$
$$\beta = 1, 2, \cdots, q$$

erfüllen.

Wir setzen voraus, daß die zulässigen Funktionen $y_i(t)$ stetig sind und stetige erste Ableitungen besitzen.

Wir nehmen an, wir hätten eine den Bedingungen (1), (2) und (3) genügende Kurve gefunden

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y_i = \overset{0}{y}_i(t), \quad t_0 \lessgtr t \lessgtr t_1 \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

welche für das Integral J einen kleineren (oder gleichen) Wert liefert als jede andere, in einer gewissen engeren Umgebung $\mathfrak{U}'$ von $\mathfrak{E}_0$ gelegene zulässige Kurve. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß auch die zweiten Ableitungen der Funktionen $\overset{0}{y}_i(t)$ in $(t_0 t_1)$ existieren und stetig sind.

Es wird weiter vorausgesetzt, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m'} \\ \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ entlang } \mathfrak{E}_0 \tag{5}$$
$$\alpha = 1, 2, \cdots, p; \quad \beta = 1, 2, \cdots, q,$$

und daß die Funktionen f, φ_α, ψ_β samt ihren ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen in dem Bereich $\mathfrak{U}'$ stetig sind. Ebenso sollen die Funktionen χ_γ in der Umgebung der Stelle $(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0};\ \overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$ nebst ihren ersten Ableitungen stetig sein, wenn $(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0})$ und $(\overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$ die Koordinaten der Endpunkte des Bogens $\mathfrak{E}_0$ bedeuten.

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir für die Folge noch fest, daß die verschiedenen Indizes ganz bestimmte Zahlenreihen durchlaufen sollen, nämlich

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \cdots, n, \\ h, k &= 1, 2, \cdots, m, \\ \alpha &= 1, 2, \cdots, p, \\ \beta &= 1, 2, \cdots, q, \\ \gamma &= 1, 2, \cdots, r, \\ \varrho &= 1, 2, \cdots, n-m, \\ \sigma &= 1, 2, \cdots, s, \\ j &= 1, 2, \cdots, m+s. \end{aligned}$$

§ 2.

Herstellung zulässiger Variationen.

Es handelt sich jetzt in erster Linie darum, einen analytischen Ausdruck von hinreichender Allgemeinheit für zulässige Variationen der Kurve $\mathfrak{E}_0$ zu finden.

Wir wollen zunächst Variationen konstruieren, welche den Differentialgleichungen (1) und den aus (2) durch Differentiation nach t hervorgehenden Differentialgleichungen

$$\varphi_{p+\beta} \equiv \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} y_i' = 0 \tag{6}$$

genügen.

Zu diesem Zweck wählen wir $(n-m)s$ Funktionen

$$\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}(t) \qquad \begin{aligned} \varrho &= 1, 2, \cdots, n-m, \\ \sigma &= 1, 2, \cdots, s, \end{aligned}$$

willkürlich, abgesehen von der *einen* Bedingung, daß sie samt ihren ersten Ableitungen im Intervall $(t_0 t_1)$ stetig sein sollen. Die Wahl der ganzen Zahl s behalten wir uns für später vor.

Alsdann definieren wir

$$Y_{m+\varrho}(t;\ \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = \overset{0}{y}_{m+\varrho}(t) + \sum_\sigma \varepsilon_{m+\sigma} \eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}(t) \tag{7}$$

und betrachten nun das System von m Differentialgleichungen

$$\varphi_k(y_1, \cdots, y_m,\ Y_{m+1}, \cdots, Y_n,\ y_1', \cdots, y_m',\ Y_{m+1}', \cdots, Y_n') = 0 \tag{8}$$

mit den m unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Die linken Seiten des Systems (8) sind Funktionen der Variabeln t, $y_1, \cdots, y_m$, $y_1', \cdots, y_m'$ und der s konstanten Parameter $\varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s}$, die wir mit

$$\Phi_k(t, y_1, \cdots, y_m, y_1', \cdots, y_m'; \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s})$$

bezeichnen. Da

$$Y_{m+\varrho}(t; 0, \cdots, 0) = \overset{0}{y}_{m+\varrho}(t), \tag{9}$$

so kennen wir für $\varepsilon_{m+1} = 0, \cdots, \varepsilon_{m+s} = 0$ eine Lösung dieses Systems, nämlich

$$y_i = \overset{0}{y}_i(t),$$

da ja die Kurve $\mathfrak{E}_0$ den Bedingungen (1) und (2), und daher auch den Differentialgleichungen (6) genügt. Ferner ist wegen (5)

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_m)}{\partial(y_1', y_2', \cdots, y_m')}\Bigg|^{\varepsilon_{m+\sigma}=0}_{y_k=\overset{0}{y}_k(t)} \neq 0,$$

da nach (6)

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_1', y_2', \cdots, y_m')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1'}, & \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2'}, \cdots, & \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m'} \\ \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_2}, \cdots, & \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_m} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, \cdots, p \\ \beta = 1, 2, \cdots, q. \end{matrix} \tag{10}$$

Da überdies die Funktionen Φ_k die erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzen, so folgt aus einem Existenztheorem über Systeme von Differentialgleichungen, welche konstante Parameter enthalten, dessen Beweis wir in § 8 nachtragen werden, daß es stets ein System von m Funktionen

$$y_k = Y_k(t; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s})$$

gibt, welche für alle hinreichend kleinen Werte der Parameter ε_j den Differentialgleichungen (8) genügen und überdies folgende Eigenschaften besitzen:

1) Wenn sämtliche ε_j verschwinden, reduziert sich Y_k auf $\overset{0}{y}_k(t)$, d. h. es ist identisch in $(t_0 t_1)$

$$Y_k(t; 0, \cdots, 0) = \overset{0}{y}_k(t). \tag{11}$$

2) Die Funktionen Y_k genügen den Anfangsbedingungen

$$Y_k(t_0; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = \overset{0}{y}_{k0} + \varepsilon_k \tag{12}$$

für alle hinreichend kleinen Werte der ε_j.

3) Die Funktionen

$$Y_k, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial \varepsilon_j}, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial t \, \partial \varepsilon_j}$$

sind stetig in dem Bereich

$$t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1, \qquad |\varepsilon_j| \lesseqgtr d,$$

wo d eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet.

Schreiben wir der Gleichförmigkeit halber $Y_{m+\varrho}(t; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s})$ statt $Y_{m+\varrho}(t; \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{m+s})$, so stellen die n Gleichungen

$$y_i = Y_i(t; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+s}) \tag{13}$$

eine $(m+s)$-parametrige Kurvenschar dar, welche die für unsere Zwecke erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzt und den m Differentialgleichungen

$$\varphi_k(Y_1, \cdots, Y_n, Y_1', \cdots, Y_n') = 0 \tag{14}$$

für alle hinreichend kleinen Werte der Parameter ε_j genügt. Sie genügt aber im allgemeinen den Gleichungen (2) *nicht*, sondern nur den nach (6) aus den letzten q der Gleichungen (14) durch Integration folgenden Gleichungen

$$\psi_\beta(Y_1, \cdots, Y_n) = C_\beta,$$

wo die Größen C_β von t unabhängig sind. Wenn wir jetzt aber die Größen ε_j der Bedingung unterwerfen, daß sie den q Gleichungen

$$\psi_\beta(Y_1(t_0), \cdots, Y_n(t_0)) = 0 \tag{15}$$

genügen sollen, so wird $C_\beta = 0$; also befriedigen die Funktionen Y_i dann allemal im ganzen Intervalle $(t_0 t_1)$ die q Gleichungen

$$\psi_\beta(Y_1(t), \cdots, Y_n(t)) = 0. \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich das Resultat:

Für jedes hinreichend kleine Wertsystem der $m+s$ Konstanten ε_j, welches den $q+r$ Gleichungen

$$\psi_\beta(Y_1(t_0), \cdots, Y_n(t_0)) = 0, \tag{15}$$

$$\chi_\gamma(Y_1(t_0), \cdots, Y_n(t_0); Y_1(t_1), \cdots, Y_n(t_1)) = 0 \tag{17}$$

genügt, stellen die n Gleichungen

$$y_i = Y_i(t; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+s}), \qquad t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1$$

eine zulässige Variation der Kurve $\mathfrak{E}_0$ dar.

§ 3.

Eigenschaften der Funktionen $\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon_j}\right)_0$.

Wir bezeichnen*) jetzt

$$\left(\frac{\partial Y_k}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = \eta_k^j(t),$$

wobei der Index 0 anzeigen soll, daß nach Ausführung der Differentiation alle ε_j gleich Null zu setzen sind. Da überdies aus (7) folgt, daß

*) Bei den folgenden Entwicklungen hat man sich stets der am Ende von § 1 über die Bedeutung der Indizes getroffenen Verabredung zu erinnern.

$$\left(\frac{\partial Y_{m+\varrho}}{\partial \varepsilon_k}\right)_0 \equiv 0, \qquad \left(\frac{\partial Y_{m+\varrho}}{\partial \varepsilon_{m+\sigma}}\right)_0 = \eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}(t),$$

so gilt allgemein die Gleichung

$$\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = \eta_i^j(t), \tag{18}$$

wenn wir noch definieren

$$\eta_{m+\varrho}^{k}(t) \equiv 0. \tag{19}$$

Aus (12) folgt weiter

$$\eta_k^j(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases} \tag{20}$$

Wenn wir die Differentialgleichungen (14), welche Identitäten in $t, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m+s}$ darstellen, nach ε_j differentiieren und dann alle ε_j gleich Null setzen, erhalten wir

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\eta_i^j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\eta_i^{j\prime}\right) = 0, \tag{21}$$

wobei die Argumente der Ableitungen von φ_k sind:

$$\overset{0}{y}_1(t), \cdots, \overset{0}{y}_n(t), \ \overset{0}{y}_1'(t), \cdots, \overset{0}{y}_n'(t).$$

Nachdem über die Funktionen $\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}$ eine bestimmte Wahl getroffen ist, lassen sich die Differentialgleichungen (21) für einen bestimmten Wert von j als ein System von m linearen Differentialgleichungen für die m Funktionen

$$\eta_1^j, \ \eta_2^j, \cdots, \eta_m^j \tag{22}$$

auffassen. Da die Determinante des Systems nach (5) und (10) im ganzen Intervall $(t_0 t_1)$ von Null verschieden ist, so sind die Funktionen (22) durch die Differentialgleichungen (21) und die Anfangsbedingungen (20) vollständig bestimmt. Wir finden also das für die Folge wichtige Resultat:

Die Funktionen

$$\eta_1^j, \ \eta_2^j, \cdots, \eta_m^j$$

mit dem oberen Index j hängen nur von der Wahl der Funktionen

$$\eta_{m+1}^j, \ \eta_{m+2}^j, \cdots, \eta_n^j$$

mit demselben oberen Index j ab.

Insbesondere folgt daher aus (19), daß die Funktionen

$$\eta_1^k, \ \eta_2^k, \cdots, \eta_m^k$$

überhaupt von der Wahl sämtlicher Funktionen $\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}$ unabhängig sind.

§ 4.

Die Hilbertschen Multiplikatoren l.

Wir setzen zur Abkürzung

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = \int_{t_0}^{t_1} f(Y_1, \cdots, Y_n, Y_1', \cdots, Y_n')\, dt,$$

$$\overset{0}{\Psi}_\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = \psi_\beta(Y_1(t_0), \cdots, Y_n(t_0)),$$

$$\mathsf{X}_\gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = \chi_\gamma(Y_1(t_0), \cdots, Y_n(t_0);\ Y_1(t_1), \cdots, Y_n(t_1)).$$

Da nach (7) und (9)

$$J(0, 0, \cdots, 0) = J_{\mathfrak{E}_0},$$

so folgt aus unserer Voraussetzung, daß die Kurve $\mathfrak{E}_0$ das Integral J unter den angegebenen Nebenbedingungen zu einem Minimum macht, zusammen mit den über die Kurvenschar (13) erhaltenen Resultaten, daß die Funktion $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s})$ für $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0, \cdots, \varepsilon_{m+s} = 0$ ein Minimum besitzen muß mit den $q + r$ Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Psi}_\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) &= 0, \\ \mathsf{X}_\gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Wir wählen die bisher willkürlich gelassene Zahl s so groß, daß

$$m + s > q + r, \tag{24}$$

damit in den Nebenbedingungen (23) die Anzahl der Größen ε_j größer ist als die Anzahl der Gleichungen.

Es gibt daher nach der Theorie der gewöhnlichen Extrema mit Nebenbedingungen $q + r + 1$ von den ε_j unabhängige Konstanten*)

$$l_0, l_1, \cdots, l_{q+r},$$

welche nicht alle gleich Null sind und den $m + s$ Gleichungen

$$l_0 \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 + \sum_\beta l_\beta \left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \left(\frac{\partial \mathsf{X}_\gamma}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = 0 \tag{25}$$

genügen.

---

*) Indem wir nach Hilberts Vorgang die Konstante l_0, die auch gleich Null sein kann, einführen, umfassen wir zugleich den Ausnahmefall, in welchem die sämtlichen Determinanten $(q+r)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\left\| \left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_j}\right)_0, \left(\frac{\partial \mathsf{X}_\gamma}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 \right\| \qquad \begin{aligned} \beta &= 1, 2, \cdots, q \\ \gamma &= 1, 2, \cdots, r \\ j &= 1, 2, \cdots, m+s \end{aligned}$$

verschwinden.

Nun ist

$$(26)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\,\eta_i^j + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\,\eta_i^{j\prime}\right) dt, \\ \left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^0 \eta_i^j(t_0), \\ \left(\frac{\partial \mathsf{X}_\gamma}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = \sum_i \left\{\frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}\,\eta_i^j(t_0) + \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}\,\eta_i^j(t_1)\right\}, \end{cases}$$

wobei das Substitutionssymbol $|^0$ die Substitution $t = t_0$ andeuten soll, ebenso wie später $|^1$ die Substitution $t = t_1$. Die Koeffizienten einer der Gleichungen (25) mit einem bestimmten Index j hängen also nur von den Funktionen η_i^j mit demselben oberen Index j ab, und diese wieder sind, wie wir gesehen haben, durch die Wahl der $n - m$ Funktionen $\eta_{m+\varrho}^j$ vollständig bestimmt.

Für einen gegebenen, der Ungleichung (24) genügenden Wert von s sei jetzt N_s der Rang der Matrix

$$(27)\qquad \left\| \left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_j}\right)_0,\ \left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_j}\right)_0,\ \left(\frac{\partial \mathsf{X}_\gamma}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 \right\|$$

von $m + s$ Reihen und $q + r + 1$ Kolonnen, in dem Sinne, daß alle Determinanten der Matrix vom Grad $N_s + 1$ verschwinden, *wie auch die Funktionen* $\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}$ *gewählt sein mögen,* während es möglich sein soll, diese Funktionen so zu wählen — und sie seien tatsächlich so gewählt —, daß mindestens *eine* Determinante vom Grad N_s von Null verschieden ist. Aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen (25) folgt, daß

$$(28)\qquad N_s \gtrless q + r.$$

Es seien $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ die Indizes derjenigen Zeilen der Matrix, welche in der von Null verschiedenen Determinante, D, vorkommen. Dann können wir aus den entsprechenden Gleichungen des Systems (25) N_s der Größen l als homogene lineare Funktionen der übrigen $q + r + 1 - N_s$ berechnen. Die Koeffizienten dieser linearen Funktionen hängen nach dem oben Bewiesenen nur von der Wahl derjenigen Funktionen $\eta_{m+\varrho}^j$ ab, deren obere Indizes eben $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ sind. Den willkürlich gebliebenen $q + r + 1 - N_s$ Größen l legen wir irgend welche festen numerischen Werte bei, die nur nicht sämtlich gleich Null sein sollen. Wird das auf diese Weise erhaltene Wertsystem $l_0, l_1, \cdots, l_{q+r}$ in die übrigen $m + s - N_s$ Gleichungen des Systems (25) eingesetzt, so werden dieselben von selbst mit erfüllt.

Denken wir uns die Funktionen $\eta_{m+\varrho}^{j}$ mit den oberen Indizes $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ festgehalten, dagegen diejenigen Funktionen $\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}$, deren obere Indizes von $j_1, \cdots, j_{N_s}$ verschieden sind, durch beliebige andere ersetzt, so bleiben die Determinante D und die Größen $l_0, l_1, \cdots, l_{q+r}$ unverändert, während die sämtlichen Gleichungen (25) *bestehen bleiben, wie wir auch die letzteren Funktionen wählen mögen.**)

Unter den von $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ verschiedenen Indizes j ist stets mindestens einer, welcher $> m$ ist, vorausgesetzt, daß die ganze Zahl s hinreichend groß gewählt worden ist. Dies tritt z. B. sicher ein, wenn

$$s \geqq q + r + 1$$

gewählt wird, da dann wegen (28)

$$N_s < s,$$

woraus folgt, daß die Indizes $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ nicht alle s Werte

$$m + 1,\ m + 2,\ \cdots,\ m + s$$

erschöpfen können.

Wir bemerken schließlich noch, daß die erhaltenen Resultate auch im Fall $N_s = 0$ bestehen bleiben, indem man alsdann für sämtliche Größen l beliebige feste numerische Werte setzen kann.

§ 5.

Die Multiplikatoren ν_β und die Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_\alpha, \mu_\beta$.

Bezeichnen wir die Funktion $\psi_\beta(Y_1(t), \cdots, Y_n(t))$, als Funktion der Größen ε_j betrachtet, mit $\Psi_\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s})$, so ist, wie wir in § 2 gezeigt haben, für einen bestimmten Wert des Index β:

$$\Psi_\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = 0 \tag{29}$$

für alle hinreichend kleinen Werte der Größen ε_j, welche der Gleichung

$$\overset{0}{\Psi}_\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{m+s}) = 0 \tag{30}$$

mit demselben Index β genügen, und zwar gilt dies für alle Werte von t im Intervall $(t_0 t_1)$. Überdies werden nach (9) und (11) beide Gleichungen für $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0, \cdots, \varepsilon_{m+s} = 0$ erfüllt, da ja die Kurve $\mathfrak{E}_0$ den Gleichungen (2) und (4) genügt.

---

*) In dem Nachweis der Invarianz der Faktoren $l_0, l_1, \cdots, l_{q+r}$, der unter den einfacheren Voraussetzungen von Hilbert sehr einfach zu führen ist, besteht die im Eingang erwähnte Vereinfachung des Hilbertschen Beweises, da hierdurch der letzte Teil des Hilbertschen Beweises überflüssig gemacht wird.

Da ferner nach (26) und (20)

$$\left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_k}\right)_0 = \left.\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_k}\right|^0, \tag{31}$$

so folgt überdies aus (5), daß nicht sämtliche Ableitungen $\left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_k}\right)_0$ verschwinden. Daher gibt es einen von den Größen ε_j unabhängigen Multiplikator ν_β, welcher den $m+s$ Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_j}\right)_0 + \nu_\beta \left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_j}\right)_0 = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, m+s, \tag{32}$$

genügt. Wir greifen eine dieser Gleichungen heraus, in welcher der Index j einem k gleich ist, für welches

$$\left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_k}\right)_0 \neq 0.$$

Dann können wir die betreffende Gleichung nach ν_β auflösen und erhalten für ν_β eine im Intervall $(t_0 t_1)$ stetige Funktion von t, welche *von der Wahl der Funktionen* $\eta_{m+\varrho}^{m+\sigma}$ *unabhängig* ist, da nach den in § 3 bewiesenen Resultaten die Funktionen η_i^k und daher auch die Größen $\left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \varepsilon_k}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial \overset{0}{\Psi}_\beta}{\partial \varepsilon_k}\right)_0$ von der Wahl dieser Größen unabhängig sind. Dieser Wert von ν_β genügt dann zugleich sämtlichen übrigen Gleichungen (32).

Ausgeschrieben lauten die Gleichungen (32):

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} \eta_i^j(t) + \nu_\beta(t) \sum_i \left.\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\right|^0 \eta_i^j(t_0) = 0. \tag{33}$$

Setzen wir darin $t = t_1$, so erhalten wir noch die weitere Gleichung

$$\sum_i \left.\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\right|^1 \eta_i^j(t_1) + \nu_\beta(t_1) \sum_i \left.\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\right|^0 \eta_i^j(t_0) = 0. \tag{34}$$

Die Gleichungen (33) und (34), sowie die bereits in § 3 bewiesenen Gleichungen

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i^j + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i'} \eta_i^{j\prime}\right) = 0 \tag{21a}$$

kombinieren wir jetzt mittels der Multiplikatorenmethode mit der Gleichung (25), wobei in sämtlichen Gleichungen dem Index j ein und derselbe Wert beizulegen ist:

Wir multiplizieren die Gleichungen (21a) mit vorläufig unbestimmten Funktionen λ_α von t, integrieren von t_0 bis t_1 und summieren nach α;

ebenso multiplizieren wir die Gleichungen (33) mit unbestimmten Funktionen μ_β von t, integrieren von t_0 bis t_1 und summieren nach β; endlich multiplizieren wir die Gleichungen (34) mit unbestimmten Konstanten $l_\beta^{\,1}$ und summieren nach β. Sämtliche erhaltenen Resultate addieren wir zu Gleichung (25), die wir zuvor unter Benutzung von (26) in voller Form ausschreiben. Schließlich wenden wir noch die bekannte Lagrangesche partielle Integration an.

Setzen wir dann

$$\Omega = l_0 f + \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \psi_\beta \tag{35}$$

und

$$l_\beta^{\,0} = l_\beta + \int_{t_0}^{t_1} \mu_\beta \nu_\beta \, dt + l_\beta^{\,1} \nu_\beta(t_1),$$

so erhalten wir das folgende *Resultat:*

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \eta_i^j \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) dt + \sum_i H_i^0 \eta_i^j(t_0) + \sum_i H_i^1 \eta_i^j(t_1) = 0, \tag{36}$$

wo

$$\begin{aligned} H_i^0 &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^0 + \sum_\beta l_\beta^{\,0} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^0 + \sum_\gamma l_{\varrho+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}, \\ H_i^1 &= +\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^1 + \sum_\beta l_\beta^{\,1} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^1 + \sum_\gamma l_{\varrho+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Solcher Gleichungen (36) haben wir, den verschiedenen Werten von j entsprechend, $m + s$; in allen haben die Konstanten l_0, $l_\beta^{\,0}$, $l_\beta^{\,1}$, $l_{\varrho+\gamma}$ und die Funktionen λ_α, μ_β, ν_β dieselben Werte.

§ 6.

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Wir greifen jetzt unter den Gleichungen (36) eine heraus, in welcher der Index $j = j_0$ einen der Werte $m+1, m+2, \cdots, m+\varrho$ hat und zugleich von den in § 4 definierten Werten $j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ verschieden ist; daß es mindestens *einen* solchen Wert von j gibt, ist in § 4 gezeigt worden. Die zu diesem Wert j_0 gehörigen Funktionen $\eta_i^{j_0}$ bezeichnen wir einfach mit η_i.

Wir wählen nun die willkürlichen Funktionen $\eta_{m+\varrho}$ so, daß sie in t_0 und t_1 verschwinden:

$$\eta_{m+\varrho}(t_0) = 0, \quad \eta_{m+\varrho}(t_1) = 0 \tag{38}$$

und beachten, daß nach (20)

$$\eta_k(t_0) = 0,$$

da $j_0 \neq k$. Dann reduziert sich die betreffende Gleichung (36) auf

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{d\Omega}{\partial y_i'} \right) dt + \sum_k H_k^1 \eta_k(t_1) = 0. \tag{39}$$

Nun bestimmen wir die m Funktionen λ_α, μ_β und die q Konstanten l_β^1 durch die m Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y_k'} = 0 \tag{40}$$

und die m Gleichungen

$$H_k^1 = 0. \tag{41}$$

Hierdurch sind in der Tat diese Größen vollständig bestimmt. Denn zunächst lauten die Gleichungen (41) ausgeschrieben:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha(t_1) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_k'}\Big|^1 + \sum_\beta l_\beta^1 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_k}\Big|^1 + l_0 \frac{\partial f}{\partial y_k'}\Big|^1 + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{k1}} = 0.$$

Wegen der Voraussetzung (5) lassen sich diese m Gleichungen nach den $m = p + q$ Größen

$$\lambda_1(t_1),\ \lambda_2(t_1),\ \cdots,\ \lambda_p(t_1);\ l_1^1,\ l_2^1,\ \cdots,\ l_q^1$$

eindeutig auflösen und die gefundenen Werte sind von der Wahl der Funktionen $\eta_{m+\varrho}$ unabhängig, da nach § 4 die Größen l_0, $l_{q+\gamma}$ wegen der Annahme $j_0 \neq j_1, j_2, \cdots, j_{N_s}$ von der Wahl dieser Funktionen unabhängig sind.

Andererseits haben die Differentialgleichungen (40) ausgeschrieben die Form:

$$\sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_k'} \lambda_\alpha' - \sum_\beta \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_k} \mu_\beta = P_k + \sum_\alpha Q_{k\alpha} \lambda_\alpha,$$

wobei P_k, $Q_{k\alpha}$ Funktionen von t bedeuten, welche im Intervall $(t_0 t_1)$ stetig sind. Auf Grund derselben Voraussetzung (5) können wir diese m Gleichungen nach

$$\lambda_1',\ \lambda_2',\ \cdots,\ \lambda_p';\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_q$$

auflösen und erhalten so einerseits p lineare Differentialgleichungen für die Funktionen λ_α, welche zusammen mit den durch die Gleichungen (41) vorgeschriebenen Anfangswerten $\lambda_\alpha(t_1)$ die Funktionen λ_α vollständig bestimmen, und zwar als Funktionen von t, die im Intervall $(t_0 t_1)$ stetige erste Ableitungen besitzen; andererseits erhalten wir die Funktionen μ_β durch die so gefundenen Funktionen λ_α linear ausgedrückt.

Die auf diese Weise bestimmten Funktionen $\lambda_\alpha, \mu_\beta$ sind von der Wahl der Funktionen $\eta_{m+\varrho}$ unabhängig, da sowohl die in den Differential-

gleichungen (40) vorkommende Größe l_0 als auch die Anfangswerte $\lambda_\alpha(t_1)$ davon unabhängig sind.

Nachdem die Funktionen λ_α, μ_β und die Konstanten l_β^1 in der angegebenen Weise bestimmt sind, reduziert sich die Gleichung (39) auf

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varrho} \eta_{m+\varrho} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_{m+\varrho}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{m+\varrho}} \right) dt = 0.$$

Daraus folgt aber wegen der Willkürlichkeit der Funktionen $\eta_{m+\varrho}$ nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung für Probleme ohne Nebenbedingungen, daß

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_{m+\varrho}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{m+\varrho}} = 0 \tag{42}$$

sein muß.

Hiermit ist aber die *Lagrangesche Multiplikatorenregel* bewiesen, welche aussagt, daß die Konstante l_0 und die Funktionen λ_α, μ_β sich so wählen lassen müssen, daß die Funktionen $y_i(t)$ außer den Bedingungsgleichungen (1) und (2) noch den n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0 \tag{43}$$

genügen müssen.

Infolge der über die Funktionen f, φ_α gemachten Homogenitätsvoraussetzungen ist eine der Differentialgleichungen (43) eine Folge der übrigen und der Gleichungen (1) und (2). Denn wie man durch eine leichte Modifikation des von Kneser*) für den Fall, wo sämtliche Bedingungsgleichungen Differentialgleichungen sind, gegebenen Beweises zeigt, besteht für jedes den Bedingungen (1) und (2) genügende Funktionensystem y_i die Relation

$$\sum_i y_i' \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) = 0. \tag{44}$$

§ 7.

Die Grenzgleichungen.

Um nun weiter die Bedingungen zu erhalten, welche von den Endpunkten der gesuchten Kurve erfüllt sein müssen, kehren wir zunächst zu derjenigen Gleichung (36) zurück, deren Index j den im Anfang von § 6 charakterisierten Wert j_0 hat, *lassen aber die spezielle Annahme* (38) *über die willkürlichen Funktionen* $\eta_{m+\varrho}$ *fallen.*

*) Vgl. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, pp. 241, 242.

Den Funktionen λ_α, μ_β und den Konstanten l_β^1 geben wir dabei die durch (40) und (41) bestimmten Werte, was das Bestehen von (42) zur Folge hat. Da auch jetzt $\eta_k(t_0) = 0$, so reduziert sich die betreffende Gleichung (36) auf:

$$\sum_\varrho H^0_{m+\varrho}\,\eta_{m+\varrho}(t_0) + \sum_\varrho H^1_{m+\varrho}\,\eta_{m+\varrho}(t_1) = 0. \tag{45}$$

Wegen der Willkürlichkeit der Endwerte $\eta_{m+\varrho}(t_0)$, $\eta_{m+\varrho}(t_1)$ folgt hieraus, daß

$$H^0_{m+\varrho} = 0, \qquad H^1_{m+\varrho} = 0 \tag{46}$$

sein muß.

Hierzu kommen aber noch weitere m Bedingungen, die wir folgendermaßen erhalten: Schreiben wir die Gleichung (36) für einen Index $j = k$ an, aber immer mit denselben Werten der Größen λ_α, μ_β, l_β^1, so reduziert sich dieselbe infolge der bereits bewiesenen Bedingungen (42) und (46) auf

$$\sum_{h=1}^{m} H_h^0\,\eta_h^k(t_0) = 0,$$

und dies reduziert sich wegen (20) weiter auf

$$H_k^0 = 0. \tag{47}$$

Somit gibt es Konstanten l_β^0, l_β^1, $l_{\varrho+\varrho}$, für welche gleichzeitig die $2n$ Gleichungen

$$H_i^0 = 0, \qquad H_i^1 = 0 \tag{48}$$

bestehen.

Dies Resultat können wir jedoch noch auf eine andere Form bringen, indem wir die Gleichungen (48) mit willkürlichen Faktoren δy_{i0} resp. δy_{i1} multiplizieren und addieren:

$$\sum_i (H_i^0\,\delta y_{i0} + H_i^1\,\delta y_{i1}) = 0. \tag{49}$$

Bezeichnen wir jetzt

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^0 \delta y_{i0} = \delta\psi_\beta(y_{10}, \cdots, y_{n0}),$$

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^1 \delta y_{i1} = \delta\psi_\beta(y_{11}, \cdots, y_{n1}),$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}\,\delta y_{i0} + \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}\,\delta y_{i1}\right) = \delta\chi_\gamma(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}),$$

so lautet die Gleichung (49), wenn wir die Werte von H_i^0, H_i^1 aus (37) einsetzen:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^1 \delta y_{i1} - \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^0 \delta y_{i0}\right) + \sum_\beta l_\beta^{\,0}\, \delta \psi_\beta(y_{10}, \cdots, y_{n0})$$

$$+ \sum_\beta l_\beta^{\,1}\, \delta \psi_\beta(y_{11}, \cdots, y_{n1}) + \sum_\gamma l_{q+\gamma}\, \delta \chi_\gamma(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0$$

für beliebige Werte der Größen δy_{i0}, δy_{i1}. Daraus folgt aber das Resultat:

Es muß

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^1 \delta y_{i1} - \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^0 \delta y_{i0}\right) = 0 \tag{50}$$

sein für alle Werte der Größen δy_{i0}, δy_{i1}, *welche den* $2q + r$ *Gleichungen*

$$\delta \psi_\beta(y_{10}, \cdots, y_{n0}) = 0, \qquad \delta \psi_\beta(y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0,$$
$$\delta \chi_\gamma(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0 \tag{51}$$

genügen.

Das sind aber gerade die *Grenzgleichungen*, wie sie sich aus der mechanischen Anwendung des Lagrangeschen Variations-Algorithmus ergeben würden.

§ 8.

Beweis des Hilfssatzes über Systeme von Differentialgleichungen, welche konstante Parameter enthalten.

Wir haben jetzt noch den Hilfssatz*) über Systeme von Differentialgleichungen mit Parametern, von dem wir in § 2 Gebrauch gemacht haben, nachzutragen. Derselbe lautet folgendermaßen:

Es sei ein System von m Differentialgleichungen gegeben, welche s konstante Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ enthalten:

$$F_k(t;\ y_1, \cdots, y_m,\ y_1', \cdots, y_m';\ \alpha_1, \cdots, \alpha_s) = 0$$
$$k = 1, 2, \cdots, m, \tag{52}$$

wobei die Funktionen F_k samt ihren ersten partiellen Ableitungen nach sämtlichen $2m + s + 1$ Argumenten in einem Bereich $\mathfrak{A}$ im Raum der Variabeln

$$t;\ y_1, \cdots, y_m,\ y_1', \cdots, y_m';\ \alpha_1, \cdots, \alpha_s$$

stetig sein sollen.

---

*) Hilbert verweist an der entsprechenden Stelle auf Picard, Traité d'Analyse, t. III, ch. VIII. Bei unseren allgemeineren Voraussetzungen können wir von jenen Sätzen keineu unmittelbaren Gebrauch machen, auch nicht von den Sätzen, welche Kneser (Lehrbuch der Variationsrechnung, p. 231) und Hahn (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 14, p. 334) für ähnliche Zwecke entwickelt haben.

Für ein spezielles Wertsystem der α

$$\alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s$$

sei eine Lösung der Differentialgleichungen (52)

$$y_k = \overset{0}{y}_k(t) \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

von folgenden Eigenschaften bekannt:

1) Die Funktionen $\overset{0}{y}_k(t)$ nebst ihren ersten Ableitungen sind stetig in einem Intervall $(t_0 t_1)$.

2) Für jeden Wert von t im Intervall $(t_0 t_1)$ liegt das Wertsystem

$$t,\ y_k = \overset{0}{y}_k(t),\ y_k' = \overset{0}{y}_k'(t),\ \alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma$$
$$k = 1, 2, \cdots, m;\ \sigma = 1, 2, \cdots, s$$

im *Innern* des Bereiches $\mathfrak{A}$.

3) Setzt man in der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial (y_1', y_2', \cdots, y_m')}$$
$$y_k = \overset{0}{y}_k(t),\ y_k' = \overset{0}{y}_k'(t),\ \alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma,$$

so ist die entstehende Funktion von t im ganzen Intervall $(t_0 t_1)$ von Null verschieden.

Endlich sei τ_0 irgend ein Wert von t im Intervall $(t_0 t_1)$, und es werde

$$\overset{0}{y}_k(\tau_0) = \beta_k^0 \tag{53}$$

gesetzt.

Alsdann gibt es ein Lösungssystem

$$y_k = G_k(t; \beta_1, \cdots, \beta_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_s) \tag{54}$$
$$k = 1, 2, \cdots, m$$

von (52) *von folgender Beschaffenheit:*

1) *Die Funktionen* G_k *sind samt den Ableitungen*

$$\frac{\partial G_k}{\partial t},\ \frac{\partial G_k}{\partial \alpha_\sigma},\ \frac{\partial G_k}{\partial \beta_h},\ \frac{\partial^2 G_k}{\partial t\, \partial \alpha_\sigma},\ \frac{\partial^2 G_k}{\partial t\, \partial \beta_h}$$

stetig in dem Bereich

$$t_0 \leqq t \leqq t_1,\ |\alpha_\sigma - \overset{0}{\alpha}_\sigma| \leqq d,\ |\beta_k - \beta_k^0| \leqq d,$$

wofern die positive Größe d *hinreichend klein gewählt wird, und die Funktionen* G_k *genügen für alle diese Werte der Größen* t, α_σ, β_k *den Differentialgleichungen* (52).

2) *Es ist*

$$G_k(t; \beta_1^0, \cdots, \beta_m^0; \overset{0}{\alpha}_1, \cdots, \overset{0}{\alpha}_s) = \overset{0}{y}_k(t) \text{ in } (t_0 t_1). \tag{55}$$

3) *Für* $t = \tau_0$ *ist*

$$G_k(\tau_0; \beta_1, \cdots, \beta_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_s) = \beta_k \tag{56}$$

für alle

$$|\beta_k - \overset{0}{\beta}_k| \lessgtr d, \quad |\alpha_\sigma - \overset{0}{\alpha}_\sigma| \lessgtr d.$$

Zum Beweis lösen wir zunächst die m Gleichungen (52) auf Grund des *erweiterten* Satzes über implizite Funktionen, den ich in Bd. 63 dieser Annalen, p. 249, bewiesen habe, nach $y_1', \cdots, y_m'$ auf. Dabei entspricht der dort mit $\mathfrak{E}$ bezeichneten Punktmenge die Menge

$$\mathfrak{E}: \quad t_0 \lessgtr t \lessgtr t_1, \; y_k = \overset{0}{y}_k(t), \; y_k' = \overset{0}{y}_k'(t), \; \alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma$$
$$k = 1, 2, \cdots, m; \; \sigma = 1, 2, \cdots, s,$$

welche sämtliche dort von der Menge $\mathfrak{E}$ vorausgesetzten Eigenschaften besitzt.

Daher läßt sich zu jeder hinreichend kleinen positiven Größe ϱ eine zweite, δ, angeben, derart, daß für jedes Wertsystem $t, y_1, \cdots, y_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ in der Umgebung*) (δ) der Menge

$$X: \quad t_0 \lessgtr t \lessgtr t_1, \; y_k = \overset{0}{y}_k(t), \; \alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma$$
$$k = 1, 2, \cdots, m; \; \sigma = 1, 2, \cdots, s$$

im Raum der Variabeln $t, y_1, \cdots, y_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ die Gleichungen (52) eine und nur eine Lösung

$$y_k' = f_k(t, y_1, \cdots, y_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_s) \qquad k = 1, 2, \cdots, m \tag{57}$$

besitzen, für welche der Punkt

$$t, y_1, \cdots, y_m, y_1', \cdots, y_m', \alpha_1, \cdots, \alpha_s$$

in der Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{E}$ liegt.

Die hierdurch für den Bereich $(\delta)_X$ eindeutig definierten Funktionen f_k sind in diesem Bereich stetig und besitzen stetige erste Ableitungen nach allen Argumenten.

Fügen wir den m Differentialgleichungen (57) noch die weiteren, wegen der Konstanz der Größen α_σ selbstverständlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\alpha_\sigma}{dt} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, s \tag{58}$$

bei, so stellen die Gleichungen (57) und (58) zusammen ein System von $m + s$ Differentialgleichungen mit den $m + s$ unbekannten Funktionen $y_1, \cdots, y_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ dar, welches durch das Funktionensystem

$$y_k = \overset{0}{y}_k(t), \quad \alpha_\sigma = \overset{0}{\alpha}_\sigma \qquad k = 1, 2, \cdots, m; \; \sigma = 1, 2, \cdots, s$$

*) Wir sagen, ein Punkt liege in der *Umgebung* (δ) *einer Punktmenge* X — kürzer „in $(\delta)_X$" —, wenn er in der Umgebung (δ) mindestens *eines* Punktes der Menge X liegt.

befriedigt wird, und welches alle Voraussetzungen eines zuerst von Kneser*) für analytische Funktionen gegebenen, sodann von Lunn**) auf nicht-analytische Funktionen ausgedehnten Existenztheorems erfüllt, das man passend das „Einbettungstheorem“ nennen könnte, und das unmittelbar zu dem oben ausgesprochenen Satz führt.

Chicago, den 17. Dezember 1906.

---

*) Lehrbuch der Variationsrechnung, § 27.

**) Chicagoer Dissertation 1904; einen andern Beweis dieses für die Variationsrechnung äußerst wichtigen Satzes habe ich in den Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 7, p. 464 gegeben.

Berichtigung

zu meinem Aufsatz: „O. Bolza, Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung“, Bd. 63, Seite 246 ff.:

p. 249, Z. 27 von oben: lies $\mathfrak{C}$ statt $\mathfrak{A}$,
Z. 32 „ „ : streiche (resp. Y),
Z. 33 „ „ : „ (resp. den $y_1, \cdots, y_n$-Raum),
p. 250, Z. 9 von unten: lies φ_{n+1} statt φ_n,
Z. 17 „ „ : „ j statt i.

Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen.*)

Von

Wera Myller-Lebedeff in St. Petersburg.

Die linearen Integralgleichungen, deren Bedeutung aus der mathematischen Physik seit langem bekannt ist, sind in der letzten Zeit von Fredholm**) und Hilbert***) systematisch untersucht worden. Die Resultate lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen.

Die inhomogene lineare Integralgleichung

$$f(s) = y(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, y(t)\, dt,$$

deren Kern $K(s,t)$ eine in s und t symmetrische, in der (st)-Ebene stetige Funktion ist, hat stets eine und nur eine Lösung, wenn der Parameter λ keine Wurzel $\lambda^{(h)}$ einer gewissen transzendenten Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ ist. Im letzteren Falle aber existiert wenigstens eine Lösung $\psi^{(h)}(s)$ der homogenen Integralgleichung

$$y(s) = \lambda^{(h)} \int_a^b K(s,t)\, y(t)\, dt.$$

Diese Funktionen $\psi^{(h)}(s)$ und die ihnen entsprechenden Werte $\lambda^{(h)}$ des Parameters sind von Hilbert zum Kerne $K(s,t)$ gehörende Eigenfunktionen und Eigenwerte genannt worden.

Es existiert im allgemeinen — ausgenommen den Fall, daß $K(s,t)$ als eine endliche Summe von Produkten darstellbar ist, deren Faktoren nur von je einer der Variabeln s, t abhängen — eine unendliche Anzahl von zum selben Kerne gehörigen Eigenfunktionen, da die Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ eine unendliche Anzahl von Wurzeln

*) Auszug aus einer Inaugural-Dissertation, Göttingen 1906.

**) Acta Mathematica Bd. 27.

***) Göttinger Nachrichten 1904, 1905, 1906.

$$\lambda^{(1)},\ \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)},\ \cdots$$

hat, welche bei den oben dem Kerne auferlegten Bedingungen eine im Unendlichen gelegene Häufungsstelle haben. Die Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal, d. h. es ist

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\,\psi^{(k)}(s)\,ds = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem $h \neq k$ oder $h = k$ ist, und können zur Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(s)$ in die Reihe von der Form

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots$$

in Fourierscher Weise gebraucht werden.

Die Bedingung, welche $f(s)$ erfüllen muß, damit eine solche Entwicklung möglich ist, lautet in der von Erh. Schmidt*) vereinfachten Form folgendermaßen: Läßt sich eine stetige Funktion $g(s)$ finden, welche die Darstellung von $f(s)$ in der Form

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt$$

ermöglicht, so ist $f(s)$ in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickelbar, und die Reihe konvergiert im Intervalle $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig.

Es liegt die Frage nahe: *Wie verhalten sich dieser Theorie gegenüber verschiedene bisher bekannte und vielfach untersuchte Systeme von Funktionen, welche zueinander orthogonal sind und zur Entwicklung willkürlicher Funktionen benutzt werden*? Ordnen sie sich der Theorie unter, und welche Methoden führen diese Unterordnung herbei?

Die große Bedeutung dieser Frage ist klar. Denn ist die Zurückführung auf die Integralgleichungen möglich, so hat man eine einheitliche Methode, um diese Entwicklungen zu behandeln.

Hilbert hat die Theorie der Integralgleichungen auf trigonometrische Funktionen $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$, Besselsche Funktionen $J(x\sqrt{\lambda^{(m)}})$, Legendresche Polynome $P^{(m)}(x)$ und Kugelfunktionen höherer Ordnung $P_\alpha^{(m)}(x)$ angewandt. Die Methode, die er benutzt hat, um den Kern dieser Funktionen aufzustellen, beruht darauf, daß die vorgeschriebenen Funktionen Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + (q + \lambda)\,u = 0$$

für gewisse Werte $\lambda^{(h)}$ des Parameters λ sind. Diese Werte $\lambda^{(h)}$ sind die

*) Erhard Schmidt, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, siehe auch Math. Ann. Bd. 62, S. 452.

zu den vorgeschriebenen Funktionen zugehörigen Eigenwerte. Die Transzendente $\delta(\lambda)$, deren Nullstellen sie sind, wird in eindeutiger Weise aus der Differentialgleichung abgeleitet.

Der gesuchte Kern ist im wesentlichen die Greensche Funktion der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + qu = 0.$$

Darunter versteht man eine Lösung dieser Gleichung, welche gewisse Randbedingungen (dieselben wie die vorgeschriebenen Eigenfunktionen) erfüllt, in x und einem Parameter ξ symmetrisch ist, und deren Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Sprung -1 aufweist. Die wirkliche Aufstellung einer Greenschen Funktion für die gegebene Differentialgleichung bietet aber manchmal Schwierigkeiten. Es gibt Fälle, wo keine Greensche Funktion für die fraglichen Randbedingungen existiert; dahin gehört z. B. schon der Fall der Legendreschen Polynome. Obwohl Hilbert diesen Fall durch eine leichte Modifikation des soeben definierten Begriffes der Greenschen Funktion erledigt hat, ist dennoch auch diese Modifikation nicht in allen Fällen anwendbar.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, in gewissen Fällen und eben dort, wo sich die Aufstellung der Greenschen Funktion als schwierig erweist, einen anderen Weg zur Ermittlung des Kernes der vorgeschriebenen Funktionen zu zeigen.

Die Methode wird im ersten Kapitel an dem Beispiele der Polynome von Hermite*) durchgeführt. Diese Polynome $P_n(x)$, welche auch Tschebyscheff**) betrachtet hatte, sind durch die erzeugende Funktion

$$e^{-2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{h^n}{n!} P_n(x)$$

oder auch als Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{x-u}\,du$$

definiert und besitzen die Orthogonalitätseigenschaft im nach beiden Seiten hin unendlichen Intervalle:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{matrix} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{matrix}$$

*) Comptes Rendus t. LVIII, p. 93, 266 (1864).

**) Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg 1860.

Während Hilbert die gewöhnliche Differentialgleichung der vorgeschriebenen Funktionen betrachtet, wird hier eine partielle Differentialgleichung, nämlich die Gleichung der linearen Wärmeleitung, herangezogen.

Ein Verfahren, dessen Idee einer Arbeit von Appell*) entnommen ist, führt leicht zur Integralgleichung. Als Kern von

$$\psi^{(n)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$$

erscheint die Funktion

$$K(x, \xi) = \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}} e^{\frac{\tau + t}{2(\tau - t)}(x^2 + \xi^2) + \frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau - t} x\xi},$$

wo t und τ zwei willkürliche Konstanten $\tau < 0$, $t - \tau < 0$ sind.

Es wird die Bedingung der Entwickelbarkeit einer Funktion $f(x)$ in die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(n)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ fortschreitende Reihe untersucht, wobei die Hilbertschen Entwicklungssätze, welche für ein endliches Intervall aufgestellt sind, auf ein unendliches Intervall übertragen werden. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Polynomen von Hermite führt zur Lösung des Problems der Wärmeleitung in einer unendlichen Geraden bei vorgeschriebenem Anfangszustande.

Im zweiten Kapitel werden nach derselben Methode gewisse Polynome $Q_n(x)$ behandelt, die von Laguerre**), Tschebyscheff***) und Blumenthal†) untersucht worden sind. Sie entstammen der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^u}{x - u} du$$

und haben Orthogonalitätseigenschaft im Intervalle $-\infty \leqq x \leqq 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x Q_n(x) Q_m(x) dx = \begin{matrix} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n. \end{matrix}$$

Sie führen zur partiellen Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Als Kern für $\psi^{(n)}(x) = e^{\frac{x}{2}} Q_n(x)$ ergibt sich die Funktion

$$K(x, \xi) = \frac{t}{t - \tau} e^{-\frac{\tau + t}{2(\tau - t)}(x + \xi)} J\left(2i\frac{\sqrt{t\tau}\, x\xi}{\tau - t}\right),$$

*) Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, Journ. de Liouville, 4. sér., t. 8.

) Oeuvres I, p. 428. *) Mém. de St. Pétersbourg 1860.

†) Inaugural-Dissertation, Göttingen 1898.

wo J die Besselsche Funktion nullter Ordnung und t, τ zwei willkürliche Konstanten $t \leqq \tau < 0$ sind.*)

Es wird eine Verallgemeinerung der Laguerreschen Polynome betrachtet, welche in der Einführung von zwei Parametern m, n besteht und welche auf die partielle Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

führt, die von Kepinski**) untersucht worden ist.

Im dritten Kapitel werden einige Verallgemeinerungen auf zwei Variable x, y gemacht, wobei die Entwicklungen nach Aggregaten von Produkten Hermitescher Polynome und die Wärmeleitung in einer unendlichen Ebene***) zur Sprache kommen.

Erstes Kapitel.

§ 1.

Durch die partielle Differentialgleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

wird der Wärmezustand eines homogenen, geraden, eindimensionalen Fadens definiert, wenn x die Länge, von irgend einem Punkte des Fadens gerechnet, u die Temperatur und t die Zeit bedeuten. Die zu $L(u) = 0$ adjungierte Gleichung ist

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Die Identität

$$\iint_{(A)} [vL(u) - uM(v)]\, dx\, dt = \int_{(S)} \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dt + uv\, dx\right] \tag{3}$$

ist ein Spezialfall der folgenden Greenschen Formel

$$\iint_{(A)} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right] dx\, dt = \int_{(S)} [P\, dt + Q\, dx],$$

wo P, Q Funktionen von x, t bedeuten, und das zweifache Integral über einen Bereich A in der (x,t)-Ebene, das einfache Integral über die Berandung S von A im positiven Sinne zu erstrecken ist.

Sind u, v resp. Lösungen der Gleichungen (1), (2), so folgt aus (3)

$$\int_{(S)} \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dt + uv\, dx\right] = 0. \tag{4}$$

*) Die bisher genannten beiden Klassen von Funktionen führt auch Stekloff (Crelles Journal, Bd. 125) an.

**) Math. Annalen Bd. 61 (1905).

***) Vergl. Lacour, Annales de Toulouse IX, 1895.

Als Bereich wählen wir zunächst ein Rechteck, welches durch die Geraden $x = x'$, $x = x''$, $t = t_1$, $t = t_2$ $(t_1 < t_2 < 0)$ begrenzt wird und welches nachher, indem wir x'' unendlich wachsen, x' unendlich abnehmen lassen, zu einem unendlichen Streifen gemacht wird.

Es sei $u = f(x, t)$ eine solche Lösung der Gleichung (1), welche samt ihrer ersten Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ für alle t und für alle endlichen x im gegebenen Bereiche endlich ist, im Unendlichen sich aber so verhält, daß identisch in t für irgend welches positive k^2

$$\lim (f(x,t)\, e^{-k^2 x^2})_{x=+\infty} = 0, \quad \lim (f(x,t)\, e^{-k^2 x^2})_{x=-\infty} = 0$$

ist.

Als Lösung v der adjungierten Gleichung sei die Funktion

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau - t)}}$$

gewählt, welche zwei willkürliche Parameter τ und ξ enthält: ξ kann alle Werte im Intervalle $-\infty < \xi < +\infty$ annehmen, τ sei durch die Bedingung $\tau > t_2$ beschränkt. Es ist dann

$$\left[u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=+\infty} = 0, \quad \left[u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=-\infty} = 0,$$

und die Formel (4) gibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t_1)\, v(x,t_1)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t_2)\, v(x,t_2)\, dx.$$

Das heißt: das Integral

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, v(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau - t)}}\, dx$$

ist von t unabhängig, solange $t < \tau$ bleibt. Wir wollen den Grenzwert dieses Integrales für $t = \tau$ finden. Zu dem Zwecke führen wir die neue Integrationsvariable w durch die Gleichung $x - \xi = -2w\sqrt{\tau - t}$ ein. Wenn wir im Integral (5) für einen Augenblick die Grenzen x' und x'' sein lassen, so transformiert sich (5) in

$$-\int_{-\frac{x'-\xi}{2\sqrt{\tau-t}}}^{-\frac{x''-\xi}{2\sqrt{\tau-t}}} f\left(\xi - 2w\sqrt{\tau - t},\ \tau - (\tau - t)\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-w^2}\, dw.$$

Wir lassen $\tau - t = 0$ und zugleich $x' = -\infty$, $x'' = +\infty$ werden. Bei einem festen ξ $(-\infty < \xi < +\infty)$ ist $(x'' - \xi)_{x''=+\infty} > 0$, $(x' - \xi)_{x'=-\infty} < 0$. Die Grenzen werden also $-\infty$, $+\infty$ und es ist

$$\lim\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\,dx\right)_{t=\tau} = f(\xi,\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-w^2}\,dw = f(\xi,\tau).$$

Infolge der Unabhängigkeit des Integrales (5) von t ist somit bewiesen, daß für jedes $t<\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\,dx = f(\xi,\tau) \tag{6}$$

gilt.

§ 2.

Wir werden die Formel (6) auf besondere Lösungen der Gleichung (1) anwenden, nämlich auf polynomische Lösungen $V_n(x,t)$, welche homogen in x und $\sqrt{t}$ sind. Zunächst sei einiges über diese Polynome vorausgeschickt.

Die $V_n(x,t)$ können mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten werden. Indem man

$$u = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\sqrt{t} + \cdots + a_1 x(\sqrt{t})^{n-1} + a_0(\sqrt{t})^n$$

setzt und in die Gleichung (1) einträgt, bekommt man eine rekurrente Beziehung für die Koeffizienten a_n. Dieselben Polynome werden als Koeffizienten der Entwicklung

$$e^{ax+a^2t} = \sum \frac{a^n}{n!}\,V_n(x,t) \tag{7}$$

erhalten. Da e^{ax+a^2t} bei jedem Werte der Konstanten a die Gleichung (1) befriedigt, so befriedigen auch $V_n(x,t)$ dieselbe Gleichung.

Durch den Ansatz

$$V_n(x,t) = (-t)^{\frac{n}{2}}\,P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)$$

wird man auf Polynome P_n von einer Variabeln $\xi = -\frac{x}{2\sqrt{-t}}$ geführt, welche in ξ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2P_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} + 2n\,P_n(\xi) = 0$$

genügen. P_n sind diejenigen Polynome, welche Hermite*) und Tschebyscheff**) untersucht haben. Hermite hat sie für mehrere Variable durch ihre erzeugende Funktion $e^{-\varphi(x+h,\,y+h_1,\,\cdots)}$ definiert, wo φ eine positiv

*) Comptes Rendus, t. LVIII, p. 93, 266 (1864).

**) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg 1860.

definite quadratische Form ist. Für eine Variable reduziert sich $e^{-\varphi}$ auf $e^{-(z+h)^2}$, und die Polynome P_n werden durch die Entwicklung

$$e^{-(z+h)^2} = e^{-z^2} \sum P_n(z) \frac{h^n}{n!}$$

definiert, was mit (7) für $h = a\sqrt{-t}$, $z = -\frac{x}{2\sqrt{-t}}$ übereinstimmt.

Hermite hat auch die Rekursionsformel

$$P_{n+1} + 2xP_n + 2nP_{n-1} = 0$$

aufgestellt, aus welcher folgt, daß $P_n(x)$ der n^{te} Näherungsnenner des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2x - \cfrac{2}{2x - \cfrac{4}{2x - \ddots}}} \tag{8}$$

ist. Außerdem hat Hermite die Integraleigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ n!\, 2^n \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$

angegeben.

Dieselben Polynome hat auch Tschebyscheff als Beispiel betrachtet, indem er von Interpolationsfragen ausging. Die P_n sind bei ihm als Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{x-u}\, du$$

definiert, was mit (8) übereinstimmt.

Da die Polynome $V_n(x,t) = (-t)^{\frac{n}{2}} P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)$ den von $f(x,t)$ im § 1 verlangten Bedingungen genügen, so wenden wir auf sie die Formel (6) an. Sie gibt

$$P_n\left(-\frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}\right) = \frac{(-t)^{\frac{n}{2}}}{(-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\, dx.$$

Führen wir durch die Gleichungen $-\frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}} = s$, $-\frac{x}{2\sqrt{-t}} = r$ neue Variable s, r ein, so folgt

$$P_n(s) = \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(r) \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}}\, e^{-\frac{(s\sqrt{-\tau} - r\sqrt{-t})^2}{\tau - t}}\, dr,$$

und nach Multiplikation mit $e^{-\frac{s^2}{2}}$

$$(9)\quad e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s) = \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} P_n(r) \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}} e^{\frac{\tau + t}{2(\tau - t)}(s^2 + r^2) + \frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau - t} sr}\, dr.$$

Es erscheinen also die Funktionen $\psi^{(n)}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$ *als die zum symmetrischen Kerne*

$$(10)\quad K(s,r) = \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}} e^{\frac{\tau + t}{2(\tau - t)}(s^2 + r^2) + \frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau - t} sr}$$

gehörigen Eigenfunktionen, denen die Eigenwerte $\lambda^{(n)} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}}$ *entsprechen.*

Der Kern sowie die Eigenwerte enthalten zwei willkürliche Parameter t und τ, welche den Bedingungen $\tau < 0$, $t - \tau < 0$ genügen müssen. Die Eigenfunktionen und der Kern erfüllen dieselben Randbedingungen: sie verschwinden für $s = \pm \infty$. Die Eigenwerte wachsen mit wachsendem n über alle Grenzen und häufen sich im Unendlichen.

§ 3.

Die Hilbertschen Entwicklungssätze dürfen trotz des unendlichen Intervalles angewandt werden. Wir zeigen das, indem wir uns der Einfachheit halber auf die Darstellung von Schmidt beziehen.

Die Möglichkeit der Entwicklung willkürlicher Funktionen ist durch den folgenden Satz*) ausgedrückt: Jede stetige Funktion $g(s)$, welche mit Hilfe einer stetigen Funktion $p(s)$ in der Form

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\, p(t)\, dt$$

dargestellt werden kann, läßt sich in die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(n)}(s)$ von $K(s,t)$ fortschreitende Reihe

$$g(s) = c_1 \psi^{(1)}(s) + c_2 \psi^{(2)}(s) + \cdots$$

entwickeln, wo die Koeffizienten c_i in Fourierscher Weise bestimmt werden. Die Reihe konvergiert für $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig.

Die Aufstellung dieses Satzes beruht 1) auf der Voraussetzung, daß der Kern $K(s,t)$ eine im Gebiete $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ nach s integrable Funktion ist, für welche die Ungleichung

$$\int_a^b (K(s,t))^2\, ds \leqq A = \text{const.}$$

*) E. Schmidt, Dissertation § 9; Math. Ann. Bd. 62, S. 452.

für $a \leqq t \leqq b$ gilt; 2) auf einem Konvergenzsatze*), welcher besagt: Hat $K(s,t)$ die oben angegebenen Eigenschaften und ist $p(s)$ eine im Gebiete $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktion, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b p(r)\,\psi^{(\nu)}(r)\,dr \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(\nu)}(s)\,ds$$

für $a \leqq t \leqq b$ absolut und gleichmäßig.

Die Forderung für den Kern ist in unserem Falle im Gebiete $-\infty \leqq \xi \leqq +\infty$ erfüllt. Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (K(x,\xi))^2\,dx = c\,e^{\frac{\tau+t}{\tau-t}\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tau+t}{\tau-t}x^2 + \frac{4\sqrt{t\tau}}{\tau-t}x\xi}\,dx = c'\,e^{\frac{\tau-t}{\tau+t}\xi^2},$$

was infolge der Bedingung $\frac{\tau-t}{\tau+t} < 0$ für $-\infty \leqq \xi \leqq +\infty$ kleiner als die konstante Größe c' bleibt.

Der erwähnte Konvergenzsatz bleibt zwar im allgemeinen nicht in unveränderter Form bestehen, da für ein unendliches Intervall die Stetigkeit von $p(x)$ allein nicht ausreicht. Er modifiziert sich aber dahin, daß die Integrabilität von $p(x)$ und von $p^2(x)$ im Intervalle $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ verlangt werden muß.

Somit lautet der Entwicklungssatz für die Funktionen $e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$ folgendermaßen: *Jede im Intervalle* $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ *stetige Funktion* $g(s)$, *welche mit Hilfe einer stetigen und im Intervalle* $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ *integrablen Funktion* $p(s)$, *deren Quadrat auch in demselben Intervalle integrabel ist, in der Form*

$$g(s) = \int_a^b K(s,r)\,p(r)\,dr$$

dargestellt werden kann, wo $K(s,r)$ *irgend einer aus der zweiparametrigen Schar* (10) *von Kernen ist, läßt sich in die in Fouriers Weise gebildete Reihe*

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$$

entwickeln, wo die $P_n(s)$ *Polynome von Hermite sind. Die Reihe konvergiert für* $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ *absolut und gleichmäßig.*

Dieser allgemein für jede Integralgleichung mit unendlichen Grenzen

*) Schmidt § 2.

geltende Entwicklungssatz läßt sich in unserem Falle durch einen anderen, bequemeren ersetzen. Zu diesem Zwecke soll die inhomogene Gleichung $L(u) = \varphi(x, t)$ betrachtet werden.

§ 4.

Wir bezeichnen durch $f(x, t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = \varphi(x, t), \tag{11}$$

die samt ihrer ersten Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ im Gebiete $-\infty \leqq x \leqq +\infty, -\infty \leqq t \leqq 0$ endlich und stetig bleibt; v sei dieselbe Lösung der Gleichung $M(v) = 0$, die im § 1 betrachtet war. Die Greensche Formel gibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_1}^{t_2} [v\,L(f) - f\,M(v)]\,dt\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \Big[v\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial v}{\partial x}\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [fv]_{t=t_2}^{t=t_1} dx,$$

wo die Integration über den Streifen $-\infty \leqq x \leqq +\infty$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ $(t_2 < \tau < 0)$ zu erstrecken ist.

Infolge der über $f(x, t)$ gemachten Voraussetzungen ist

$$\Big[v\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial v}{\partial x}\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0.$$

Wir lassen t_1 gegen $-\infty$ abnehmen; dann ist auch $[fv]_{t=t_1=-\infty} = 0$. t_2 lassen wir gegen den Wert τ des Parameters konvergieren; es folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\tau} v\,\varphi(x,t)\,dt\,dx = -\lim\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t_2)\,v(x,t_2)\,dx\right)_{t_2=\tau}.$$

Indem wir den Grenzübergang in derselben Weise wie im § 1 machen, bekommen wir

$$f(\xi, \tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\tau} \varphi(x,t)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\,dt\,dx. \tag{12}$$

*Durch diese Formel ist die den oben erwähnten Bedingungen unterworfene Lösung der Gleichung $L(f) = \varphi(x, t)$ ausgedrückt.**)

Wir kehren zu den Betrachtungen über die Entwicklung der Funktionen nach Hermiteschen Polynomen zurück.

*) Siehe die Bemerkung am Ende des Kapitels.

§ 5.

Die Integralgleichung (9), welche identisch in t und τ für jedes $t \leqq \tau$ gilt, kann, nach Multiplikation mit $(-t)^{-\frac{n}{2}-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, auf beiden Seiten nach t zwischen den Grenzen $-\infty$ bis τ integriert werden. Es ergibt sich

$$e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s) = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} P_n(r) \left(\int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}\sqrt{-t}} e^{\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s^2+r^2) + \frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau-t} sr} dt \right) dr.$$

Die von einem Parameter τ abhängige, in s und r symmetrische Funktion

$$K^*(r, s) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}\sqrt{-t}} e^{\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s^2+r^2) + \frac{2\sqrt{t\tau}}{\tau-t} sr} dt$$

kann also als Kern von $e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$ betrachtet werden, wobei als neuer Eigenwert der Wert $\lambda^{(n)} = \frac{n}{2}$ genommen werden muß.

Die Bedingung der Entwickelbarkeit einer Funktion $g(s)$ nach den Funktionen $\psi^{(n)}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$ ist also nach § 3 die folgende: Es soll eine im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ stetige und integrierbare Funktion $p(s)$ existieren, deren Quadrat $p^2(s)$ in demselben Gebiete integrierbar ist, so daß für $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ die Darstellung

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(r, s)\, p(r)\, dr \tag{13}$$

gilt. Wir multiplizieren (13) auf beiden Seiten mit $e^{\frac{s^2}{2}}$, führen statt s und r neue Variable $x = 2\sqrt{-\tau}s$ und $\xi = 2\sqrt{-t}r$ ein und bezeichnen $e^{-\frac{x^2}{8\tau}} g\left(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\right)$ durch $g^*(x, \tau)$, $e^{-\frac{\xi^2}{8t}} p\left(\frac{\xi}{2\sqrt{-t}}\right)$ durch $p^*(\xi, t)$. Dann ist

$$g^*(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{p^*(\xi, t)}{-t} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau - t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}} dt\, d\xi. \tag{14}$$

Ziehen wir die Formel (12) heran und vergleichen sie mit (14), so sehen wir, daß eine solche Darstellung von $g^*(x, \tau)$ erhalten wird, wenn

$$\frac{1}{t} p^*(\xi, t) = L(g^*(\xi, t)) = \frac{\partial^2 g^*(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial g^*(\xi, t)}{\partial t}$$

ist. Eine leichte Rechnung gibt weiter

$$p(r) = -\frac{1}{4}\left[\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + (1-r^2)\, g(r)\right]. \tag{15}$$

Außerdem haben wir zu beachten, daß die Formel (12) nur für solche Funktionen $f(x, t)$ gilt, welche die im § 4 gegebenen Bedingungen erfüllen. Indem wir die Forderung der Existenz von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(r)\, dr, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(r)\, dr$$

und die Gestalt (15) von $p(r)$ in Betracht ziehen, gelangen wir zu folgendem Resultate:

Jede im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq +\infty$ *samt ihren zwei ersten Ableitungen endliche und stetige Funktion* $g(s)$, *welche für* $s = \pm\infty$ *von höherer als dritter Ordnung verschwindet, für welche also*

$$\lim\,(s^3 g(s))_{s=\pm\infty} = 0$$

ist, kann in diesem Gebiete in die in Fourierscher Weise gebildete Reihe

$$g(s) = \sum a_n e^{-\frac{s^2}{2}} P_n(s)$$

entwickelt werden. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

§ 6.

Wir bemerken, daß jeder Kern der zweiparametrigen Schar (10) aus zwei Kernen derselben Schar zusammengesetzt ist, denn es gilt die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(t,\tau)}(s,u)\, K^{(t_1,\tau_1)}(u,r)\, du = K^{(t\,t_1,\,\tau\tau_1)}(s,r),$$

die leicht verifiziert werden kann.

§ 7.

Mit Hilfe der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Polynomen von Hermite kann man das folgende *Problem der Wärmeleitung* lösen: *Es sei zur Zeit* $t = \tau$ $(\tau > 0)$ *der Temperaturzustand* $f(x)$ *eines unendlich dünnen und nach beiden Seiten hin unendlich langen Stabes gegeben; zu finden sei sein Temperaturzustand für irgend einen späteren Moment* $t > \tau$.

Die für jeden Wert von $x(-\infty \leqq x \leqq +\infty)$ *und für jedes* $t > \tau$ *konvergente Reihe*

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{16}$$

wo

$$a_n=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-2\sqrt{\tau}\,\xi)\,P_n(\xi)\,d\xi \tag{17}$$

ist, gibt die Lösung des Problems, d. h. genügt der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ *der linearen Wärmeleitung und wird für* $t=\tau$ *der vorgegebenen Funktion* $f(x)$ *gleich.*

Beweis. Die vorgegebene Funktion $f(x)$ sei derart, daß die Funktion $f(x)e^{x^2}$ die Entwicklung nach den Polynomen $P_n(x)$ von Hermite gestattet. Wir führen statt x in $f(x)$ das Argument $-2\sqrt{\tau}\,x$ ein, wo τ den Moment des Temperaturzustandes $f(x)$ angibt, und wir entwickeln $f(-2\sqrt{\tau}\,x)e^{x^2}$ wie folgt:

$$f(-2\sqrt{\tau}\,x)e^{x^2}=\sum_{1}^{\infty} a_n P_n(x). \tag{18}$$

Der Entwicklungskoeffizient a_n hängt von τ ab und wird nach der Formel (17) bestimmt. Die Reihe konvergiert für $-\infty\leqq x\leqq+\infty$. Wir können, ohne die Konvergenz zu zerstören, das Argument x in $P_n(x)$ durch $-\frac{x}{2\sqrt{t}}$ ersetzen, wo t einen positiven Parameter bedeutet, und jedes Glied der Reihe mit dem entsprechenden $\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ multiplizieren, da $\frac{\tau}{t}<1$ ist. Multiplizieren wir außerdem die ganze Reihe mit $e^{-\frac{x^2}{4t}}$, was für kein x und keine zu betrachtenden Werte von t unendlich wird, so bekommen wir die für $-\infty\leqq x\leqq+\infty$, $0<\tau<t$ konvergente Reihe (16). Die Funktion $\varphi(x,t)$ ist eine Lösung der Gleichung (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$, da $\varphi(x,t)$ von der Form $c_1u_1+c_2u_2+\cdots$ ist, wo

$$u_n=t^{-\frac{n+1}{2}}P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

eine Partikularlösung der Gleichung (1) ist.

Für $t=\tau$ reduziert sich $\varphi(x,t)$ auf

$$\varphi(x,t)=\sum a_n P_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)e^{-\frac{x^2}{4\tau}},$$

was nach (18) mit $f(x)$ übereinstimmt.

Bemerkung. Die Formel (16) ist nichts anderes als eine Umgestaltung der bekannten Fourierschen Lösung

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}\,d\xi$$

des Problems, wovon man sich überzeugt, indem man in (18) die Werte (17) einsetzt und vom Satze*) über die Entwicklung des Kernes:

$$K(x,\xi)=\sum_n \frac{\psi^{(n)}(x)\,\psi^{(n)}(\xi)}{\lambda^{(n)}}$$

Gebrauch macht.

Bemerkung zu § 4. Die im § 4 gewonnene Darstellung (12) der Lösung $f(x,t)$ der Gleichung (11) kann dadurch spezialisiert werden, daß die gesuchte Lösung von der Form $f(x,t)=X(x)\,T(t)$ und zugleich $\varphi(x,t)$ von der Form $\varphi(x,t)=\varphi(x)T(t)$ vorausgesetzt wird. Das Eintragen von diesen Werten in die Gleichung (11) gibt $T(t)=e^t$, und für $X(x)$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X''-X=\varphi(x). \tag{11'}$$

Wenden wir die allgemeine Formel (12) an, so folgt

$$e^{\tau}X(\xi)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{\tau} e^{t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\,dt\right)\varphi(x)\,dx.$$

Indem wir die Substitution $\sqrt{\tau-t}=\alpha$ machen und α als neue Integrationsvariable einführen, haben wir

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}}\,dt=\int_0^{\infty} e^{\tau}\cdot e^{-\alpha^2-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$

Das letzte Integral läßt sich nach der bekannten Formel berechnen:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2-\frac{q^2}{\alpha^2}}\,d\alpha=e^{-2q},$$

wo $q>0$ vorausgesetzt wird. Es muß also $q=\frac{|x-\xi|}{2}$ genommen werden:

$$\int_0^{\infty} e^{\tau}e^{-\alpha^2-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}\,e^{-|x-\xi|}e^{\tau}.$$

*) E. Schmidt, Diss. S. 12; Math. Ann. Bd. 62, S. 449.

Somit gelangen wir zu folgender Darstellung des im Gebiete $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ endlichen Integrales $X(x)$ der Gleichung (11′):

$$X(\xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\, e^{-|x-\xi|}\, \varphi(x)\, dx.$$

Wir bemerken, daß dies nichts anderes ist als die Hilbertsche Darstellung mittels der Greenschen Funktion. $\frac{1}{2}\, e^{-|x-\xi|}$ ist als Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u) = u'' - u$ (für die dort mit V bezeichnete Randbedingung) auch von Hilbert*) angegeben worden.

Zweites Kapitel.

Den Gegenstand dieses Kapitels bildet die Untersuchung der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach gewissen Polynomen $Q_n(x)$, welche besonders von Laguerre betrachtet worden sind.

§ 8.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem Kreiszylinder ist in den Koordinaten ϱ, φ, z, wo ϱ den Abstand von der Achse des Zylinders, φ das Azimut und z die Höhe bedeutet, die folgende:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Bei der Voraussetzung, daß die Temperatur u nur vom Abstande ϱ von der Achse abhängt, daß ferner $\varrho^2 = x$ und $k = \frac{1}{4}$ ist, bekommen wir die Gleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

mit welcher wir uns im folgenden beschäftigen werden.

Wir suchen zunächst Polynome $W_n(x, t)$, homogen in x und t, die der Gleichung (1) genügen. Setzen wir

$$u = W_n(x, t) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} t + \cdots + a_0 t^n,$$

so folgt aus (1) die rekurrente Beziehung

$$(n-k)^2 a_{n-k} - (k+1)\, a_{n-k-1} = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

für a_n; dadurch sind die Polynome bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Setzen wir $W_n(x, t) = t^n Q_n\left(\frac{x}{t}\right)$, so ergibt sich aus (1) die gewöhnliche Differentialgleichung für die Polynome $Q_n(z)$:

*) Göttinger Nachrichten 1904, p. 219.

$$z\frac{d^2Q_n}{dz^2}+(1+z)\frac{dQ_n}{dz}-nQ_n=0 \qquad z=\frac{x}{t}.$$

Q_n sind die sogenannten *Laguerreschen Polynome.*

Laguerre*) hat sie zuerst als Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^u}{x-u}\,du$$

definiert, ihre Differentialgleichung und ihre Orthogonaleigenschaften

$$\int_{-\infty}^{0}e^x\,Q_n(x)\,Q_m(x)\,dx=\begin{matrix}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{matrix}$$

aufgestellt. Alle diese Eigenschaften der Polynome Q_n wurden auch von Tschebyscheff**) angegeben. Wir werden von der partiellen Gleichung (1) ausgehen.

§ 9.

Es sei $u(x,t)$ eine solche Lösung der Gleichung (1), welche samt ihrer ersten Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ im Gebiete $x\geqq 0$, $t\leqq 0$ für endliche x endlich und stetig ist; für $x=\infty$ seien die Bedingungen

$$\lim\,(u(x,t)e^{-k^2x})_{x=\infty}=0, \qquad \lim\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,e^{-k^2x}\right)_{x=\infty}=0,$$

wo k^2 eine positive Konstante ist, identisch für alle t erfüllt.

Als Lösung $v(x,t)$ der zu (1) adjungierten Gleichung

$$M(v)\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{x^2}v=0$$

sei die Funktion

$$v(x,t)=\frac{x}{\tau-t}\,e^{-\frac{x+\xi}{\tau-t}}J\left(2i\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right) \tag{2}$$

gewählt, wo ξ und τ zwei Konstanten $\xi\geqq 0$, $\tau\leqq 0$ sind und $J(x)$ die nullte Besselsche Funktion bedeutet. Im zu untersuchenden Bereiche $x\geqq 0$, $t-\tau\leqq 0$ $(\tau<0)$ ist $v(x,t)$ endlich und stetig.

Für $x=0$ ist

$$(v)_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{v}{x}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{1}{\tau-t}\,e^{-\frac{\xi}{\tau-t}}.$$

*) Oeuvres I, p. 428.

**) Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg 1860.

Für $x = \infty$ gilt die angenäherte Darstellung

$$v \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x}{\tau - t}} \sqrt[4]{\frac{x}{\xi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{\xi}-\sqrt{x})^2}{\tau - t}},$$

wovon man sich überzeugt, wenn man die asymptotische Darstellung von $J(x)$ für große Werte von x

$$J(2i\sqrt{x}) \sim \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{x}}$$

beachtet. Die Greensche Formel

$$\iint_{(A)} [v L(u) - u M(v)]\, dt\, dx = \int_{(S)} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x} uv\right) dt + \frac{1}{x} uv\, dx\right],$$

wo sich das zweifache Integral auf einen Bereich A in der (xt)-Ebene, das einfache auf dessen Kontur S bezieht, gibt, wenn wir unter u und v die oben erwähnten Funktionen verstehen,

$$\int_{(S)} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x} uv\right) dt + \frac{1}{x} uv\, dx\right] = 0. \tag{3}$$

Als Integrationsbereich wählen wir ein Rechteck, welches durch die Geraden $x = 0$, $x = x' > \xi$, $t = t_1 < \tau$, $t = t_2 (\tau > t_2 > t_1)$ begrenzt ist und welches nachher, wenn wir x' unendlich wachsen lassen, zu einem unendlichen Streifen wird. Die Formel (3) gibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x} uv\right]_{x=0}^{x=x'} dt + \int_0^{x'} \left[\frac{1}{x} uv\right]_{t=t_2}^{t=t_1} dx = 0.$$

Es sei $x' = \infty$; v ist so gewählt, daß $\left[v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x} uv\right]_{x=0}^{x=\infty}$ verschwindet. Es ergibt sich also

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{x} uv\right]_{t=t_1} dx = \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} uv\right]_{t=t_2} dx. \tag{4}$$

Wir wollen den Wert dieses Integrales für $t = \tau$ berechnen. Für sehr kleines $\tau - t$ ist asymptotisch

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{x}{\xi}} \sqrt{\frac{x}{\tau - t}}\, e^{-\frac{(\sqrt{\xi}-\sqrt{x})^2}{\tau - t}}$$

und

$$\int_0^{x'} \frac{1}{x} uv\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x'} \sqrt[4]{\frac{x}{\xi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{\xi}-\sqrt{x})^2}{\tau - t}} u(x, t) \frac{dx}{2\sqrt{x(\tau - t)}}.$$

Führen wir die neue Integrationsvariable s durch die Gleichung

$$\frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{x}}{\sqrt{\tau-t}} = -s$$

ein, so ist

$$\int_0^{x'} \frac{1}{x}\, uv\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\tau-t}}}^{\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{\xi}}{\sqrt{\tau-t}}} e^{-s^2} u\left(\left(\sqrt{\xi}+s\sqrt{\tau-t}\right)^2,\ \tau-(\tau-t)\right) ds.$$

Lassen wir $t=\tau$ und $x'=\infty$ werden, so bekommen wir

$$\lim\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, uv\, dx\right)_{t=\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, u(\xi,\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = u(\xi,\tau).$$

Wegen (4) ist also für jedes $t \leqq \tau$

$$u(\xi,\tau) = \int_0^{\infty} u(x,t)\, \frac{1}{\tau-t}\, e^{-\frac{x+\xi}{\tau-t}}\, J\left(2i\,\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right) dx. \tag{5}$$

Durch diese Formel, welche in einer etwas veränderten Form von Kepinski) gegeben ist, ist eine samt ihrer Ableitung* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *im Quadranten* $x \geqq 0$, $t \leqq 0$ *endliche und stetige oder für* $x=\infty$ *in der angegebenen Weise unendlich werdende Lösung der Gleichung* (1) *dargestellt.*

§ 10.

Die Formel (5) gibt in Anwendung auf $W_n(x,t)$

$$W_n(\xi,\tau) = \int_0^{\infty} W_n(x,t)\, \frac{1}{\tau-t}\, e^{-\frac{x+\xi}{\tau-t}}\, J\left(2i\,\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right) dx,$$

oder, wenn wir $W_n(x,t)$ durch $t^n Q_n\left(\frac{x}{t}\right)$ ersetzen,

$$Q_n\left(\frac{\xi}{\tau}\right) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \int_0^{\infty} Q_n\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{\tau-t}\, e^{-\frac{x+\xi}{\tau-t}}\, J\left(2i\,\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right) dx.$$

Führen wir neue Variable $\frac{x}{t}=r$, $\frac{\xi}{\tau}=s$ ein, und beachten wir, daß $t<0$ ist, so ergibt sich schließlich die Formel

*) Mathematische Annalen Bd. 61, 1905.

$$(6)\quad e^{\frac{s}{2}} Q_n(s) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{r}{2}} Q_n(r) \frac{t}{t-\tau} e^{-\frac{t+\tau}{2(\tau-t)}(s+r)} J\left(2i\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right) dr,$$

welche identisch für alle $\tau < 0$, $t < \tau$ und für alle s im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq 0$ gilt.

Die Integralgleichung (6) *zeigt, daß die Funktionen* $e^{\frac{s}{2}} Q_n(s)$, *die zum symmetrischen, mit zwei Parametern* t, τ *behafteten Kerne*

$$K(s,r) = \frac{t}{t-\tau} e^{-\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s+r)} J\left(2i\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right)$$

gehörigen Eigenfunktionen sind, wobei die entsprechenden Eigenwerte $\lambda^{(n)} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^n$ *sind.* Infolge der Bedingung $t < \tau < 0$ häufen sich die Eigenwerte im Unendlichen. Aus (6) folgen in gewöhnlicher Weise die von Laguerre angegebenen Orthogonaleigenschaften

$$\int_{-\infty}^{0} e^s Q_n(s)\, Q_m(s)\, ds = \begin{matrix} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{matrix}$$

§ 11.

Der allgemeine Satz des § 3 über die Entwicklung willkürlicher Funktionen kann hier ohne Änderung wiederholt werden, da der Kern die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{0} (K(s,r))^2\, dr < A \text{ für } -\infty \leqq s \leqq 0$$

erfüllt. Der Satz läßt sich bequemer aussprechen, wenn wir die inhomogene Gleichung $L(u) = \varphi(x,t)$ in Betracht ziehen. Es sei $f(x,t)$ die Lösung der Gleichung

$$(7)\quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x,t),$$

welche im Gebiete $x \geqq 0$, $t \leqq 0$ samt ihrer Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ endlich und stetig bleibt. Durch die Formel (2) sei die zu betrachtende Lösung der Gleichung $M(v) = 0$ gegeben.

Die Greensche Formel, auf den Bereich $0 \leqq x \leqq \infty$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ $(t_2 < \tau < 0)$ angewandt, gibt

$$\int_0^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} [vL(u) - uM(v)]\, dt\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x}uv\right]_{x=0}^{x=\infty} dt + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x}uv\right]_{t=t_2}^{t=t_1} dx.$$

Da u und v so beschaffen sind, daß

$$\left[v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x}uv\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

verschwindet, so folgt

$$\int_0^\infty\int_{t_1}^{t_2} v\varphi(x,t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \left[\frac{1}{x}uv\right]_{t=t_2}^{t=t_1} dx.$$

Wir lassen t_1 gegen $-\infty$ und t_2 gegen τ konvergieren. Dann ist

$$\left[\frac{1}{x}uv\right]_{t=t_1=-\infty} = 0$$

und nach § 3

$$\lim\left(\int_0^\infty \frac{1}{x}uv\,dx\right)_{t=\tau} = u(\xi,\tau).$$

Wir bekommen die folgende für $\xi \geqq 0$, $\tau \leqq 0$ gültige Darstellung der den oben gegebenen Bedingungen unterworfenen Lösung $u(x,t)$ der Gleichung (7):

$$u(\xi,\tau) = -\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\tau} \varphi(x,t)\,\frac{x}{\tau-t}\,e^{-\frac{x+\xi}{\tau-t}}\,J\left(2i\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right)dt\,dx. \tag{8}$$

§ 12.

Die in allen $t<\tau$ identische Gleichung (6) kann nach beiderseitiger Multiplikation mit t^{-n-1} $(n=1,2,3,\cdots)$ nach t zwischen den Grenzen $-\infty$, τ integriert werden:

$$e^{\frac{s}{2}}\,Q_n(s) = -n\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{r}{2}}\,Q_n(r)\int_{-\infty}^{\tau}\frac{1}{t-\tau}\,e^{-\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s+r)}\,J\left(2i\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right)dt\,dr,$$

woraus folgt, daß die in s und r symmetrische, von einem Parameter τ abhängige Funktion

$$K^*(s,r) = -\int_{-\infty}^{\tau}\frac{1}{t-\tau}\,e^{-\frac{t+\tau}{2(\tau-t)}(s+r)}\,J\left(2i\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right)dt$$

als Kern der Funktionen $\psi^{(n)}(s) = e^{\frac{s}{2}}\,Q_n(s)$ genommen werden kann, wenn entsprechender Eigenwert $\lambda^{(n)} = n$ gilt.

Die Bedingung der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $g(s)$ in die nach den Funktionen $\psi^{(n)}(s) = e^{\frac{s}{2}}\,Q_n(s)$ fortschreitende Reihe lautet

demnach: Es muß eine im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq 0$ integrierbare Funktion $p(s)$ existieren, deren Quadrat $p^2(s)$ in demselben Gebiete integrierbar ist, so daß die Darstellung

$$g(s) = \int_{-\infty}^{0} K^*(s, r)\, p(r)\, dr$$

gilt. Führen wir neue Variable $s = \frac{x}{t}$, $r = \frac{\xi}{\tau}$ ein und bezeichnen wir $e^{\frac{x}{2t}} g\left(\frac{x}{t}\right)$ durch $g^*(x, t)$ und $e^{\frac{\xi}{2\tau}} p\left(\frac{\xi}{\tau}\right)$ durch $p^*(\xi, \tau)$, so folgt

$$g^*(x, t) = -\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\xi}{\tau - t}\, e^{-\frac{x+\xi}{\tau - t}}\, J\left(2i\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau - t}\right) \frac{p^*(\xi, \tau)}{\tau\xi}\, dt\, d\xi .$$

Der Vergleich dieser Formel mit der Formel (8) gibt

$$p(r) = r g''(r) + (2r+1) g'(r) + \left(\frac{3}{4} r + \frac{1}{2}\right) g(r).$$

Ziehen wir diese Formel zusammen mit der Forderung der Existenz der Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} p(r)\, dr, \quad \int_{-\infty}^{0} p^2(r)\, dr$$

in Betracht, so ergibt sich das Resultat:

Jede samt ihren zwei ersten Ableitungen im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq 0$ *endliche und stetige Funktion* $g(s)$, *welche für* $s = -\infty$ *von höherer als zweiter Ordnung verschwindet, für welche also*

$$\lim\, (s^2 g(s))_{s=-\infty} = 0$$

ist, läßt sich in diesem Gebiete in die Reihe

$$g(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{\frac{s}{2}} Q_n(s)$$

*entwickeln. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.**)

---

*) Die Funktion $f(s) = s^{1-p}$, $0 < p < \frac{1}{2}$, welche O. Blumenthal (Inaugural-Dissertation, Göttingen 1898) als Beispiel einer Funktion angibt, die keine Entwicklung von der Form $\sum a_n Q_n(s)$ gestattet, genügt unseren Bedingungen für die Möglichkeit der Entwicklung nicht, da schon die erste Ableitung dieser Funktion an der Stelle $s = 0$ unendlich wird.

§ 13.

Die Polynome $Q_n(x)$ von Laguerre können in folgender Weise *verallgemeinert* werden. Wir führen in die Koeffizienten der partiellen Gleichung (1) zwei von Null verschiedene Konstanten m und l ein, so daß die Gleichung die Gestalt*)

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{l}{x}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

annimmt.

Wir fragen nach der Existenz polynomischer Lösungen $W_n(x, t)$ von (9), die homogen in x und t sind. Der Ansatz

$$u = W_n(x, t) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} t + \cdots + a_0 t^n$$

führt zur rekurrenten Beziehung

$$(n-k)(m+n-k)a_{n-k} - l(k+1)a_{n-k-1} = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

für a_i. Die Bestimmung der Koeffizienten ist also immer möglich und die polynomischen Lösungen existieren, wenn $m \neq -1, -2, -3, \cdots$ ist. Setzen wir $W_n(x, t) = t^n Q_n^{(l,m)}\left(\frac{x}{t}\right)$, so folgt aus (9) die gewöhnliche Differentialgleichung für $Q_n^{(l,m)}(z)$

$$z\frac{d^2 Q_n^{(l,m)}(z)}{dz^2} + (m+1+lz)\frac{dQ_n^{(l,m)}(z)}{dz} - ln\,Q_n^{(l,m)}(z) = 0,$$

welche für $m = 0$, $l = 1$ in die Laguerresche Differentialgleichung übergeht.

Der Fall $m > 0$, $l > 0$ läßt sich in derselben Weise behandeln, wie es für den Fall der eigentlichen Laguerreschen Polynome geschah. Es sei $u(x, t)$ eine Lösung der Gleichung (9), die mit ihrer ersten Ableitung im Gebiete $x \geqq 0$, $t \leqq 0$ für endliche x endlich und stetig ist und für $x = \infty$ die Bedingungen

$$\lim\,(u(x, t)e^{-k^2 x})_{x=\infty} = 0, \qquad \lim\left(\frac{\partial u}{\partial x}e^{-k^2 x}\right)_{x=\infty} = 0$$

identisch in t erfüllt. Die zu (9) adjungierte Gleichung

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{m+1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{l}{x}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{m+1}{x^2}v = 0$$

wird durch die Funktion

$$v(x, t) = \frac{1}{i^m}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x}{\tau - t}\,e^{-l\frac{x+\xi}{\tau-t}}\,J^m\left(2il\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau - t}\right) \qquad (\xi > 0,\ \tau < 0)$$

*) In dieser Form wird die Gleichung von Kepinski, Math. Ann. Bd. 61, betrachtet.

befriedigt, wo J^m die Besselsche Funktion mit dem Index m bedeutet. Die Greensche Formel

$$\iint_{(A)} [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dt\,dx = \int_{(S)} \left[\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x} - u\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{m+1}{x}\,uv\right)dt + \frac{l}{x}\,uv\,dx\right],$$

auf den Bereich $x \geqq 0$, $t \leqq 0$ angewandt, gibt

$$l\int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\,uv\right]_{t=t_1} dx = l\int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\,uv\right]_{t=t_2} dx, \tag{10}$$

wo t_1, t_2 irgend welche Werte $t_1 < \tau$, $t_2 < \tau$ sind.

Der Grenzwert des Integrales

$$l\int_0^\infty \frac{1}{x}\,uv\,dx$$

für $t = \tau$ ist $u(\xi, \tau)$ und wegen (10) ist für jedes $t < \tau$

$$u(\xi,\tau) = \int_0^\infty u(x,t)\,\frac{l}{i^m}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\tau - t}\,e^{-l\frac{x+\xi}{\tau-t}}\,J^m\left(2il\,\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau-t}\right)dx.$$

Diese Darstellung gilt für jede Lösung der Gleichung (9), *welche die oben erwähnten Bedingungen erfüllt.*

Speziell gilt sie für Polynome $W_n(x,t)$ und führt zur Integralgleichung

$$s^{\frac{m}{2}}\,e^{l\frac{s}{2}}\,Q_n^{(l,m)}(s) \tag{11}$$

$$= \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \int_{-\infty}^{0} r^{\frac{m}{2}}\,e^{l\frac{r}{2}}\,Q_n^{(l,m)}(r)\,\frac{l}{i^m}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{t}{\tau - t}\,e^{-l\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s+r)}\,J^m\left(2il\,\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right)dr$$

$$\tau < 0, \qquad t - \tau \leqq 0.$$

Die Funktionen

$$\psi^{(n)}(s) = s^{\frac{m}{2}}\,e^{l\frac{s}{2}}\,Q_n^{(l,m)}(s)$$

sind die Eigenfunktionen des Kernes

$$K(s,r) = \frac{l}{i^m}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{t}{\tau - t}\,e^{-l\frac{\tau+t}{2(\tau-t)}(s+r)}\,J^m\left(2il\,\frac{\sqrt{t\tau sr}}{\tau-t}\right)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda^{(n)} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^n$.

Aus (11) folgen die Orthogonalitätseigenschaften der normierten Polynome $Q_n^{(l,m)}(s)$:

$$\int_{-\infty}^{0} s^m e^{ls} Q_n^{(l,m)}(s) Q_{n'}^{(l,m)}(s)\, ds = \begin{matrix} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n' \end{matrix}$$

und die Möglichkeit der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Polynomen $Q_n^{(l,m)}$, welche sich ähnlich wie im Falle der eigentlichen Laguerreschen Polynome untersuchen läßt.

Drittes Kapitel.

§ 14.

Wir gehen dazu über, die Resultate des ersten Kapitels, betreffend die Polynome $P_n(x)$ von Hermite, auf den *Fall von zwei Variablen* x, y auszudehnen.

Es sei wie früher im Kapitel I, § 2 durch $V_n(x, t)$ die in x und $\sqrt{t}$ vom n^{ten} Grade homogene, polynomische Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

bezeichnet. Für jedes $x(-\infty \leqq x \leqq +\infty)$ und für jedes $t > t_1$ ergab sich (Kap. I) die folgende Darstellung

$$V_n(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t - t_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(\xi, t_1) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_1)}}\, d\xi.$$

Es sei im folgenden überall vorausgesetzt, daß t und t_1 negativ sind.

Wir schreiben die analoge Formel für $V_m(y, t)$. Durch Multiplikation dieser beiden Formeln ergibt sich die folgende:

$$(1)\quad V_n(x, t)\, V_m(y, t) = \frac{1}{4\pi(t - t_1)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_n(\xi, t_1) V_m(\eta, t_1)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-t_1)}}\, d\xi\, d\eta.$$

Das in x, y und $\sqrt{t}$ vom $n + m^{\text{ten}}$ Grade homogene Polynom $V_n(x, t)\, V_m(y, t)$ genügt der Differentialgleichung der Wärmeleitung in zwei Dimensionen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Für das allgemeinste Polynom dieser Art

$$W_p(x, y, t) = \sum_{k=0}^{k=p} A_k V_{p-k}(x, t)\, V_k(y, t)$$

(A_k sind willkürliche Konstanten) gilt augenscheinlich auch die Formel (1):

$$W_p(x, y, t) = \frac{1}{4\pi(t-t_1)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_p(\xi, \eta, t_1) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-t_1)}} d\xi\, d\eta,$$

wo die Variablen in den Grenzen $-\infty \leqq x, y \leqq +\infty$, $t < t_1$ eingeschlossen sind. Setzen wir

$$W_n(x, y, t) = (-t)^{\frac{n}{2}} Q_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{-t}}, -\frac{y}{2\sqrt{-t}}\right),$$

so genügen die Polynome $Q_n(s, r)$ der folgenden homogenen Integralgleichung, wie sich nach analogen Umformungen, wie im § 2, herausstellt:

$$(2) \qquad e^{-\frac{s^2+r^2}{2}} Q_n(s, r)$$

$$= \frac{t_1}{\pi(t-t_1)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s'^2+r'^2}{2}} Q_n(s', r') e^{\frac{t+t_1}{2(t-t_1)}(s^2+r^2+s'^2+r'^2)+2\frac{\sqrt{tt_1}}{t-t_1}(ss'+rr')} ds'\, dr'.$$

Die Funktionen

$$\psi^{(n)}(s, r) = e^{-\frac{s^2+r^2}{2}} Q_n(s, r)$$

erscheinen als Eigenfunktionen des Kernes

$$K(s, r, s', r') = \frac{t_1}{\pi(t-t_1)} e^{\frac{t+t_1}{2(t-t_1)}(s^2+r^2+s'^2+r'^2)+2\frac{\sqrt{tt_1}}{t-t_1}(ss'+rr')}.$$

Der Kern und der Eigenwert $\lambda^{(n)} = \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{n}{2}}$ hängen von zwei willkürlichen Konstanten t und t_1 ab, die zwischen den Grenzen $t < 0$, $t_1 - t < 0$ variieren. Aus der Gleichung (2) folgen die Orthogonalitätseigenschaften der Funktionen $\psi^{(n)}(s, r)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(r, s)\, Q_{n'}(r, s) e^{-(r^2+s^2)} dr\, ds = \begin{matrix} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n'. \end{matrix}$$

§ 15.

Eine Lösung $u = f(x, y, t)$ der Gleichung

$$(3) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x, y, t),$$

welche im Gebiete $-\infty \leqq x, y \leqq +\infty$, $-\infty \leqq t < 0$ samt ihren Ab-

leitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ endlich und stetig bleibt, gestattet die folgende Darstellung:

$$(4) \quad f(\xi, \eta, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\tau - t} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(\tau - t)}} \varphi(x, y, t)\, dt\, dx\, dy,$$

was leicht aus der Greenschen Formel

$$\iiint_{(V)} [v L(u) - u M(v)] dx\, dy\, dt$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n, y) - uv \cos(n, t) \right] d\sigma$$

abgeleitet werden kann, wenn

$$v = \frac{1}{\tau - t} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(\tau - t)}}$$

genommen wird und die Integration über den dreidimensionalen Raum $-\infty \leqq t \leqq \tau$, $-\infty \leqq x,\ y \leqq +\infty$ erstreckt wird.

§ 16.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Frage nach der Entwicklung einer willkürlichen Funktion $g(x, y)$ in eine Reihe von der Form

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n Q_n(x, y) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

erledigen, wo a_n in Fourierscher Weise durch das Integral

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-(x^2 + y^2)} Q_n(x, y)\, dx\, dy$$

bestimmt wird.

Das Kriterium der Entwickelbarkeit in einem endlichen Gebiete $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ ist nach Hilbert das folgende: Eine stetige Funktion $g(x, y)$ läßt sich in eine nach den Eigenfunktionen des symmetrischen Kernes $K(x, y; \xi, \eta)$ fortschreitende Reihe entwickeln, wenn eine stetige Funktion $p(x, y)$ existiert, die die Darstellung von $g(x, y)$ in der Form

$$g(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x, y; \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ermöglicht. Die Stetigkeit von $K(x, y; \xi, \eta)$ in bezug auf x, y muß dabei vorausgesetzt werden. Bei einem unendlich großen Gebiete ändert sich der Satz dahin, daß die Stetigkeit von $p(x, y)$, $K(x, y; \xi, \eta)$ durch die

Integrabilität von $p(x, y)$, $p^2(x, y)$, $K(x, y; \xi, \eta)$, $K^2(x, y; \xi, \eta)$ im zu betrachtenden Gebiete zu ersetzen ist.

Diesen allgemeinen Satz wollen wir für unseren Fall spezialisieren.

Die in t und t_1 identische Formel (2) kann nach Multiplikation mit $(-t_1)^{-\frac{n}{2}-1}$ auf beiden Seiten nach t_1 zwischen den Grenzen $-\infty$, t integriert werden. Es ergibt sich eine neue Integralgleichung, aus welcher folgt, daß die Funktion

$$K^*(s, r; s', r') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{t-t_1}\, e^{\frac{t+t_1}{2(t-t_1)}(s^2+r^2+s'^2+r'^2)+2\frac{\sqrt{tt_1}}{t-t_1}(ss'+rr')}\, dt_1$$

als Kern von

$$e^{-\frac{s^2+r^2}{2}}\, Q_n(s, r)$$

genommen werden kann und daß die zugehörigen Eigenwerte $\lambda^{(n)} = n$ sind.

Mit Hilfe des Kernes $K^*(s, r; s', r')$ läßt sich der Entwicklungssatz so aussprechen: Es muß eine im Gebiete $-\infty \leqq x, y \leqq +\infty$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $p(x, y)$ existieren, die die Darstellung

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x, y; \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

vermittelt. Setzen wir den Wert von $K^*(x, y; \xi, \eta)$ ein und vergleichen wir die Formel mit (4), so bekommen wir

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} + [2-(x^2+y^2)]g(x, y)\right).$$

Daraus folgt der Satz: *Jede für endliche x, y samt ihren ersten und zweiten Ableitungen endliche und stetige Funktion $g(x, y)$, welche nach der Transformation in Polarkoordinaten r, ϑ für alle genügend fernen Punkte in der Form*

$$g(x, y) = r^{-m}\varphi(r, \vartheta) \qquad m > 3$$

dargestellt werden kann, wo φ samt seinen ersten und zweiten Ableitungen für $r = \infty$ endlich bleibt, läßt sich in Fourierscher Weise in die Reihe

$$g(x, y) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, Q_n(x, y)$$

entwickeln.

§ 17.

Es sei die Frage vorgelegt: *Gegeben ist zur Zeit* $t = \tau > 0$ *der Temperaturzustand* $f(x, y)$ *in der ganzen* (x, y)*-Ebene; zu finden ist der Temperaturzustand für irgend einen späteren Moment* $t > \tau$. *Gestattet* $f(x, y)e^{x^2+y^2}$ *die Entwicklung nach den Polynomen* $Q_n(x, y)$, *so gibt die für die Werte* $-\infty \leqq x, y \leqq +\infty$, $t > \tau$ *konvergente Reihe*

$$\varphi(x, y, t) = \sum_1^\infty a_n Q_n\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}, -\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}},$$

wo

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-2\sqrt{\tau}\,\xi, -\sqrt{\tau}\,\eta)\, Q_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist, den gesuchten Temperaturzustand.

Der Beweis ist vollständig demjenigen des § 7 analog.

Über das Gaußsche Fehlergesetz.

Von

Felix Bernstein in Halle a. S.

Teil I.

Das lineare Fehlergesetz.

1.

Einleitung.

Die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

tritt in verschiedenen Gebieten der Mathematik auf und ist schon seit langer Zeit Gegenstand der Untersuchung gewesen. Zuerst hat man wohl ihre Bedeutung für den Beweis des Satzes vom *Parallelogramm der Kräfte* erkannt. Später zeigte sich, daß der Beweis des *Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie* die Behandlung der Gleichung (1) erfordert. Endlich besitzt sie eine unmittelbare Bedeutung für den *axiomatischen Aufbau der Arithmetik*.

Cauchy*) hat zuerst bewiesen, daß die lineare Funktion Ax die einzige *stetige* Lösung der Gleichung (1) ist. Die Methode des Beweises stammt schon aus dem Altertum, und ich glaube, es besteht eine interessante historische Kontinuität. Bereits Archimedes**) hat in seinem berühmten Beweise des Hebelgesetzes eine der unsrigen verwandte Funktionalgleichung exakt gelöst.

In der Tat kommt seine Methode, das Gleichgewicht des Hebels mit ungleichen Armen auf das Gleichgewicht des gleicharmigen Hebels zurückzuführen, darauf hinaus, eine Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x)\left(1 + f\left(\frac{y}{x}\right)\right) \tag{2}$$

*) Analyse algébrique.

**) Wir wollen nicht verfehlen, auf die beredte und glänzende Schilderung zu verweisen, welche Duhem (Les origines de la statique) von der geistigen Eigenart des großen Gelehrten gegeben hat, der vor allem ein Meister der Methode war.

unter der Bedingung $f(1)=1$ durch die Funktion $f(x)=x$ als die stetige Lösung derselben zu befriedigen.

G. Darboux*) hat ferner gezeigt, daß die Annahme einer endlichen *oberen Grenze* g für die Funktion $f(x)$ der Gleichung (1) in irgend einem Intervall ausreicht, die Stetigkeit derselben zu erschließen und damit den linearen Verlauf nachzuweisen.

Endlich hat G. Hamel**) neuerdings festgestellt, daß auch unstetige Lösungen der Funktionalgleichung (1) existieren, falls man annimmt, daß die Wohlordnung des Kontinuums möglich sei. Solche Funktionen würden in der Nähe jeder Stelle jedem Werte beliebig nahe kommen, so daß diejenigen Punkte der Ebene, welche die Funktion darstellen, die ganze Ebene überalldicht ausfüllen müssen. Irgend eine, diese letztere Eigenschaft ausschließende Annahme würde also hinreichen, die stetige Lösung zur *einzigen* zu machen. Die hierin liegende Erweiterung der Darbouxschen Bedingung läßt sich, worauf es wesentlich ankommt, leicht völlig elementar zeigen. Da nämlich, unter α und β *rationale* Zahlen verstanden, aus der Funktionalgleichung (1) stets

$$f(a\alpha)=\alpha f(a),\quad f(b\beta)=\beta f(b)$$

für irgend welche Werte a und b folgt, so würde die Annahme einer nichtlinearen Lösung zur Folge haben, daß wir $\frac{f(b)}{b}$ als verschieden von $\frac{f(a)}{a}$ voraussetzen können. Dann können wir α und β jedoch so wählen, daß die Größen

$$\alpha a+\beta b$$
$$\alpha f(a)+\beta f(b)$$

vorgeschriebenen Werten beliebig nahe kommen.

Die Funktionalgleichung (1) tritt nun auch in der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* auf. Es bedient sich C. F. Gauß***) derselben bei Gelegenheit der ersten Begründung seines Fehlergesetzes. Indessen führt die Annahme, auf welcher die Ableitung des Fehlergesetzes beruht, nämlich die berühmte Hypothese „des arithmetischen Mittels", nicht unmittelbar auf jene Funktionalgleichung. In der Tat ist ja die zu bestimmende Funktion hier eine Exponentialfunktion, deren Exponent eine quadratische Funktion ist. Erst die Ableitung des negativ genommenen Logarithmus genügt der Funk-

*) G. Darboux, 1) Sur la composition des forces en statique. Bull. des Scienc. Math. 9 (1875); 2) „Sur le théorème fondamental de la géométrie projective". Math. Ann. 17 (1886), p. 58.

**) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann. 60, p. 459. — Siehe auch die Bemerkung am Schluß dieser Arbeit (S. 447).

***) C. F. Gauß, Theoria motus etc. 1809, art. 175 u. 179 (Werke 7).

tionalgleichung (1). Der negativ genommene Logarithmus der Funktion, auf dessen Bestimmung es ankommt, genügt der Funktionalungleichung

$$(3) \quad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1 + \varepsilon) + \varphi(x_2 + \varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n + \varepsilon).$$

Hierin bedeute ε *irgend* eine von Null verschiedene Größe und es seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *irgend* welche Argumente, welche durch die Gleichung

$$(4) \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

verbunden sind.

Die zu bestimmende Funktion $\varphi(x)$ werde als eine für alle reellen Werte von x eindeutig definierte, endliche Funktion angenommen.

Es würde, wie bemerkt sei, genügen, statt n lediglich drei Argumente in Betracht zu ziehen.

Die Funktionalbedingung (3) wird von Gauß unter der stillschweigenden Annahme gelöst, daß die Funktion $\varphi(x)$ *stetig und überdies zweimal differenzierbar sei.*

So bereitwillig man für die Naturgesetze den analytischen Charakter derselben zuzugestehen geneigt ist, so wird man zugeben, daß dies in keinem Falle für die Gesetze des Zufalls angängig ist. Hier wird man wünschen, ausschließlich mit denjenigen Annahmen auszukommen, welche sich aus der Natur der Wahrscheinlichkeitsgrößen ergeben.

Die Prüfung des Sachverhalts ergibt nun, daß dies in der Tat möglich ist.

Die Untersuchung der Funktionalbedingung (3) lehrt zwar, daß auch hier neben der stetigen Lösung durch die *quadratische* Funktion unstetige Lösungen existieren können. Indessen genügt auch hier schon die Darbouxsche Bedingung, um die unstetigen Lösungen auszuschließen.

In einer Note: *Über eine Funktionalgleichung und eine erweiterte Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes* (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Kl., Leipzig, LVIII, 1906, 23. Juli) habe ich dieses Resultat bewiesen. Die dort gegebene Darstellung bedarf der Berichtigung, indem die Darbouxsche Bedingung, von welcher der Beweis Gebrauch macht, den Voraussetzungen ausdrücklich hinzugefügt werden muß, was dort nicht geschehen ist.

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nun aber, ähnlich wie es beim Fundamentalsatz der projektiven Geometrie liegt, eine andere Zusatzbedingung von vornherein gegeben, aus der gleichfalls der vollständige Beweis sich ergibt. Es ist die Forderung der *Integrierbarkeit* der Fehlerfunktion $\overline{\varphi}(x) = e^{-\varphi(x)}$.

In der Tat bezieht sich ja die Frage der *geometrischen Wahrscheinlichkeit* auf das Vorkommen eines Fehlers in einem bestimmten *Intervall*, und es wird dieselbe durch das über dies Intervall erstreckte Integral

definiert. Und es gehört dann weiter zur vollständigen Bestimmung der Fehlerfunktion noch die Annahme, *daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten gleich Eins sei.* Ich erinnere daran, daß auch der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit zu den bei der Ableitung des Fehlergesetzes benutzten Postulaten gehört.

Zu diesen allgemeinen Wahrscheinlichkeitspostulaten kommt dann nur noch ausschließlich die Hypothese des *arithmetischen Mittels* hinzu, um die Form des Fehlergesetzes zu begründen. Wir formulieren das hier festgestellte abschließende Ergebnis folgendermaßen:

(A) *Gemäß den Postulaten der geometrischen Wahrscheinlichkeit ist die Fehlerfunktion eine integrierbare Funktion derart, daß*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

ist.

Setzen wir weiter

(B) *die Hypothese des arithmetischen Mittels*

voraus, so ist die Form des Fehlergesetzes vollständig bestimmt.

Da sich die Funktionalbedingung (3) in jeder Hinsicht als die nächsthöhere Stufe der Betrachtung im Verhältnis zur Funktionalgleichung (1) erweist, so war noch weiter zu untersuchen, welche Rolle hier die Zusatzbedingung spielt, insbesondere ob unter Weglassung derselben unstetige Lösungen existieren.

Dies ist in der Tat der Fall, aber die Funktionswerte füllen hier nicht die ganze Ebene aus, sondern sie erfüllen denjenigen Teil der positiven Halbebene, der oberhalb einer *stetigen* Lösung der Funktionalbedingung (3) liegt, überalldicht. Es genügt hier also schon als Zusatzbedingung die geringere Forderung, daß irgend ein Wert an irgend einer Stelle, der größer als die untere Grenze der Funktion in der Umgebung dieser Stelle ist, nicht beliebig angenähert werden könne.

Dieses Resultat wird begründet, nachdem vorher im zweiten Teile eine Verallgemeinerung auf n Variable vorgenommen worden ist. Dieselbe wird an sich durch die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls gefordert.

Die Funktionalbedingung für mehrere Variable besitzt als einzige Lösung eine *definite quadratische Form*, wenn noch eine entsprechende Zusatzbedingung als erfüllt angenommen wird.

Es scheint mir diese Einführung der definiten quadratischen Form durch ein Funktionaltheorem infolge ihrer Allgemeinheit besonderes Interesse zu beanspruchen, und ich möchte dasselbe schlechthin als das *Funk-*

tionaltheorem der definiten quadratischen Formen bezeichnen. Es bildet das wesentlichste Ergebnis der Untersuchung.

Die Allgemeinheit der durch dasselbe ausgedrückten Minimaleigenschaft läßt sich an dem Umstand ermessen, daß die Funktionen, welche hier zum Vergleich mit der Minimalfunktion herangezogen werden, eine Menge von der Mächtigkeit 2^c bilden, während man es in der Variationsrechnung stets mit einer Menge von Vergleichsfunktionen der Mächtigkeit c zu tun hat.

2.

Beweis des Fehlergesetzes unter der Annahme, daß die Funktion $\varphi(x)$ unterhalb einer endlichen Grenze g liegt.

Es sei $\varphi(x)$ eine eindeutige Funktion der reellen Veränderlichen x, welche für *alle* x die Bedingung

$$\varphi(x) < g \tag{5}$$

erfülle, wo g ein irgendwie beschaffener endlicher Wert sei. Es sei ferner ε eine von Null verschiedene beliebige Größe. Es gilt dann das folgende Theorem:

Theorem I. *Die Funktionalbeziehung*

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_n) < \varphi(x_1+\varepsilon)+\varphi(x_2+\varepsilon)+\cdots+\varphi(x_n+\varepsilon), \tag{6}$$

die unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \tag{7}$$

für alle definierten Werte der Argumentgrößen erfüllt sein soll, besitzt als einzige Lösung die Funktion

$$\varphi(x) = h^2x^2 + \varphi(0), \tag{8}$$

wenn die Existenz der oberen Grenze g vorausgesetzt wird.

Es würde genügen, $n = 3$ anzunehmen, und es dürfte auch möglich sein, die Variabilität von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und ε noch weiter einzuschränken, als es hier für unseren Zusammenhang geboten ist.

Wir bedürfen für den Beweis folgender Definitionen und Sätze.

Unter einer *konvexen Funktion des Intervalles* (gh) verstehen wir eine eindeutige Funktion $f(x)$, welche für irgend zwei Werte x und y des Intervalles die Bedingung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{9}$$

erfüllt. Wir wollen das Intervall (gh) unter Einschluß seiner Endpunkte g und h mit Osgood als *abgeschlossenes* Intervall bezeichnen und uns auf ein Intervall dieser Art durchweg beziehen, ohne stets die vollständige Bezeichnung zu gebrauchen. Umgekehrt gebrauchen wir die Ausdrücke

rechts offenes, links offenes und schlechthin *offenes* Intervall, um in leicht verständlicher Weise die anderen Fälle zu bezeichnen.

Es besteht zunächst der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *Eine konvexe Funktion $f(x)$ des Intervalles (gh) ist stetig und besitzt an jeder Stelle des Intervalles einen endlichen vorderen und hinteren Differentialquotienten $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ derart, daß*

$$f'_-(x) \leqq f'_+(x)$$

ist, sobald $f(x)$ in dem Intervall eine obere Grenze g besitzt.

Dieser Satz ist von J. L. W. V. Jensen*) aufgestellt und bewiesen worden. Wir geben den Beweis des Satzes, der für das Folgende grundlegend ist, ausführlich wieder.

Aus (9) folgt für irgend welche Argumente x_1, x_2, x_3, x_4 des Intervalles

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \leqq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{4} f(x_1) + \frac{1}{4} f(x_2) + \frac{1}{4} f(x_3) + \frac{1}{4} f(x_4)$$

und allgemein, mittels Schlusses von $m-1$ auf m,

$$2^m f\left(2^{-m} \sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{2^m} f(x_\nu).$$

Wir setzen, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, $2^m > n$ und wählen

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

so daß wir die Beziehung

$$2^m f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) + (2^m - n) f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\right)$$

erhalten. Dieselbe geht über in die *verallgemeinerte* Relation

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu). \tag{10}$$

Dieser Übergang von der mit Potenzen von 2 behafteten Beziehung zu einer allgemeineren findet sich in einem entsprechenden Gedankengang in dem angeführten Beweis des Archimedes.

Wir betrachten jetzt zwei Größen x und $x + n\delta$ des Intervalles und verstehen unter m eine natürliche Zahl, die kleiner als n ist. Wählen wir nun

---

*) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes. Acta Math. 30, p. 175—201.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = x + n\delta;\ x_{m+1} = \cdots = x_n = x,$$

so haben wir

$$f(x+m\delta) \leqq \frac{m}{n} f(x+n\delta) + \frac{n-m}{n} f(x)$$

oder

$$\frac{f(x+m\delta) - f(x)}{m} \leqq \frac{f(x+n\delta) - f(x)}{n}.$$

Hieraus folgt, indem $-\delta$ statt δ gewählt wird,

$$\frac{f(x-m\delta) - f(x)}{m} \leqq \frac{f(x-n\delta) - f(x)}{n},$$

falls auch $x - n\delta$ im Intervall gelegen ist.

Bedenken wir, daß infolge der Definition (19)

$$f(x) - f(x-m\delta) \leqq f(x+m\delta) - f(x)$$

ist, so können wir die fortlaufende Beziehung schreiben:

$$(11)\quad \frac{f(x) - f(x-n\delta)}{n} \leqq \frac{f(x) - f(x-m\delta)}{m} \leqq \frac{f(x+m\delta) - f(x)}{m} \leqq \frac{f(x+n\delta) - f(x)}{n},$$

wo also

$$m < n$$

angenommen ist.

Aus (11) schließen wir jetzt, daß $f(x)$ stetig ist, wenn im ganzen Intervall $f(x) < g$ bleibt. Wir setzen hierzu $m = 1$ und ersetzen $f(x-n\delta)$ und $f(x+n\delta)$ durch g. Es folgt

$$\frac{f(x) - g}{n} \leqq f(x) - f(x-\delta) \leqq f(x+\delta) - f(x) \leqq \frac{g - f(x)}{n}.$$

Diese Formel gilt, sobald $x \pm n\delta$ im gegebenen Intervall liegt. Lassen wir jetzt δ gegen Null sinken und n gegen Unendlich so wachsen, daß diese Bedingung erfüllt bleibt, so folgt offenbar, daß

$$\lim_{\delta = 0} [f(x+\delta) - f(x)] = 0$$

ist.

Um weitere Schlüsse zu ziehen, setzen wir $\frac{\delta}{n}$ statt δ in (11) ein, und nehmen δ *positiv*, es folgt dann, falls $x \pm n \cdot \frac{\delta}{n}$ im Intervall liegt,

$$(12)\quad \frac{f(x) - f(x-\delta)}{\delta} \leqq \frac{f(x) - f\left(x - \frac{m}{n}\delta\right)}{\frac{m}{n}\delta} \leqq \frac{f\left(x + \frac{m}{n}\delta\right) - f(x)}{\frac{m}{n}\delta} \leqq \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

Bedenkt man, daß $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch und daß $f(x)$ *stetig* ist, so folgt, daß $\frac{f(x) - f(x-\delta)}{\delta}$ bei abnehmendem δ ständig wächst, oder

konstant bleibt; andererseits bleibt der Quotient ständig unterhalb $\frac{f(x+\delta')-f(x)}{\delta'}$, wenn δ' irgend ein positiver Wert ist. Es existiert daher

$$\lim_{+\delta=0} \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} = f'_-(x)$$

und aus gleichen Gründen

$$\lim_{+\delta=0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = f'_+(x)$$

und es ist zugleich

$$f'_-(x) \leqq f'_+(x). \tag{13}$$

Wir beweisen ferner den

Hilfssatz 2. *Für eine stetige nichtlineare konvexe Funktion ist bei allen Vorzeichenkombinationen*

$$f'_+(x) < f'_\pm(y), \tag{14}$$

wenn

$$x < y$$

ist.

Zunächst bemerken wir, daß das Gleichheitszeichen in (9), sobald es sich um eine stetige Funktion handelt, *nur* für eine lineare Funktion gilt. Wir haben daher in allen Gleichungen, die keinen Grenzübergang enthalten, das Gleichheitszeichen zu streichen. Aus (12) folgt, indem wir $\frac{m}{n}$ gegen eine zwischen Null und Eins enthaltene Zahl α konvergieren lassen, zunächst

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqq \frac{f(x)-f(x-\alpha\delta)}{\alpha\delta}.$$

Wir bemerken aber, daß das Gleichheitszeichen fortfallen muß, indem wir $\frac{m}{\delta}\delta$ statt δ und $\frac{n}{m}\alpha$ statt α setzen und (12) noch einmal berücksichtigen. Hierbei nehmen wir $1 > \frac{m}{n} > \alpha$ an. Analog erhalten wir schließlich

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} < \frac{f(x)-f(x-\delta')}{\delta'} < \frac{f(x+\delta')-f(x)}{\delta'} < \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

oder allgemein

$$\frac{f(x)-f(x-\delta_1)}{\delta_1} < \frac{f(x+\delta_2)-f(x)}{\delta_2}$$

für irgend drei Werte $x-\delta_1 < x < x+\delta_2$ des Intervalles. Es ist daher, wenn $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ist,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$$

Infolgedessen ist, für die Werte

$$x < x + \delta < y - \delta < y,$$

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} < \frac{f(y) - f(y-\delta)}{\delta}.$$

Da nun für $0 < \delta' < \delta$

$$\frac{f(x+\delta') - f(x)}{\delta'} < \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

infolge (12) ist, und ebenso

$$\frac{f(y) - f(y-\delta)}{\delta} < \frac{f(y) - f(y-\delta')}{\delta'}$$

wird, so folgt für $\lim \delta' = 0$

$$f'_+(x) < f'_-(y),$$

und hieraus in Verbindung mit (13) die Beziehung (14).

Der geometrische Sinn der Sätze 1 und 2 ist aber der, daß die konvexe Kurve, falls sie im Intervall unterhalb einer Geraden verläuft, stetig ist, eine Tangente besitzt, und daß sich diese beim Fortschreiten auf der Kurve im Sinne des wachsenden x selbst in positivem Sinne dreht. Dabei kann sich die Drehung an einer gewissen Zahl von Ecken sprungweise vollziehen. Diese Ecken können, wie Jensen durch ein Beispiel zeigt, überalldicht liegen.*)

Wir zeigen des Ferneren, daß die Menge der Ecken abzählbar ist. Es gehört die höchstens zweiwertige Funktion $f'(x)$ zu den punktweise unstetigen. Wir formulieren den

Hilfssatz 3. *Eine konvexe Funktion $f(x)$ besitzt höchstens eine abzählbare Anzahl von Ecken, d. h. solchen Stellen, wo*

$$f'_-(x) < f'_+(x)$$

ist.

Wir bezeichnen $f'_+(x) - f'_-(x)$ mit δ_x. Wie klein wir auch die positive Größe ε wählen, es gibt nur eine *endliche* Zahl n von Stellen, an denen $\delta_x > \varepsilon$ im Intervall $(g'h')$ ist, wo g' und h' irgend ein Teilintervall von (gh) bestimmen. In der Tat ist ja $f'(x)$ eine ständig wachsende Funktion und also höchstens in g negativ und höchstens in h positiv unendlich, sonst aber durchweg endlich, so daß die Differenz

$$f'_+(h') - f'_-(g') = J$$

eine bestimmte positive Größe ist. Dann aber ist offenbar n durch die Bedingung

$$n\varepsilon < n\,\delta_x < J \quad \text{oder} \quad n < \frac{J}{\varepsilon}$$

endlich beschränkt.

*) In einer Note, die im Archiv d. Math. u. Physik erscheinen wird, werde ich ein allgemeines Verfahren angeben, solche Kurven zu bilden.

In Ausdehnung auf das ganze Intervall (gh) sehen wir daher, daß die Anzahl der Stellen, an denen $\delta_x > \varepsilon$ ist, höchstens abzählbar unendlich ist.

Bedeuten jetzt

$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n, \cdots$$

eine unendliche Reihe positiver, gegen Null abnehmender Größen, so ist, wenn $\varepsilon = \delta_n$ genommen wird, die Menge S_n der Stellen $\delta_x > \varepsilon$ abzählbar, also ist die Menge S aller Sprungstellen, welche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Mengen ist, ebenfalls abzählbar. Die Grenzen g und h können auch $-\infty$ und $+\infty$ sein.

Nach diesen Vorbereitungen treten wir in den Beweis des Theorems I ein. Um zu einer *konvexen* Funktion zu gelangen, bemerken wir, daß die Ungleichheitsbedingung (6)

$$(6) \quad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1+\varepsilon) + \varphi(x_2+\varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n+\varepsilon)$$

und die Nebenbedingung (7)

$$(7) \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

ebenfalls für die *gerade* Funktion

$$(15) \qquad \psi(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$$

erfüllt sind, so daß also für diese

$$(16) \quad \psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_n) < \psi(x_1+\varepsilon) + \psi(x_2+\varepsilon) + \cdots + \psi(x_n+\varepsilon)$$

ist. Wir setzen $n = 2$ und $x_1 = -x_2$ und haben infolge von $\psi(x) = \psi(-x)$

$$(17) \qquad 2\psi(x_1) < \psi(x_1+\varepsilon) + \psi(x_1-\varepsilon).$$

Setzen wir jetzt

$$x_1 = \frac{x+y}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{x-y}{2} \quad (>0)$$

so folgt

$$(18) \qquad 2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \psi(x) + \psi(y)$$

für

$$x \neq y.$$

Ferner folgt aus

$$\varphi(x) < g \quad \text{und} \quad \varphi(-x) < g$$

$$(19) \qquad \psi(x) < 2g.$$

Es ist daher $\psi(x)$ infolge (18) und (19) eine konvexe Funktion, welche für alle reellen x existiert und unterhalb einer festen Grenze liegt. Wir folgern daher aus Hilfssatz 1, daß $\psi(x)$ stetig ist und daß $\psi(x)$ eine ständig wachsende Ableitung $\psi'(x)$ hat, welche an höchstens einer abzählbaren Menge S von Stellen einen Sprung besitzt. Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Hilfssatz 4. *Es gibt eine Stelle a, welche mitsamt allen rationalen Vielfachen $\pm r \cdot a$ nicht Sprungstelle von $\psi'(x)$ ist.*

Wir wollen, um Ausnahmen zu vermeiden, a und r verschieden von Null annehmen.

In der Tat ist die Menge $\overline{S}$ aller rationalen Vielfachen der hypothetischen Sprungstellen ebenfalls abzählbar. *Es gibt daher nach dem Theorem von G. Cantor, welches besagt, daß das Kontinuum nicht abzählbar ist, wenigstens eine Stelle $a(\neq 0)$, welche nicht zu $\overline{S}$ gehört.* Das gleiche gilt dann offenbar auch für $\pm ra (r \neq 0)$.

Sind jetzt $x_1, x_2, \cdots, x_n$ solche Stellen, an denen die Funktion $\psi(x)$ einen *einzigen* Differentialquotienten besitzt, so besitzt die Funktion

$$\Psi(\varepsilon) = \psi(x_1+\varepsilon) + \psi(x_2+\varepsilon) + \cdots + \psi(x_n+\varepsilon) \tag{20}$$

als Funktion von ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ den einzigen Differentialquotienten

$$[\Psi'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = \psi'(x_1) + \psi'(x_2) + \cdots + \psi'(x_n). \tag{21}$$

Besitzt aber eine eindeutige stetige Funktion an einer Stelle ein Minimum und ist ein einziger Differentialquotient der rechts und links differenzierbaren Funktion vorhanden, so muß derselbe verschwinden. Infolgedessen ist, wenn die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

für die genannten Stellen gilt, auch

$$0 = \psi'(x_1) + \psi'(x_2) + \cdots + \psi'(x_n). \tag{22}$$

Zufolge Hilfssatz 4 erhalten wir aber für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = a, \quad x_n = -(n-1)a, \tag{23}$$

indem wir statt $n-1$ wieder n schreiben, für jedes positive ganze n

$$n\psi'(a) + \psi'(-na) = 0. \tag{24}$$

Offenbar gilt (24) ebenso für alle von Null verschiedenen rationalen Vielfachen von a. Setzen wir $n = 1$, so erhalten wir

$$\psi'(a) = -\psi'(-a)$$

und es geht daher (24) in die für alle ganzzahligen n geltende Formel

$$n\psi'(a) = \psi'(na) \quad \text{oder} \quad \psi'(a) = \frac{1}{n}\psi'(na)$$

über.

Ersetzen wir a durch $\frac{m}{n}a$, so folgt (für m und n verschieden von Null)

$$\psi'\left(\frac{m}{n}a\right) = \frac{1}{n}\psi'(ma) = \frac{m}{n}\psi'(a)$$

oder

$$\psi'(ra) = r\psi'(a), \tag{25}$$

wenn $r \neq 0$ irgend eine rationale Zahl ist.

Wir wissen jetzt andrerseits, daß gemäß Hilfssatz 3 $\psi'(x)$ eine *ständig wachsende* Funktion ist.

Infolgedessen ist für irgend ein irrationales x oder $x=0$, das zwischen den rationalen Zahlen r_1 und r_2 liegt,

$$\psi(r_1 a) < \psi(xa) < \psi(r_2 a)$$

oder

$$r_1 \psi(a) < \psi(xa) < r_2 \psi(a).$$

Es ist daher $\psi(xa)$ mit dem *Schnitt* $x\psi(a)$ der Wertmengen $(r_1\psi(a))$ und $(r_2\psi(a))$ identisch und wir haben für *alle* reellen x

$$\psi'(xa) = x\psi'(a)$$

oder

$$\psi'(x) = x\psi'(1). \tag{26}$$

Außerdem ist, da die Funktion beständig wächst, $\psi'(1)$ positiv. Wir setzen

$$\psi'(x) = 4h^2 x$$

und haben also

$$\psi(x) = 2h^2x^2 + \psi^*(x),$$

wo $\psi^*(x)$ eine Funktion ist, deren Differentialquotient verschwindet. Da $\psi^*(x)$ stetig ist und die Ableitung Null besitzt, so ist $\psi^*(x)$ eine Konstante, und wir setzen also

$$\psi(x) = 2h^2x^2 + \psi(0). \tag{27}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, setzen wir zunächst $h=1$, $\psi(0)=0$ und haben

$$\psi(x) = 2x^2. \tag{28}$$

Um jetzt zu zeigen, daß $\varphi(x) = x^2$ ist, beweisen wir den Satz:

Hilfssatz 5. *Es ist $\varphi(x)$ stetig und $2\varphi'(x) = \psi'(x)$.*

Beweis. Aus

$$\varphi(x) + \varphi(-x) < \varphi(x+\varepsilon) + \varphi(-x+\varepsilon)$$

folgt durch Addition und Subtraktion von $\varphi(x-\varepsilon)$ auf der rechten Seite

$$\psi(x) < \psi(x-\varepsilon) + \varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon).$$

Indem wir das Vorzeichen von ε vertauschen, erhalten wir

$$\psi(x) < \psi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon)$$

oder

$$\psi(x) - \psi(x-\varepsilon) < \varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon) < \psi(x+\varepsilon) - \psi(x). \tag{29}$$

Hieraus folgt sofort, daß $\varphi(x)$ *stetig* ist. Um die Ableitung herzustellen, dividieren wir durch ε und erhalten

$$\frac{\psi(x) - \psi(x-\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}.$$

Hieraus folgt, indem wir $x + \varepsilon$ oder $x - \varepsilon$ gleich y setzen und berücksichtigen, daß $\pm 2\varepsilon = \eta$ der Zuwachs von y wird,

$$\psi'(y) = 2\varphi'_{\pm}(y). \tag{30}$$

Also ist in der Tat mit Rücksicht auf $\psi'(y) = 2y$

$$\varphi(y) = y^2.$$

Haben wir allgemeiner

$$\psi(x) = 2h^2x^2 + \psi(0),$$

so folgt

$$\varphi(x) = h^2x^2 + \varphi(0) \qquad \text{q. e. d.} \tag{31}$$

3.

Ein Hilfssatz über konvexe Funktionen.

Die Bedingung, daß $\varphi(x)$ unter einer endlichen Grenze liegt, besitzt vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus keine natürliche Motivierung. Wir haben, wie auseinandergesetzt, dort als natürliche Bedingung die gewonnen, daß $e^{-\varphi(x)}$ *integrierbar* ist. Ich lasse dahingestellt, durch welchen Zusatz man von der ersten Bedingung zur zweiten übergehen kann. Als natürlicher Weg zur Erledigung der Frage ergibt sich hier der, die Analogie zu den im Falle der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (f(x) \text{ integrierbar})$$

auftretenden Verhältnissen aufzusuchen. In dem einfacheren Falle würde man sich an die für alle rationalen Vielfachen rx von x bestimmte *Teillösung* $rf(x) = f(rx)$ halten. Die Lösung ist *gleichmäßig* stetig und infolgedessen definiert sie eine stetige lineare Funktion, deren Integral mit dem Integral von $f(x)$ übereinstimmt. Hieraus schließt man dann leicht, daß $f(x)$ selbst linear ist. Genau so werden wir zeigen, daß stets für eine gewisse abzählbare überalldichte Argumentmenge eine *Teillösung* existiert, welche in dieser Menge *gleichmäßig* stetig ist, und also eine stetige Funktion definiert, deren Integral mit dem Integral der Funktion verglichen wird. Es ergibt sich dann leicht der Schluß auf die Form der Fehlerfunktion.

Die Existenz der Teillösung zeigen wir mittels eines Hilfssatzes über konvexe Funktionen, der zunächst unter der Voraussetzung, daß die Funktion *oberhalb* einer festen Grenze liegt, bewiesen wird.

Wir transformieren ein beliebiges Intervall $(a\,b)$ auf das Intervall $(0\,1)$, indem wir $f(a+x(b-a))$ statt $f(x)$ betrachten. Wir setzen

$$g = \text{Max.}\,(f(0),\, f(1)). \tag{32}$$

Bedeutet dann $r = \frac{m}{n}$ eine rationale Zahl zwischen Null und Eins, so gilt der Satz:

Hilfssatz 6a. *Es ist, wenn $f(x)$ eine konvexe Funktion ist,*

$$f(r) \leqq g \qquad \left(r = \frac{m}{n},\ 0 \leqq m \leqq n\right). \tag{33}$$

Beweis. Aus der Formel (10)

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$$

folgt, wenn wir

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-m} = 0, \quad x_{n-m+1} = \cdots = x_n = 1$$

setzen,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \cdot ng \leqq g,$$

wenn wir mit g das Maximum von $f(0)$ und $f(1)$ bezeichnen.

Es besteht nun der folgende

Hilfssatz 6b. *Es sei $f(x)$ eine positive konvexe Funktion des Intervalles (0 1), so ist $f(r)$ für alle rationalen r des Teilintervalles $(\eta \leqq r \leqq 1-\eta)$ eine gleichmäßig stetige Funktion und zwar bei noch so kleinem positivem η, d. h. es läßt sich bei vorgegebenem ε eine rationale Größe $\delta > 0$ durch die Bedingung $\left[\frac{g}{\varepsilon} + 1\right]\delta < \eta$ so bestimmen, daß*

$$|f(r+\delta) - f(r)| < \varepsilon \tag{34}$$

für jedes r des Teilintervalles ist.

Beweis. Wir bezeichnen die ganze Zahl $\left[\frac{g}{\varepsilon} + 1\right]$ mit n und haben also, da g *positiv* ist,

$$\left[\frac{g}{\varepsilon} + 1\right] = n, \qquad n > \frac{g}{\varepsilon}, \tag{35}$$

und andrerseits, infolge

$$\left[\frac{g}{\varepsilon} + 1\right]\delta < \eta, \tag{36}$$

$$n\delta < \eta. \tag{37}$$

Infolgedessen ist sowohl $r - n\delta$ (da $\eta < r$ ist) größer als Null, als auch $r + n\delta$ kleiner als 1. Wir können daher die Formel (11), in der wir $m = 1$ setzen, zur Anwendung bringen und erhalten

$$\frac{f(r) - f(r-n\delta)}{n} \leqq f(r+\delta) - f(r) \leqq \frac{f(r+n\delta) - f(r)}{n}. \tag{38}$$

Sämtliche Argumente liegen zwischen Null und Eins; da also gemäß dem Hilfssatz 6a für jedes r' zwischen Null und Eins

$$0 \leqq f(r) \leqq g$$

ist, so folgt aus (38)

$$-\frac{g}{n} \leqq f(r+\delta) - f(r) \leqq +\frac{g}{n}, \tag{39}$$

also, da infolge von (35) $\frac{g}{n} < \varepsilon$ ist

$$-\varepsilon \leqq f(r+\delta) - f(r) \leqq +\varepsilon \tag{40}$$

für jedes r und δ, die den Bedingungen

$$\eta \leqq r \leqq 1-\eta, \quad \left[\frac{g}{n}+1\right]\delta < \eta \tag{41}$$

genügen, womit der Satz bewiesen ist.

Zu einer solchen gleichmäßig stetigen Funktion einer überalldichten Punktmenge gehört eine für *alle* Werte $\eta \leqq x \leqq 1-\eta$ *stetige* Funktion hinzu. Dieselbe kann, da η beliebig klein ist, auf das ganze Intervall ausgedehnt werden. Wir formulieren den

Satz 7. *Es gibt zu einer positiven konvexen Funktion eine zugehörige stetige Funktion, welche mit derselben in den Endpunkten a und b eines Intervalls, sowie in sämtlichen rationalen Teilpunkten desselben übereinstimmt. Diese stetige Funktion ist konvex und durch die auferlegte Bedingung eindeutig bestimmt.*

Hierbei verstehen wir unter den rationalen Teilpunkten des Intervalls diejenigen, welche das Intervall in rationalem Verhältnis teilen. Es ist ohne weiteres klar, daß die Teillösung, sowie die zugehörige stetige Funktion auch in die äußeren rationalen Teilpunkte fortgesetzt werden kann. Denn, wenn wir a und b als äußere Teilpunkte so annehmen, daß das ursprüngliche Intervall jetzt eingeschlossen wird, so wird die zugehörige Teillösung die frühere Teillösung infolge der Eindeutigkeit der Bestimmung derselben enthalten. Jede Teillösung läßt sich für das ganze Definitionsintervall der konvexen Funktion aufstellen und kann nur an den Grenzen desselben unendlich werden.

Zusatz. Um jetzt die Einschränkung zu beseitigen, welche in der Annahme liegt, daß $f(x)$ positiv sein soll, teilen wir das Intervall (0 1) in n gleiche Teile von der Länge $\delta = \frac{1}{n}$. Setzen wir

$$\Delta_m = f(m\delta) - f((m-1)\delta),$$

so ist infolge der Definitionsgleichung

$$\Delta_1 \leqq \Delta_2 \leqq \cdots \leqq \Delta_m \leqq \cdots \leqq \Delta_n. \tag{42}$$

Es ist also

$$m\Delta_1 \leqq \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m$$

oder, infolge von

$$f(m\delta) = f(0) + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m,$$

$$f(0) + \frac{m}{n}\,\frac{f(\delta)-f(0)}{\delta} \leqq f\left(\frac{m}{n}\right). \tag{43}$$

In der Reihe (42) kann nur an einer Stelle ein Übergang von negativen zu positiven Werten erfolgen. Indem wir n gegen Unendlich wachsen lassen, erhalten wir höchstens *einen* Schnitt x im Intervall Null bis Eins derart, daß $f(r)$ für alle $0 \leqq r < x$ ständig abnimmt, und für alle $x < r \leqq 1$ ständig zunimmt. Wenn es keinen Schnitt x gibt, so muß $f(0)$ oder $f(1)$ der kleinste Wert von $f(r)$ sein, so daß wir für $f(r)$ die gesuchte untere Grenze bereits haben. Existiert aber der Schnitt, so sei $\frac{m'}{n'}$ irgend ein Wert kleiner als x. Dann ist im Intervall 0 bis $\frac{m'}{n'}$ stets $f(r)$ größer als $f\left(\frac{m'}{n'}\right)$. Es existiert daher in diesem Intervall eine Teillösung, deren zugehörige stetige Lösung einen ständig wachsenden rechten Differentialquotienten besitzt. Derselbe besitzt also in einem rationalen Punkte p zwischen 0 und $\frac{m'}{n'}$ einen negativen endlichen Wert k. Wir denken uns, um die Teillösung fortzusetzen, p als Endpunkt des Intervalles (p 1), wollen aber, um die Schreibweise zu vereinfachen, wieder $p = 0$ setzen, und also annehmen, es existiere die Teillösung in einem in Null beginnenden Intervall, und es habe dort die zugehörige stetige Lösung einen rechten Differentialquotienten $f'_+(0) = k$. Es ist dann

$$k \leqq \frac{f(\delta) - f(0)}{\delta}. \tag{44}$$

Aus (43) und (44) folgt

$$f(0) + \frac{m}{n} k \leqq f\left(\frac{m}{n}\right). \tag{45}$$

Da die linke Seite für $0 \leqq \frac{m}{n} \leqq 1$ offenbar eine untere Grenze besitzt, so ist also festgestellt, daß auch $f\left(\frac{m}{n}\right)$ stets oberhalb einer endlichen Grenze h liegt. Die Funktion $f(r) - h$ ist also eine positive konvexe Funktion. Wir erhalten daher den

Satz 7b. *Irgend zwei Punkte einer konvexen Funktion bestimmen eindeutig eine Teillösung, deren Punkte überalldicht auf einer stetigen konvexen Kurve liegen.*

4.

Beweis des Gaußschen Fehlergesetzes.

Wir beweisen jetzt das Gaußsche Fehlergesetz unter den Annahmen:

(A) *Das arithmetische Mittel ist der wahrscheinlichste Wert.*

(B) *Die Summe der Fehlerwahrscheinlichkeiten ist* 1.

Aus (B) entnehmen wir, daß $e^{-\varphi(x)}$ integrierbar ist, so daß

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x)} dx$$

wird.

Es seien jetzt u und v irgend zwei Argumentwerte. Die Ungleichheitsbedingung (3) gibt für $x_1 = 0$ und jedes ε

$$\psi(\varepsilon) > \psi(0).$$

Es ist also $\psi(x)$ eine *positive* konvexe Funktion. Es folgt daher nach Hilfssatz 6a und 6b, daß es eine stetige konvexe Funktion $\psi_{u,v}(x)$ gibt, die an den Stellen u und v gleich $\psi(x)$ wird und für eine überalldichte Argumentmenge mit $\psi(x)$ übereinstimmt.

Andrerseits ergibt die für jedes x und ε gültige Relation

$$\psi(x) - \psi(x-\varepsilon) < \varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon) < \psi(x+\varepsilon) - \psi(x)$$

für ein der Menge der rationalen Teilpunkte des Intervalles (uv) angehöriges x und ε

$$\psi_{u,v}(x) - \psi_{u,v}(x-\varepsilon) < \varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon) < \psi_{u,v}(x+\varepsilon) - \psi_{u,v}(x).$$

In jedem Intervall, in dem $\psi_{u,v}(x)$ *gleichmäßig* stetig ist, ist daher auch $\varphi(x)$ für die entsprechende Wertmenge *gleichmäßig* stetig. Also existiert eine stetige Funktion, welche in u und v mit $\varphi(x)$ übereinstimmt und so bestimmt ist, daß sie in allen rationalen Teilpunkten der Strecke (uv) mit $\varphi(x)$ gleichen Wert hat. Wir bezeichnen dieselbe mit $\varphi_{u,v}(x)$. Die *stetige* Funktion $\varphi_{u,v}(x)$ genügt aber den Bedingungen (3) und (4). Also ist sie von der Form

$$\varphi_{u,v}(x) = h_{u,v}^2 x^2 + \varphi_{u,v}(0) \tag{46}$$

oder

$$\varphi_{u,v}(x) = \frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u^2 - v^2}\, x^2 + \frac{u^2\varphi(v) - v^2\varphi(u)}{u^2 - v^2}. \tag{47}$$

Wir formuliereu den folgenden Satz:

Satz 8. *Die Teillösungen der Funktionalbedingung* (3) *des Gaußschen Fehlergesetzes liegen auf Parabeln der Form* $y = h^2x^2 + y(0)$.

Es seien jetzt u und v irgend zwei von Null verschiedene Werte, wir bezeichnen mit $\varphi_{0,u}(x)$, kürzer $\varphi_u(x)$, und $\varphi_{0,v}(x)$, kürzer $\varphi_v(x)$, die zu den Teillösungen der Strecken $(0u)$ und $(0v)$ zugehörigen stetigen Funktionen. Es ist also

$$\begin{aligned} \varphi_u(u) &= \varphi(u), \qquad \varphi_u(0) = \varphi(0), \\ \varphi_v(v) &= \varphi(v), \qquad \varphi_v(0) = \varphi(0). \end{aligned} \tag{48}$$

Da $\varphi_u(x)$ und $\varphi_v(x)$ mit $\varphi(x)$ an einer *überalldichten* Menge von Stellen übereinstimmen, so gilt das gleiche für $e^{-\varphi_u(x)}$, $e^{-\varphi_v(x)}$ und $e^{-\varphi(x)}$; infolgedessen ist

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_u(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_v(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x)}\, dx. \tag{49}$$

Ist daher

$$\varphi_u(x) = h_u^2 x^2 + \varphi(0), \tag{50}$$
$$\varphi_v(x) = h_v^2 x^2 + \varphi(0),$$

so folgt aus (49)

$$h_u^2 = h_v^2,$$

für jedes u und v. Wir bezeichnen diese Größe mit h^2.

[Denn es ist bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|h|}$$

und also

$$\frac{\sqrt{\pi}}{|h_u|} = \frac{\sqrt{\pi}}{|h_v|}.]$$

Da nun andrerseits für jedes u identisch

$$\varphi(u) = \varphi_u(u)$$

ist, so folgt für jedes u

$$\varphi(u) = h^2 u^2 + \varphi(0).$$

Die Konstante $e^{-\varphi(0)}$ wird dann aus (49) als $\frac{|h|}{\sqrt{\pi}}$ gefunden, so daß wir definitiv für das Fehlergesetz die Form

$$e^{-\varphi(x)} = e^{-h^2 x^2} \frac{|h|}{\sqrt{\pi}} \tag{51}$$

erhalten. Es besteht also das

Theorem II. *Aus den Annahmen*

(A) $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1+\varepsilon) + \varphi(x_2+\varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n+\varepsilon)$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x)}\, dx = 1 \tag{B}$$

folgt

$$e^{-\varphi(x)} = e^{-h^2 x^2} \frac{|h|}{\sqrt{\pi}}.$$

5.

Existenzbeweis der unstetigen Lösungen.

Die Bedeutung der Zusatzbedingungen, die wir hinsichtlich der Funktion $\varphi(x)$ gemacht haben, erhellt aus dem Umstande, daß sich in analoger Weise, wie für die Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, unstetige Lösungen der Funktionalbedingung (3) konstruieren lassen.

Hierbei bedienen wir uns des von G. Hamel eingeführten Hilfsmittels einer *Basis aller Zahlen*. Es sei $a, b, c, \cdots$ eine Menge reeller Zahlen derart, daß sich jede reelle Zahl x auf eine und nur auf eine Weise in der Form

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots \tag{52}$$

darstellen läßt, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ rational sind, aber in jedem Fall nur eine *endliche* Anzahl derselben von Null verschieden ist. Wir nennen $a, b, c, \cdots$ eine Basis aller reellen Zahlen. Ist $x = 0$, so sind also alle $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ gleich Null.

Die Existenz dieser Teilmenge des Kontinuums ist unter der Voraussetzung der Möglichkeit einer *Wohlordnung des Kontinuums* von G. Hamel erbracht worden. Wir diskutieren diese Frage hier nicht näher.

Es seien jetzt

$$f(a) > 0,\ f(b) > 0,\ f(c) > 0, \cdots \tag{53}$$

irgend welche positive endliche Werte, die größer als Null sind.

Die Funktion

$$f(x) = \alpha^2 f(a) + \beta^2 f(b) + \gamma^2 f(c) + \cdots \tag{54}$$

besitzt die verlangte Eigenschaft. In der Tat es ist, wenn

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots, \\ x_2 &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_n a + \beta_n b + \gamma_n c + \cdots \end{aligned} \tag{55}$$

gesetzt wird, mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit dieser Darstellung infolge der Gleichung

$$0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{4}$$

notwendig

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n &= 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{56}$$

Es sei jetzt

$$\varepsilon = \mathsf{A}a + \mathsf{B}b + \Gamma c + \cdots. \tag{57}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} f(x+\varepsilon) &= (\alpha+\mathsf{A})^2 a + (\beta+\mathsf{B})^2 b + (\gamma+\Gamma)^2 + \cdots \\ &= f(x) + f(\varepsilon) + 2\mathsf{A}\alpha a + 2\mathsf{B}\beta b + 2\Gamma\gamma c + \cdots. \end{aligned}$$

Es folgt daher mit Rücksicht auf (56)

$$f(x_1+\varepsilon) + f(x_2+\varepsilon) + \cdots + f(x_n+\varepsilon) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + nf(\varepsilon).$$

Nun ist aber für ein von Null verschiedenes ε irgend eine der Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \cdots$ von Null verschieden, es ist also mit Rücksicht auf (53) $f(\varepsilon)$ größer als Null. Es ist daher für ein von Null verschiedenes ε

$$f(x_1+\varepsilon) + f(x_2+\varepsilon) + \cdots + f(x_n+\varepsilon) > f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n), \tag{58}$$

was zu beweisen war.

Wir wollen noch ein zweites Beispiel bilden, aus dessen Betrachtung hervorgeht, daß eine solche Lösung nicht notwendig die ganze positive Halbebene ausfüllt. Es liegen hier die Verhältnisse nicht so einfach, wie bei der linearen Funktionalgleichung. Eine erschöpfende Diskussion werden wir im zweiten Teile durchführen.

Wir setzen, indem wir irgend eine Basiszahl a herausgreifen,

$$x = \alpha a + y \tag{59}$$

und bilden

$$f(x) = a^2\alpha^2 + y^2. \tag{60}$$

Aus

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

folgt offenbar

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$$

und

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0.$$

Ferner wird, wenn

$$\varepsilon = \mathsf{A}a + \mathsf{E} \tag{61}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} f(x+\varepsilon) &= a^2(\alpha+\mathsf{A})^2 + (y+\varepsilon)^2 \\ &= f(x) + f(\varepsilon) + 2\mathsf{A}\alpha a^2 + 2\mathsf{E}y. \end{aligned}$$

Da nun für ein von Null verschiedenes ε

$$f(\varepsilon) > 0$$

ist, so ist wiederum (58) erfüllt. Andrerseits ist aber

$$\begin{aligned} f(x) = a^2\alpha^2 + y^2 &\geqq 2 \cdot \left(\frac{a\alpha + y}{2}\right)^2 \\ &\geqq \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{62}$$

Man erkennt übrigens aus dem Umstande, daß stets

$$a\alpha \neq y$$

ist, den Wegfall des Gleichheitszeichens.

Andrerseits kann man

$$y = b\beta + c\gamma + \cdots$$

und $a\alpha$ so nahe an $\frac{x}{2}$, als man will, annehmen. Infolgedessen wird der Wert der Funktion in der Umgebung einer beliebigen Stelle x so nahe,

als man will, an $\frac{x^2}{2}$ liegen. Die Funktion $y = \frac{x}{2}$ ist in der Umgebung jeder Stelle die untere Grenze unserer Funktion. Da wir an Stelle von a jede andere Basiszahl setzen können, so sehen wir dieselbe untere Grenze für eine unendliche Menge von solchen Funktionen eintreten. Wir werden zeigen, daß jede unstetige Lösung ähnliche Verhältnisse zeigt, und daß die Funktion jeden Wert oberhalb der unteren Grenze in der Umgebung jeder Stelle annimmt, so daß die Ebene oberhalb der Grenzkurve überalldicht ausgefüllt wird.

Teil II.

Das Fehlergesetz für n Variable.

6.

Das Funktionaltheorem der definiten quadratischen Formen.

Es besteht der folgende merkwürdige Satz:

Theorem III. *Es sei* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *eine Funktion der reellen, unbeschränkt veränderlichen Argumente* $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Es genüge* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *für ein System von Argumenten*

$$\begin{aligned} 0 &= x_1' + x_1'' + x_1''' + \cdots + x_1^{(k)}, \\ 0 &= x_2' + x_2'' + x_2''' + \cdots + x_2^{(k)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= x_n' + x_n'' + x_n''' + \cdots + x_n^{(k)} \end{aligned} \tag{63}$$

der Ungleichheitsrelation

$$\text{(A)}\quad (64)\quad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \varphi(x_1^{(\varkappa)}+\varepsilon_1, x_2^{(\varkappa)}+\varepsilon_2, \cdots, x_n^{(\varkappa)}+\varepsilon_n) > \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \varphi(x_1^{(\varkappa)}, \cdots, x_n^{(\varkappa)})$$

für jedes Wertsystem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, *für welches nicht gleichzeitig alle Größen verschwinden. Bleibt dann noch für alle Argumentwerte*

$$\text{(B)}\qquad \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

unterhalb einer Grenze g, *so ist* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(0, 0, \cdots, 0)$ *eine homogene positiv definite quadratische Form der n Veränderlichen* $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Die Bedingung (B) ist wiederum nicht entbehrlich, da wir dies bereits im Falle $n = 1$ gezeigt haben. Sie kann aber durch andere Bedingungen ersetzt werden, z. B. durch die Bedingung, daß $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *integrierbar* sein soll, oder daß die Funktion *stetig* sein soll. Wir wollen diese Bedingung als die *Zusatzbedingung* fernerhin bezeichnen.

Das Theorem III heiße das *Funktionaltheorem der definiten quadratischen Formen.*

Wir suchen wieder zu einer konvexen Funktion zu gelangen. Die Funktion

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n) \tag{65}$$

besitzt diese Eigenschaft. Zunächst liegt ψ unterhalb der Grenze $2g$. Setzen wir ferner

$$x_1' = -x_1'', \cdots, x_n' = -x_n'' \tag{66}$$

und

$$0 = x_1''' = \cdots = x_n''' = \cdots = x_1^{(k)} = \cdots = x_n^{(k)},$$

so erhalten wir, wie früher aus (64), indem wir die Akzente fortlassen, wenn nicht alle ε Null sind,

$$2\psi(x_1, \cdots, x_n) < \psi(x_1 + \varepsilon_1, \cdots, x_n + \varepsilon_n) + \psi(x_1 - \varepsilon_1, \cdots, x_n - \varepsilon_n). \tag{67}$$

Setzen wir jetzt wieder

$$x_1 + \varepsilon_1 = u, \qquad x_1 - \varepsilon_1 = v, \tag{68}$$

so folgt, wenn alle andern ε gleich Null genommen werden,

$$2\psi\left(\frac{u+v}{2}, x_2, \cdots, x_n\right) < \psi(u, x_2, \cdots, x_n) + \psi(v, x_2, \cdots, x_n), \tag{69}$$

sobald $u \neq v$ ist. Die Funktion $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ist daher, was auch $x_2, \cdots, x_n$ für spezielle Werte annehmen mögen, eine *konvexe* Funktion von x_1.

Da $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ überdies unterhalb $2g$ liegt, so ist die Funktion in x_1 *stetig* und besitzt an jeder Stelle, mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Menge S, einen ständig wachsenden partiellen Differentialquotienten $\psi_1(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(x_1, \cdots, x_n)$. Die Funktion $\psi_1(x_1, \cdots, x_n)$ besitzt an den Stellen S einen positiven Sprung. Wir bezeichnen mit $\overline{S}$ die Menge der rationalen Vielfachen dieser eventuellen Ausnahmestellen.

Diese Menge ist für ein spezielles Wertesystem $x_2, \cdots, x_n$ gebildet und genauer mit $\overline{S}(x_2, \cdots, x_n)$ zu bezeichnen. Gemäß der Gleichung (65) ist ψ eine gerade Funktion, und es ist $\frac{\partial}{\partial x_1}\psi(+x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$ mit $\frac{\partial}{\partial x_1}\psi(-x_1, x_2, \cdots, x_n)$ identisch und also $\overline{S}(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ mit $\overline{S}(-x_2, \cdots, -x_n)$ zusammenfallend. Diese Bemerkung ist für das Folgende wichtig.

Wir wenden jetzt wieder das Theorem von G. Cantor an, und schließen aus dem Umstande, daß das Kontinuum nicht abzählbar ist, daß es eine Stelle $x_1 = a$ geben muß, welche mitsamt ihren von Null verschiedenen rationalen Vielfachen keine Ausnahmestelle ist.

Ist jetzt

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \qquad (r_i \neq 0) \tag{70}$$

eine Gleichung zwischen vier rationalen, von Null verschiedenen Zahlen,

so besitzt mit Rücksicht darauf, daß jetzt $r_1 a$, $r_2 a$, $r_3 a$, $r_4 a$ nicht zu $\overline{S}(\pm x_2, \cdots, \pm x_n)$ gehören, die stetige Funktion

$$\Psi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon + r_1 a, x_2, \cdots, x_n) + \psi(\varepsilon + r_2 a, -x_2, \cdots, -x_n) + \psi(\varepsilon + r_3 a, x_2, \cdots, x_n) + \psi(\varepsilon + r_1 a, -x_2, \cdots, -x_n) \tag{71}$$

an der Stelle $\varepsilon = 0$ einen einzigen Differentialquotienten nach x_1 und also nach ε. Außerdem hat sie an derselben Stelle ein Minimum. Denn einerseits genügt $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ der Ungleichheit (64), andererseits ist infolge von (70) gerade die Nebenbedingung (63) erfüllt. Der eigentümliche Kunstgriff, welcher hier benutzt ist, um diese Nebenbedingung für alle Argumente *gleichzeitig* zu befriedigen, setzt voraus, daß (63) und (64) für $k = 4$ gelten, während wir uns früher mit $k = 3$ begnügen konnten. Es muß also $\frac{\partial \psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ verschwinden. Da nun

$$\Psi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon + r_1 a, x_2, \cdots, x_n) + \psi(-\varepsilon - r_2 a, x_2, \cdots, x_n) + \psi(\varepsilon + r_3 a, x_2, \cdots, x_n) + \psi(-\varepsilon - r_4 a, x_2, \cdots, x_n) \tag{72}$$

ist, so erhalten wir, indem wir $x_2, \cdots, x_n$ nicht mitschreiben,

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Psi(\varepsilon)\right]_{\varepsilon = 0} = \psi_1(r_1 a) - \psi_1(-r_2 a) + \psi_1(r_3 a) - \psi_1(-r_4 a). \tag{73}$$

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} r_1 &= s + d & r_2 &= -s \\ r_3 &= t & r_4 &= -t - d \end{aligned} \qquad (r_i \neq 0) \tag{74}$$

und erhalten, indem wir ax statt x_1 als Variable einführen,

$$\psi_1(s + d) - \psi_1(s) = \psi_1(t + d) - \psi_1(t). \tag{75}$$

Die Zahlen s, t, d sind nur dadurch beschränkt, daß s und t von Null sowohl als $-d$ verschieden sein müssen; wir schreiben dies in der Form:

$$s, t \neq \begin{matrix} 0 \\ -d \end{matrix}. \tag{76}$$

Von der Funktion $\psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ wissen wir überdies, daß sie, infolge des konvexen Charakters von $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ hinsichtlich x_1, *ständig wachsend* ist. Das gleiche gilt also von $\psi_1(x)$, wenn wir, was keine Einschränkung bedeutet, a als positiv gewählt denken. Wir beweisen den

Hilfssatz. *Eine ständig wachsende Funktion, welche den Bedingungen* (75) *und* (76) *genügt, ist eine lineare Funktion.*

Wir betrachten zuerst positive Argumente, dann negative Argumente und zeigen schließlich den stetigen Anschluß im Nullpunkt.

a) Es seien s, t und d positiv. Wir setzen s der Reihe nach gleich

$$t + d, \; t + 2d, \; \cdots, \; t + md,$$

dann wird, indem wir die entstehenden Gleichungen addieren, für alle ganzzahligen positiven m und für $m = 0$

$$\psi_1(t+md) - \psi_1(t) = m\,[\psi_1(t+d) - \psi_1(t)] \tag{77}$$

oder auch, indem wir d statt md setzen und n statt m schreiben,

$$\psi_1\left(t+\frac{d}{n}\right) - \psi_1(t) = \frac{1}{n}\,[\psi_1(t+d) - \psi_1(t)]. \tag{78}$$

Ersetzen wir in (77) d durch $\frac{d}{n}$, so erhalten wir für jede rationale positive Zahl $\frac{m}{n} = r \geqq 0$

$$\psi_1(t+rd) - \psi_1(t) = r\,[\psi_1(t+d) - \psi_1(t)]. \tag{79}$$

Die Funktion $\psi_1(x)$ ist eine ständig wachsende Funktion von x; infolgedessen ist auch $\psi_1(t+xd) - \psi_1(t)$ bei irgend welchen positiven, festgewählten t und d eine ständig wachsende Funktion von x. Dieselbe nimmt gemäß der Gleichung (79), falls r alle rationalen Werte von Null bis $+\infty$ durchläuft, eine lückenlose, *wachsende* Folge von Werten an, die mit Null beginnt und also positiv ansteigt und über jede Grenze wächst.

Wie früher gezeigt wurde, muß also $\psi_1(t+xd) - \psi_1(t)$ stetig sein, und es findet daher für jedes $x \geqq 0$ die Gleichung

$$\psi_1(t+xd) - \psi_1(t) = x\,[\psi_1(t+d) - \psi_1(t)] \tag{80}$$

oder einfacher

$$\psi_1(t+x) - \psi_1(t) = x\,[\psi_1(t+1) - \psi_1(t)]$$

statt.

b) Wir betrachten jetzt an Stelle von $\psi_1(x)$ die ständig abnehmende Funktion $\psi_1(-x) = \overline{\psi}_1(x)$. Für diese gilt dieselbe Betrachtung, da sie ebenfalls den Bedingungen (75) und (76) genügt. Es ist also für positive s, t, d

$$\overline{\psi}_1(t+xd) - \overline{\psi}_1(t) = x\,[\overline{\psi}_1(t+d) - \overline{\psi}_1(t)],$$

also

$$\psi_1(-t+x\cdot(-d)) - \psi_1(-t) = x\,[\psi_1(-t-d) - \psi_1(-t)] \tag{81}$$

für jedes $x \geqq 0$ eine ständig abnehmende Funktion, oder, indem wir wieder $d = 1$ wählen,

$$\psi_1(-t-x) - \psi_1(-t) = x\,[\psi_1(-t) - \psi_1(-t-1)] \tag{82}$$

für $x \leqq 0$ eine ständig zunehmende Funktion.

Die Funktion $\psi_1(x)$ selbst ist bis jetzt in dem Intervalle $(+t \cdots +\infty)$ durch (80) und in dem Intervall $(-\infty \cdots -t)$ durch die Gleichung (82) definiert. Man übersieht sofort, daß die geradlinigen Stücke dieselbe Neigung haben, da infolge von (75) und (76)

$$\psi_1(t+1) - \psi_1(t) = \psi_1((-t-1)+1) - \psi_1(-t-1)$$

ist. Es ist also nur nötig zu zeigen, daß sich die Stücke von linearen

Funktionen für $x = 0$ *stetig* aneinanderschließen. Hieraus würde übrigens auch die unbeschränkte Gültigkeit von (80) und damit zugleich wieder die Gleichheit der Neigungen folgen.

c) Wählen wir jetzt, unter ϱ eine positive Größe verstanden, um in das Intervall $(-\varrho + \cdots + \varrho)$ einzudringen, t und d gemäß den Gleichungen

$$\text{(83)} \qquad \text{a)} \quad -\varrho < t < 0 \qquad 0 < t + d < +\varrho,$$

also sicher

$$\text{b)} \quad 0 < d < 2\varrho,$$

so können wir die Differenz

$$\psi_1(t+d) - \psi_1(t)$$

mittels der Gleichung (75) auf

$$\psi_1(s+d) - \psi_1(s)$$

zurückführen, indem wir für s irgend eine positive Größe annehmen, da ja die Argumente t, $t+d$, s, $s+d$ von Null verschieden sind. Es gilt also, wenn t und d die Bedingungen (83) erfüllen, stets infolge (80) für positive s und d

$$\text{(84)} \qquad \psi_1(t+d) - \psi_1(t) = d\,[\psi_1(s+1) - \psi_1(s)].$$

Infolge (83) b) ist also

$$|\,\psi_1(t+d) - \psi_1(t)\,| < 2\varrho\,|\,\psi_1(s+1) - \psi_1(s)|.$$

Für hinreichend kleines ϱ ist diese Differenz also beliebig klein und da $t+d$ stets positiv, t stets negativ ist, so folgt, daß die Funktion $\psi_1(x)$ an der Stelle $x = 0$ keinen Sprung erleidet. *Es ist also* $\psi_1(x)$ *eine lineare Funktion von* x, und wir setzen für jedes x

$$\text{(85)} \qquad \psi_1(x) = x[\psi_1(1) - \psi_1(0)] + \psi_1(0).$$

Um jetzt zu zeigen, daß der Koeffizient von x unabhängig von

$$x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$

ist, betrachten wir folgendes Wertsystem:

$$\begin{array}{llllllll} x_1' = & x_1, & x_2' = & x_2, & x_3' = & x_3, & \cdots, & x_n' = \ \ x_n \\ x_1'' = & 0, & x_2'' = & -x_2, & x_3'' = & -x_3, & \cdots, & x_n'' = -x_n \\ x_1''' = & -x_1, & x_2''' = & 0, & x_3''' = & 0, & \cdots, & x_n''' = \ \ 0. \end{array} \qquad \text{(86)}$$

Wir haben bewiesen, daß $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, wie auch $x_2, \cdots, x_n$ und wie auch schließlich x_1 beschaffen ist, eine einzige partielle Ableitung $\psi_1(x_1, \cdots, x_n)$ nach x_1 besitzt. Es ist also, damit die Minimalbedingung (64) erfüllt wird, notwendig in allen Werten der Argumente

$$\text{(87)} \quad 0 = \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \psi_1(0, -x_2, \cdots, -x_n, x_n) + \psi_1(-x_1, 0, \cdots, 0),$$

oder, wenn wir vor dem Differenzieren nach ε die Zeichen verändern, in allen Argumenten

$$\text{(88)} \qquad \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi_1(x_1, 0, \cdots, 0) + \psi_1(0, x_2, \cdots, x_n).$$

An der Stelle $x_2 = \cdots = x_n = 0$ ist aber die Funktion $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, wie wir wissen, quadratisch von der Form $2h^2x_1^2 + \psi(0)$, also ist $\psi_1(x_1, 0, \cdots, 0)$ von der Form $x_1\psi_1(1, 0, \cdots, 0)$ und wir haben die fundamentale Formel gewonnen:

Es ist identisch in allen Argumenten

$$\psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\psi_1(1, 0, \cdots, 0) + \psi_1(0, x_2, \cdots, x_n), \tag{89}$$

wo überdies

$$\psi_1(1, 0, \cdots, 0) > 0$$

ist.

Wir vollenden jetzt den Beweis für ψ mittels des Schlusses von $n - 1$ auf n.

Zunächst folgt aus (89), daß

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \tfrac{1}{2}\psi_1(1,0,\cdots,0)\,x_1^2 + \psi_1(0, x_2, \cdots, x_n)x_1 + \psi(0, x_2, \cdots, x_n) \tag{89}$$

Denn es besitzt die Differenz

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \tfrac{1}{2}\psi_1(1, 0, \cdots, 0)\,x_1^2 - \psi_1(0, x_2, \cdots, x_n)\,x_1$$

den Charakter einer in x_1 stetigen Funktion, welche in bezug auf x_1 den Differentialquotienten Null hat. Sie ist also von x_1 unabhängig und kann daher gleich $\psi(0, x_2, \cdots, x_n)$ gesetzt werden, indem wir $x_1 = 0$ annehmen.

Andererseits ist $\psi(0, x_2, \cdots, x_n)$ für die $n-1$ Variabeln $x_2, \cdots, x_n$ von genau dem gleichen Charakter wie $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ für die n Variabeln. Nun ist unser Satz für $n = 1$ bewiesen. Wir nehmen jetzt an, er sei für $n - 1$ bewiesen und es sei also

$$\chi(x_2, \cdots, x_n) = \psi(0, x_2, \cdots, x_n) - \psi(0, 0, \cdots, 0) \tag{90}$$

eine homogene positive quadratische Form, so ist also identisch, wenn wir $\frac{1}{2}\psi_1(0, 0, \cdots, 0)$ gleich A_1 setzen und $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ statt

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \psi(0, 0, \cdots, 0)$$

schreiben,

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = A_1x_1^2 + \psi_1(0, x_2, \cdots, x_n)\,x_1 + \chi(x_2, \cdots, x_n). \tag{91}$$

Wir setzen $x_1 = x_2$ und haben

$$x_2\psi_1(0, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_2, x_2, \cdots, x_n) - A_1x_2^2 - \chi(x_2, \cdots, x_n). \tag{92}$$

Nun ist aber auch $\psi(x_2, x_2, \cdots, x_n)$ eine Funktion von $n - 1$ Variabeln, welche also eine homogene quadratische Form sein muß. Infolgedessen ist auch die linke Seite eine homogene quadratische Form der $n - 1$ Variabeln und also $\psi_1(0, x_2, \cdots, x_n)$ eine homogene Form der Variabeln $x_2, \cdots, x_n$. Hiermit ist in Rücksicht auf (91) bewiesen, daß $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ eine homogene quadratische Form der n Variabeln ist. Aus der Ungleichheitsrelation (64) folgt überdies, indem wir $k = 1$ und alle x gleich Null

nehmen, daß $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) - \varphi(0, \cdots, 0)$ und also auch ψ für alle Werte der Argumente positiv sind.

Hiermit ist bewiesen, daß $\psi(x_1, \cdots, x_n) - \psi(0, 0, \cdots, 0)$ *eine positiv definite quadratische Form ist.*

Setzt man übrigens

$$x_1 = x_1 t,\ x_2 = x_2 t,\ \cdots,\ x_n = x_n t,$$

so bemerkt man sofort a priori, daß die Gleichung

$$(93)\quad \varphi(x_1 t, x_2 t, \cdots, x_n t) = t^2[\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(0, \cdots, 0)] + \varphi(0, \cdots, 0)$$

besteht und zwar identisch in $t, x_1, \cdots, x_n$.

Hier ist der homogene Charakter sofort erkennbar und ferner wissen wir, daß der Koeffizient von t^2 *positiv* ist.

Den Übergang von ψ zu φ vollziehen wir durch den folgenden dem Hilfssatz 5 (Teil I) entsprechenden

Hilfssatz 9. *Es ist* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *stetig und besitzt einen Differentialquotienten nach* x_ν, *für welchen*

$$(94)\qquad 2\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varphi(\cdots, x_\nu, \cdots) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(\cdots, x_\nu, \cdots) \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung für $\nu = 1$. Wählen wir die Argumente x nach (66) und nehmen alle ε außer ε_1 gleich Null, so haben wir gemäß (64):

$$(95)\quad \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \varphi(x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) + \psi(-x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Durch Addition und Subtraktion von $\varphi(x_1 - \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n)$ folgt

$$(96)\qquad \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \psi(x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(x_1 - \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Indem wir das Vorzeichen von ε_1 vertauschen, erhalten wir

$$(97)\quad \psi(x_1, \cdots, x_n) - \psi(x_1 - \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) < \varphi(x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(x_1 - \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) < \psi(x_1 + \varepsilon_1, x_2, \cdots, x_n) - \psi(x_1, \cdots, x_n).$$

Hieraus folgt sofort, daß $\varphi(x_1)$ in x_1 stetig ist. Um die Ableitung herzustellen, dividieren wir durch ε_1 und gehen zur Grenze über, indem wir entweder $x_1 + \varepsilon_1$ oder $x_1 - \varepsilon_1$ festhalten und $\pm 2\varepsilon = \eta$ als Zuwachs nehmen. Wir erhalten für die vordere wie für die hintere Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ denselben Wert und zwar die Hälfte der Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1}\psi(x_1, \cdots, x_n)$.

Dasselbe gilt für jedes x_ν, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Mit Rücksicht auf die bewiesene Stetigkeit der Funktion φ folgt ferner, daß identisch in $x_1, x_2, \cdots, x_n$

(98) $$2\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(x_1, \cdots, x_n)$$

ist. Und es ist daher unser Funktionaltheorem für $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ vollständig bewiesen.

Teil III.

Die Haupteigenschaft der unstetigen Lösungen und das verallgemeinerte Funktionaltheorem.

Wie bereits in Teil I, 5. angegeben worden ist, läßt sich auf Grund des soeben bewiesenen Satzes ein allgemeines Resultat über die Natur der unstetigen Lösungen angeben. Wir formulieren den

Satz 10. *Die Werte der Funktion $y = \varphi(x)$ liegen entweder auf einer Parabel*

$$y = h^2x^2 + \varphi(0)$$

oder sie füllen den ebenen Raum oberhalb einer solchen Parabel überalldicht aus.

Wir wollen, worin keine Einschränkung liegt, fernerhin stets $\varphi(0) = 0$ annehmen.

Methodisch sei betont, daß wir von der Annahme der Existenz einer Basis keinen Gebrauch machen und diese Hypothese nur insoweit heranziehen, als sie erläutert, daß der zweite Fall tatsächlich im Bereich der Möglichkeit liegt.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 10a. *Es seien a und b zwei reelle Zahlen derart, daß die Gleichung*

(99) $$0 = a\alpha + b\beta$$

mit rationalen Koeffizienten α und β die Gleichung

(100) $$\alpha = 0, \qquad \beta = 0$$

nach sich zieht; dann ist eine der Ungleichheitsbedingung des Fehlergesetzes genügende Funktion

(101) $$\varphi(a\alpha + b\beta)$$

für die sämtlichen rationalen Werte von α und β eine positive quadratische Form in α und β.

In der Tat ist die Darstellung einer Zahl c in der Form

(102) $$c = a\alpha + b\beta$$

eindeutig in α und β (falls c von dieser Form ist). Sind also die Zahlen

(103) $$x_\nu = a\alpha_\nu + b\beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

so gewählt, daß

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

wird, so muß dazu zugleich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$$

(104) und

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0$$

sein. Wählen wir ferner ε von der Form

(105) $$\varepsilon = a\mathsf{A} + b\mathsf{B},$$

wo A und B rationale Zahlen sind, so besteht also die Beziehung

(106) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varphi[a(\alpha_\nu + \mathsf{A}) + b(\beta_\nu + \mathsf{B})] > \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varphi[a\alpha_\nu + b\beta_\nu]$$

für irgend welche rationalen α_ν, β_ν, die (104) genügen, und für irgend welche rationalen A und B.

Indem wir $\psi(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ bilden, stellen wir fest, daß $\psi(a\alpha + b\beta)$ infolge (106) in bezug auf jede der rationalen Variabeln eine konvexe Funktion ist. Überdies ist $\psi(a\alpha + b\beta)$ positiv.

Es ist daher $\psi(a\alpha + b\beta)$ innerhalb eines endlichen Gebietes der α,β-Ebene eine für alle rationalen α und β *gleichmäßig* stetige Funktion.*) Es existiert daher eine stetige konvexe Funktion $2 \cdot F(x_1, x_2)$, welche für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ mit $\psi(a\alpha + b\beta)$ übereinstimmt. Dieselbe genügt außerdem der Bedingung des Fehlergesetzes für zwei Variabele für alle Argumentwerte und ist daher eine positive quadratische Form. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\psi(a\alpha + b\beta)$ folgt auch die gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi(a\alpha + b\beta)$, so daß $\varphi(a\alpha + b\beta)$ ebenfalls mit einer positiven quadratischen Form $F(x_1, x_2)$ so zusammenhängt, daß für

(107) $$x_1 = \alpha, \qquad x_2 = \beta$$

(108) $$F(\alpha, \beta) = \varphi(a\alpha + b\beta), \quad F(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2$$

ist. Um A, B, C zu bestimmen, setzen wir der Reihe nach $\alpha = \beta$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und erhalten

(109) $$A = \varphi(a), \quad C = \varphi(b), \quad B = \varphi(a+b) - \varphi(a) - \varphi(b).$$

Wir untersuchen jetzt die Werteverteilung der Funktion $\varphi(a\alpha + b\beta)$ näher. Sei

$$c = a\alpha + b\beta$$

ein Wert der Argumentmenge. Der Wert der quadratischen Form $F(x_1, x_2)$ für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ ist jedenfalls größer oder gleich dem Minimum $m(c)$ von $F(x_1, x_2)$ für ein der Gleichung:

(110) $$c = x_1 a + x_2 b$$

genügendes Wertepaar x_1, x_2. Wir haben also

*) Den Beweis hierfür entnimmt man sehr leicht den Betrachtungen des Teiles I, Satz 6a und b. Wir kommen später darauf zurück.

$$\varphi(a\alpha + b\beta) \geqq m(c). \tag{111}$$

$m(c)$ ist eine stetige Funktion von c von der Form

$$y = x^2 \frac{AC - B^2}{Ab^2 - 2Bab + Ca^2}, \tag{112}$$

wie man durch direkte Ausrechnung feststellt.

Es seien $x_1(c)$ und $x_2(c)$ Werte von x_1 und x_2, welche für irgend ein c der Bedingung (110) genügen. Wir bestimmen dann zwei rationale Zahlen α' und β' derart, daß

$$|x_1(c) - \alpha'| < \varepsilon, \quad |x_2(c) - \beta'| < \eta$$

ist. Dann ist für dieses c

$$|a\alpha' + b\beta' - c| < |a|\varepsilon + |b|\eta.$$

Nun ist es infolge der Stetigkeit von $F(x_1, x_2)$ möglich, bei gegebenem ξ die Größen ε und η so klein zu wählen, daß

$$|F(x_1, x_2) - F(\alpha', \beta')| < \xi$$

ist für alle α', β', welche den angegebenen Bedingungen genügen.

Infolgedessen gibt es in der Umgebung jeder Stelle c Werte $F(\alpha', \beta') = \varphi(a\alpha' + b\beta')$, die jedem Werte der Form $F(x_1, x_2)$ für $c = x_1 a + x_2 b$ beliebig nahe kommen. Hinsichtlich der Form $F(x_1, x_2)$ gibt es aber nur zwei Fälle: entweder ist sie für $ax_1 + bx_2 = c$ konstant, oder sie nimmt auf dieser Geraden alle Werte, die größer als $m(c)$ sind, an. *Es erfüllt also auch die Wertmenge $F(\alpha', \beta')$ entweder die Parabel $y = m(c)$ oder den oberen Teil der Halbebene, welche durch sie begrenzt wird.*

Betrachten wir endlich die schon früher behandelten Teillösungen, welche durch irgend ein $\varphi(a)$ bestimmt werden und zu dem Intervall $(0a)$ gehören. Dieselben besitzen Parabelform. Es sei A die untere Grenze der zugehörigen Konstanten h_a^2.

Es sind nun zwei Fälle möglich; entweder sind alle Teillösungen von der Form $y = Ax^2$, dann ist Ax^2 die einzige stetige Lösung.

Oder es gibt zwei voneinander verschiedene Teillösungen $\varphi_{0a}(a\alpha)$ und $\varphi_{0b}(b\beta)$, von denen eine, etwa $\varphi_{0a}(x)$, entweder mit Ax^2 zusammenfällt, oder doch so nahe an Ax^2, als man will, gewählt werden kann. In jedem Falle füllt dann $\varphi(a\alpha + b\beta)$ einen Teil der Ebene aus, der sowohl $y = \varphi_{0a}(a\alpha)$ als $y = \varphi_{0b}(b\beta)$ enthält. Es wird also der Teil der Ebene oberhalb Ax^2 überalldicht ausgefüllt.

Wir sind jetzt in der Lage, die Zusatzbedingung des Theorems I in ihrer reduziertesten Form zu geben.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit $\lim_{\text{inf.}} \varphi(x)$ die untere Grenze aller Werte einer Funktion $\varphi(x)$ in der Umgebung der Stelle x. Es be-

steht dann, wie durch die voranstehenden Betrachtungen bewiesen ist, das folgende Theorem:

Verallgemeinertes Theorem I. *Es genüge die eindeutige Funktion* $\varphi(x)$ *der Bedingung*

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1 + \varepsilon) + \varphi(x_2 + \varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n + \varepsilon)$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

dann besitzt die untere Grenze $\lim\limits_{\text{inf.}} \varphi(x)$ *die Form*

$$\lim_{\text{inf.}} \varphi(x) = h^2 x^2 + \varphi(0).$$

Ist ferner irgend ein Wertepaar $x, y > \lim\limits_{\text{inf.}} \varphi(x)$ *vorhanden, welches durch* $x, \varphi(x)$ *nicht beliebig angenähert werden kann, so ist*

$$\varphi(x) \equiv \lim_{\text{inf.}} \varphi(x).$$

Die entsprechende Verallgemeinerung des Funktionaltheorems der definiten quadratischen Formen, sowie einige andere hiermit zusammenhängende Fragen gedenke ich später zu entwickeln.

Bemerkung bei der Korrektur. Während der Korrektur des vorliegenden Aufsatzes erscheint eine Note von H. Lebesgue: Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques (Atti d. R. Ac. d. Sc. d. Torino XLII, 10 marzo 1907). In derselben wird zunächst mittels eines der Hamelschen Methode verwandten Verfahrens das für komplexes Gebiet geltende System

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \quad \varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1)\,\varphi(z_2)$$

durch eine unstetige Lösung befriedigt. Dann aber gibt der Autor den methodisch und sachlich neuen Nachweis, daß die unstetige Lösung sich nicht in einer sehr allgemeinen analytischen Form, die er früher studiert hat, darstellen läßt. Dies Resultat gilt genau ebenso für die hier betrachteten unstetigen Lösungen.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I.

Das lineare Fehlergesetz.

Seite

1. Einleitung 417
2. Beweis des Fehlergesetzes unter der Annahme, daß die Funktion $\varphi(x)$ unter einer endlichen Grenze g liegt 421
3. Ein Hilfssatz über konvexe Funktionen 429
4. Beweis des Gaußschen Fehlergesetzes 432
5. Existenzbeweis der unstetigen Lösungen 434

Teil II.

Das Fehlergesetz für n Variable.

6. Das Funktionaltheorem der definiten quadratischen Formen 437

Teil III.

Die Haupteigenschaft der unstetigen Lösungen und das verallgemeinerte Funktionaltheorem

. 444

Neue Begründung der ebenen Geometrie.

Von

J. Hjelmslev in Hellerup bei Kopenhagen.

Im 57. Band dieser Annalen hat D. Hilbert mit ausschließlicher Benutzung ebener Axiome und zwar ohne Benutzung des Archimedischen Axioms eine Begründung der Bolyai-Lobatscheffskyschen Geometrie gegeben. Später hat G. Hessenberg*) die entsprechende Aufgabe hinsichtlich der elliptischen Geometrie gelöst. In diesen beiden Arbeiten wurden indessen noch Axiome über das Schneiden der Geraden benutzt, indem Hilbert die Voraussetzung macht, daß zu jeder Geraden zwei Parallelen gezogen werden können, während Hessenberg von dem Axiome ausgeht, daß je zwei Geraden sich schneiden.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß eine Begründung der allgemeinen ebenen Geometrie ohne Benutzung irgend eines Axioms über das Schneiden oder Nicht-Schneiden der Geraden möglich ist, daß also *die ebene Geometrie unter ausschließlicher Benutzung ebener Axiome, ohne Stetigkeitsbetrachtungen, ganz unabhängig von der Parallelenfrage aufgebaut werden kann.*

Wir legen das Hilbertsche Axiomensystem zugrunde (die Axiomgruppen I—III a. a. O., S. 137); doch heben wir hervor, daß die Axiome der Anordnung bei den folgenden Entwicklungen nur sehr wenig benutzt werden, und es wird daher zum Schluß die Frage aufgeworfen, ob man auch diese Axiome vermeiden könnte.

§ 1.

Einführung uneigentlicher Punkte.

Eine Spiegelung an einer Geraden a soll mit S_a bezeichnet werden, und wenn ein Punkt A durch diese Spiegelung nach B geführt wird, so schreiben wir $B = S_a A$.

*) G. Hessenberg, Neue Begründung der Sphärik, Sitzber. d. Berliner Math. Gesellsch. 1905, S. 70, und Begründung der elliptischen Geometrie, diese Annalen, Bd. 61, S. 173.

Es seien a und b zwei verschiedene Geraden (Fig. 1) und A ein beliebiger Punkt, der nicht in den beiden Geraden enthalten ist; durch Spiegelungen an a und b leiten wir zwei andere Punkte, B und C, ab, derart daß:

$$B = S_a S_b A,$$
$$C = S_b S_a A.$$

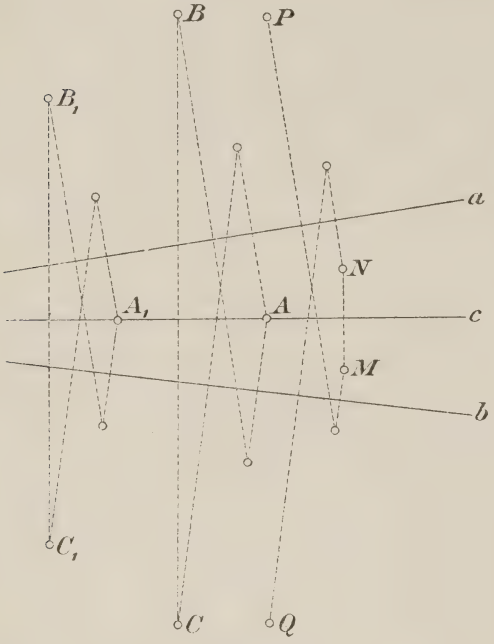


Fig. 1.

B und C sind von A verschieden, und es ist

$$AB = AC,$$

weil die Transformation $S_b S_a$ A und B nach C, bzw. A führt.

Haben die Geraden a und b einen Punkt O gemein, so ist

$$OB = OC,$$

da O bei den Spiegelungen S_a und S_b fest bleibt. Sind außerdem a und b senkrecht zueinander, so fallen B und C in einem Punkte von AO zusammen; in allen anderen Fällen sind B und C verschieden. Aus diesen Tatsachen geht hervor, daß die Gerade OA immer Spiegelungsachse der Punkte B und C ist.

Wenn die Geraden a und b keinen Punkt gemein haben, so gibt es doch stets eine (und nur eine) Gerade c durch A, welche Spiegelungsachse der B und C ist. Von dieser Geraden wollen wir sagen, *daß sie dem Geradenpaare* (ab) *angehört.*

Nehmen wir auf der so gefundenen Geraden c einen neuen Punkt A_1 und konstruieren wir die Punkte

$$B_1 = S_a S_b A_1,$$
$$C_1 = S_b S_a A_1,$$

so ergibt sich wie oben

$$A_1 B_1 = A_1 C_1; \tag{1}$$

nun ist

$$A = S_b S_a B = S_b S_a S_c C = S_b S_a S_c S_b S_a A,$$
$$C_1 = S_b S_a A_1 = S_b S_a S_c A_1 = S_b S_a S_c S_b S_a B_1,$$

und daher:

(2) $$AB_1 = AC_1.$$

Die Gerade c ist also Spiegelungsachse der Punkte B_1 und C_1.

Wir haben also den Satz:

Satz 1. *Durch jeden Punkt A geht eine und nur eine Gerade c, welche einem gegebenen Paare (ab) von sich nicht-schneidenden Geraden angehört. Diese Gerade ist durch irgend einen ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

Liegt A auf a bzw. b, so fällt c mit a bzw. b zusammen.

Nimmt man einen Punkt M, der nicht auf c, und nicht auf CC_1 liegt, und konstruiert man die Punkte:

$$N = S_c M,$$
$$P = S_a S_b M,$$
$$Q = S_b S_a N,$$

so ist Q das Spiegelbild von P in bezug auf c. In der Tat ist

(3) $$PN = QM,$$

weil PN durch die Transformation $S_b S_a$ in MQ übergeht. Außerdem ist

(4) $$PB_1 = QC_1,$$

weil PB_1 durch die Transformation $S_b S_a S_c S_b S_a$ nach QC_1 gelangt. Endlich hat man auch

(5) $$PB = QC,$$

da PB durch die Transformation $S_b S_a S_c S_b S_a$ in QC übergeht.

Da nun das Dreieck NBB_1 Spiegelbild von MCC_1 in bezug auf c ist, so zeigen die Gleichungen (3)—(5), daß P durch Spiegelung an c nach Q geführt wird.

Es ist nunmehr klar, daß dieses Resultat auch in dem bisher ausgeschlossenen Falle, daß M auf CC_1 liegt, Geltung hat.

Da also

$$P = S_c Q = S_c S_b S_a N = S_c S_b S_a S_c M$$

und

$$P = S_a S_b M,$$

so ist für jeden Punkt M:

$$S_a S_b M = S_c S_b S_a S_c M,$$

und daher

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a.$$

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so muß nach unserer Definition c notwendigerweise dem Geradenpaare (ab) angehören. Also

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gerade c dem Geradenpaare (ab) angehört, besteht darin, daß*

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a.$$

Da diese Gleichheit in bezug auf a, b, c symmetrisch ist, so ergibt sich:

Satz 3. *Wenn c dem Paare (ab) angehört, so werden auch a und b den Paaren (bc) bzw. (ac) angehören.*

Satz 4. *Wenn drei Geraden a, b, c ein gemeinsames Lot n haben, so muß c dem Paare (ab) angehören.*

Wenn man nämlich nach unserer Definition durch den Schnittpunkt von c und n diejenige Gerade konstruiert, welche dem Paare (ab) angehört, so zeigt die Konstruktion, daß diese Gerade mit c zusammenfallen muß. Umgekehrt gilt:

Satz 5. *Wenn zwei Geraden a und b ein gemeinsames Lot n haben, und wenn eine dritte Gerade c dem Paare (ab) angehört, so ist n gemeinsames Lot aller drei Geraden a, b, c.*

Wenn in der Tat von einem Punkte A der Geraden c das Lot c_1 auf n gefällt wird, so muß nach Satz 4 c_1 dem Paare (ab) angehören, und c_1 kann somit nicht von c verschieden sein.

Satz 6. *Wenn zwei Geraden zwei gemeinsame Lote haben, so ist jedes Lot der einen Geraden auch ein Lot der anderen.*

Wenn in der Tat von irgend einem Punkte Lote auf die beiden Geraden gefällt werden, so fallen diese Lote nach den Sätzen 4 und 1 zusammen.

Da man durch kongruente Verschiebung jede Gerade mit jeder anderen Geraden zur Deckung bringen kann, so folgt weiter der Satz:

Satz 7. *Gibt es ein Viereck mit vier rechten Winkeln, so muß in jedem Viereck mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel auch ein rechter sein.*

Aus diesem Satz läßt sich in bekannter einfacher Weise der *zweite Legendresche Satz* über die Winkelsumme des Dreiecks folgern.

Satz 8. *Wenn die Geraden c und d dem Paare (ab) angehören, so muß auch d dem Paare (bc) angehören.*

Zum Beweise leiten wir von einem beliebigen Punkte A der Geraden d die folgenden Punkte ab:

$$M = S_a S_b A,$$
$$N = S_b S_a A,$$
$$P = S_b S_c A,$$
$$Q = S_c S_b A.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen geht hervor, daß M und N die Spiegelungsachse d haben, und daß $AM = AN$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgert man, daß $AP = AQ$. Es kommt nun darauf an, zu beweisen, daß P durch Spiegelung an d in Q übergehen muß.

Da nun erstens

$$M = S_a S_b S_c S_b P,$$
$$Q = S_c S_b S_a S_b N$$

und

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a,$$

so ist

$$MQ = PN;$$

und da zweitens:

$$N = S_b S_a S_c S_b P = S_c S_a P,$$
$$Q = S_c S_b S_b S_a M = S_c S_a M,$$

so ist auch

$$NQ = PM.$$

Wir haben somit die folgenden Streckengleichungen:

$$AM = AN,$$
$$AP = AQ,$$
$$NP = MQ,$$
$$MP = NQ.$$

Wenn nun A, M, N nicht in gerader Linie liegen, so wird das Dreieck AMN an der Geraden d nach ANM gespiegelt, und den obigen Gleichungen zufolge wird dann auch dieselbe Spiegelung P nach Q führen, w. z. b. w.

Liegen A, M, N auf einer Geraden n, so ist diese Gerade gemeinsames Lot der Geraden a, b, d, weil die Gerade AM bei der Transformation $S_b S_a$ nicht fest bleiben kann, ohne daß sie senkrecht zu a und b ist. Nach Satz 5 ist n also auch Lot der Geraden c und d, und nach Satz 4 ist hiermit der Beweis vollendet.

Die Gesamtheit aller Geraden, welche einem gegebenen Geradenpaare angehören, nennen wir ein *uneigentliches Büschel.* Die Sätze 3 und 8 zeigen dann, daß ein uneigentliches Büschel durch irgend zwei seiner Geraden eindeutig bestimmt ist; durch jeden Punkt der Ebene geht eine und nur eine Gerade des Büschels.

Wir können dies etwas anders ausdrücken, wenn wir folgende neue Redeweise einführen. Statt *„uneigentliches Büschel“* sagen wir *„uneigentlicher Punkt“*; statt *„Geraden, die dem Büschel angehören“* sagen wir *„Geraden, die durch den uneigentlichen Punkt gehen“*; statt zu sagen, daß ein uneigentliches Büschel durch irgend zwei seiner Geraden eindeutig bestimmt ist, können wir demnach sagen, daß ein uneigentlicher Punkt durch Schnitt von irgend zwei Geraden, die durch den Punkt gehen, eindeutig erzeugt wird.

Nach diesen Verabredungen können wir nun die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 9. *Zwei Geraden haben immer einen und nur einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt gemein.*

Satz 10. *Durch zwei Punkte, welche nicht beide uneigentlich sind, geht eine und nur eine Gerade.*

Dagegen haben zwei uneigentliche Punkte nicht immer eine Verbindungsgerade, was wir sogleich an einem Beispiele zeigen.

Die Lote einer Geraden haben einen uneigentlichen Punkt gemein, welcher *der absolute Pol* der Geraden genannt werden soll. Es ist somit klar, daß die absoluten Pole zweier Geraden, deren Schnittpunkt eigentlich ist, keine Verbindungsgerade haben.

Es hat sich schon aus dem Satze 7 ergeben, daß wir bei dem Aufbau der ebenen Geometrie zwei wesentlich verschiedene Fälle zu betrachten haben; im einen Falle, welchen wir als den *ordinären Fall* bezeichnen werden, gilt der Satz: Irgend zwei Geraden haben höchstens ein gemeinsames Lot; im anderen Falle, dem *singulären Fall*, gilt dagegen der Satz: Wenn zwei Geraden ein gemeinsames Lot haben, so haben sie unendlich viele.

§ 2.

Kongruenz und Symmetrie.

Hilfssatz. Wenn eine Gerade a durch Spiegelung an c in b übergeht, so haben die drei Geraden a, b, c einen Punkt gemein.

Nimmt man in der Tat einen Punkt A auf c und konstruiert man die Punkte $S_a S_b A$ und $S_b S_a A$, so leuchtet ein, daß diese Punkte durch Spiegelung an c ineinander übergehen.

Satz 11. *Wenn drei Geraden a, b, c einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt U gemein haben, so kann die Aufeinanderfolge der Spiegelungen S_a, S_b, S_c durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden. Die Achse dieser Spiegelung geht durch U.*

Es wird genügen, hier den Fall zu betrachten, wo a, b, c sämtlich verschieden sind und ihr gemeinsamer Punkt U uneigentlich ist.*)

Nach Satz 2 ist die Transformation $S_a S_b S_c$ involutorisch; es bedarf also nur des Nachweises, daß wenigstens zwei Punkte existieren, welche bei der Transformation fest bleiben. Auf c wählen wir die Punkte A und A_1 (Fig. 1) und konstruieren die Punkte

$$B = S_a S_b S_c A = S_a S_b A$$

und

$$B_1 = S_a S_b S_c A_1 = S_a S_b A_1.$$

Die Mittelpunkte O und O' der Strecken AB und $A_1 B_1$ bleiben also bei der Transformation $S_a S_b S_c$ ungeändert. BB_1 fällt nicht auf c; sonst

*) Im Falle eines eigentlichen Punktes findet man einen Beweis bei F. Schur, Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Math. Annalen Bd. 51, S. 404.

müßten nämlich O und O' auch auf c liegen, was unmöglich ist; denn die Transformation $S_a S_b$ kann keinen eigentlichen Punkt fest lassen, da a und b keinen solchen Punkt gemein haben. Wenn nun O und O' in einem einzigen Punkte O vereinigt wären, so müßte diejenige Gerade n, welche von O auf AA_1 senkrecht gefällt werden kann, auch auf BB_1 senkrecht stehen, und da die Gerade BB_1 auf Grund des oben bewiesenen Hilfssatzes durch U geht, so müßte n gemeinsames Lot der Geraden a, b, c sein. Wenn also a, b, c kein gemeinsames Lot haben, so ist O notwendigerweise von O' verschieden, und der erste Teil des Satzes ist somit für diesen Fall bewiesen.

In dem Falle, daß ein gemeinsames Lot n der Geraden a, b, c vorhanden ist, setzen wir voraus, daß der Punkt A auf n gewählt ist; O fällt dann gleichfalls auf n, während dies für O' nicht stattfinden kann, weil B und B_1 auf derselben Seite von n liegen; es ist also somit auch für diesen Fall nachgewiesen, daß O und O' verschieden sind.

Zum Beweis der zweiten Aussage unseres Satzes genügt es zu bemerken, daß AA_1 durch die in Rede stehende Spiegelung nach BB_1 gelangt, und die Spiegelungsachse daher nach unserem Hilfssatz durch den Schnittpunkt U von AA_1 und BB_1 gehen muß.

Satz 12. *Zwei Spiegelungen S_a und S_b können durch zwei andere Spiegelungen dergestalt ersetzt werden, daß die Achse der ersten oder der zweiten dieser Spiegelungen in irgend eine gegebene Gerade c durch den Schnittpunkt von a und b fällt.*

Die Gleichungen $S_a S_b = S_c S_x$ und $S_a S_b = S_x S_c$ sind in der Tat gleichbedeutend mit

$$S_c S_a S_b = S_x, \quad \text{bzw.} \quad S_a S_b S_c = S_x.$$

Satz 13. *Vier Spiegelungen S_a, S_b, S_c, S_d können durch zwei Spiegelungen ersetzt werden.*

Fallen zwei aufeinanderfolgende der Geraden a, b, c, d zusammen, so ist der Satz selbstverständlich. In allen übrigen Fällen nehmen wir auf a einen eigentlichen Punkt A, welcher nicht in b enthalten ist, und von A ziehen wir eine Gerade m nach dem Schnittpunkte von b und c. Nach Satz 12 kann alsdann eine Gerade n so bestimmt werden, daß

$$S_b S_c = S_m S_n;$$

es ist also:

$$S_a S_b S_c S_d = S_a S_m S_n S_d.$$

Fällt n mit d zusammen, so ist der Beweis hiermit vollendet. Wenn dagegen n von d verschieden ist, so zieht man ferner von A eine Gerade p nach dem Schnittpunkte von n und d und bestimmt eine Gerade q derart, daß

$$S_n S_d = S_p S_q:$$

also

$$S_a S_b S_c S_d = S_a S_m S_p S_q .$$

Da nun die Geraden a, m, p alle durch A gehen, so ist die Transformation $S_a S_m S_p$ einer einzigen Spiegelung S_r gleichwertig; schließlich erhält man also:

$$S_a S_b S_c S_d = S_r S_q .$$

Durch eine ähnliche Betrachtung läßt sich leicht zeigen, daß drei Spiegelungen, deren Achsen nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen, durch drei Spiegelungen dergestalt ersetzt werden können, daß die beiden ersten der Spiegelungsachsen durch irgend einen eigentlichen Punkt P gehen. Bei der von den drei Spiegelungen gebildeten Transformation kann der Punkt P nur dann sich selbst entsprechen, wenn er auch auf der dritten Achse liegt.

Wir können daher die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 14. *Drei Spiegelungen können nicht einander aufheben. Bei der Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen, welche nicht durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden können, wird kein eigentlicher Punkt sich selbst entsprechen.*

Satz 15. *Eine ungerade Anzahl von Spiegelungen kann nicht durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen ersetzt werden.*

Zwei Figuren, welche durch die Aufeinanderfolge einer $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\\text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Spiegelungen ineinander übergehen, nennen wir bzw. $\left\{\begin{matrix}\text{kongruent}\\\text{symmetrisch}\end{matrix}\right\}$.

Wenn zwei Figuren kongruent sind, so kann die eine Figur durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen S_a und S_b in die andere verwandelt werden. Die Transformation $S_b S_a$ nennen wir eine *Drehung* und den Schnittpunkt der Spiegelungsachsen a und b nennen wir das *Drehzentrum*.

Wenn zwei Figuren symmetrisch sind, so wird entweder eine einzige Spiegelung oder die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen genügen, um die eine Figur in die andere zu verwandeln.

Zwei Figuren, deren Punkte einander paarweise so zugeordnet sind, daß die einander zugeordneten Strecken einander gleich sind, sind entweder kongruent oder symmetrisch. Denn wenigstens drei Spiegelungen sind hinreichend, um die eine Figur in die andere zu verwandeln.

Definition. Ein *vollständiger Winkel* (a, b) ist ein geordnetes System von zwei Geraden a und b, die einen eigentlichen Punkt (den Scheitel des Winkels) gemein haben.

Indem wir die oben gegebene Definition von kongruenten und symmetrischen Figuren auf vollständige Winkel übertragen, können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 16. *Wenn ein vollständiger Winkel* (a, b) *mit dem Scheitel* O *gegeben ist, so kann man eine und nur eine Gerade* b_1 *finden, welche eine gegebene Gerade* a_1 *in einem gegebenen Punkte* O_1 *derart schneidet, daß die vollständigen Winkel* (a, b) *und* (a_1, b_1) *kongruent sind.*

Durch die Aufeinanderfolge von zwei geeigneten Spiegelungen gehen O und a in O_1 und a_1 über; es wird dann b in die gesuchte Gerade b_1 übergehen. Wenn ferner zwei Geraden b_1 und b_2 die Bedingung erfüllten, müßten (a_1, b_1) und (a_1, b_2) kongruent sein und somit durch zwei Spiegelungen ineinander übergehen. Da indessen a_1 und O_1 sich bei diesen Spiegelungen nicht ändern würden, so müßten die Spiegelungsachsen senkrecht aufeinander stehen und durch O_1 gehen; es müßte dann auch b_1 fest bleiben.

Für vollständige Winkel kann man eine Addition definieren, indem man untereinander kongruente Winkel als gleichwertig betrachtet. Wenn nun zwei vollständige Winkel (a, b) und (p, q) addiert werden sollen, so bestimmt man eine Gerade c, welche durch den Scheitel von (a, b) läuft, derart, daß (b, c) und (p, q) kongruent werden; man setzt dann:

$$(a, b) + (p, q) = (a, c).$$

Mit Hilfe der oben entwickelten Sätze überzeugt man sich ohne Mühe, daß für diese Addition die gewöhnlichen Gesetze Geltung haben.

Es sei nur noch bemerkt, daß man dem Winkel (a, a) den Wert Null beilegen muß.

Satz 17. *Wenn vier Geraden* a, b, c, d *einen eigentlichen Punkt* O *gemein haben und wenn ferner* $(a, b) = (c, d)$, *so ist* $S_a S_b = S_c S_d$.

Ist m eine der Spiegelungsachsen der beiden Geraden a und c, so muß der Winkel (a, b) durch die Transformation $S_c S_m$ in (c, d) übergehen. Es sei nun A irgend ein Punkt und es seien weiter

$$B = S_a S_b A,$$
$$A_1 = S_c S_m A,$$
$$B_1 = S_c S_d A_1.$$

Die Transformation $S_c S_m$ führt dann A, a, b nach A_1, c, d, also auch $S_a S_b A = B$ nach $S_c S_d A_1 = B_1$. Es ist also:

$$B_1 = S_c S_m B,$$

und daher:

$$S_c S_d S_c S_m A = S_c S_m S_a S_b A.$$

Da diese Gleichung für jeden Punkt A gelten muß, so haben wir die Identität:

$$S_c S_d S_c S_m = S_c S_m S_a S_b,$$

also:

$$S_a S_b = S_c S_d,$$

w. z. b. w.

Satz 18. *Wenn vier Geraden a, b, c, d durch einen eigentlichen Punkt O laufen und wenn $S_a S_b = S_c S_d$, so ist auch $(a, b) = (c, d)$.*

In der Tat kann durch O eine und nur eine Gerade d_1 derart bestimmt werden, daß $(a, b) = (c, d_1)$. Nach Satz 17 ist dann $S_a S_b = S_c S_{d_1} = S_c S_d$; d_1 fällt also mit d zusammen.

Satz 19. *Bei jeder symmetrischen Verwandtschaft W, welche keine Spiegelung ist, gibt es eine und nur eine Gerade, welche sich selbst entspricht.*

Wir wählen eine Strecke AB (Fig. 2), welcher bei der Verwandtschaft W eine Strecke $A_1 B_1$ entspricht, sodaß die Mittelpunkte M und N der Strecken AA_1 und BB_1 verschieden sind. Bei Umwendung um M gelangt AB nach $A_1 B_2$; $A_1 B_2$ und $A_1 B_1$ haben eine Spiegelungsachse a, die durch A_1 läuft und senkrecht auf MN steht (letztere Tatsache ergibt sich aus dem bekannten, leicht beweisbaren Satz, daß die Mittelsenkrechte der Seite $B_1 B_2$ des Dreiecks $BB_1 B_2$ zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden anderen Seiten senkrecht ist).

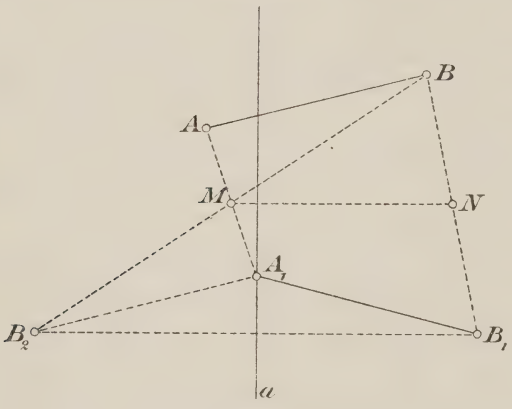


Fig. 2.

Die Verwandtschaft W kann somit durch die Aufeinanderfolge einer Umwendung um M und einer Spiegelung an a ersetzt werden; da aber die Gerade MN bei diesen Transformationen fest bleibt, ist hiermit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Da ferner bei der Verwandtschaft W jedem Punkt P der Geraden MN nach Satz 14 ein von P verschiedener Punkt P_1 entspricht, so kann keine Gerade, welche MN trifft, sich selbst entsprechen; und da eine Gerade b, die ganz auf der einen Seite der Geraden MN liegt, bei der Umwendung um M nach einer Geraden b_1 auf der anderen Seite von MN gelangt, und da wiederum b_1 bei der Spiegelung an a auf derselben Seite der Geraden MN liegen bleibt, so kann b bei der Transformation W sich nicht selbst entsprechen. Der Satz 19 ist somit vollständig bewiesen.

Gleichzeitig erkennen wir auch die Richtigkeit der folgenden Tatsache:

Satz 20. *Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in zwei kongruenten Punktreihen* $(AB\cdots)$ *und* $(A_1B_1\cdots)$ *fallen entweder in einem einzigen Punkt zusammen oder sie sind in einer und derselben Geraden enthalten.*

§ 3.

Vorbereitung zum Beweis des Pascalschen Satzes.

Es seien (Fig. 3) a, b, c drei Geraden, die durch einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt P laufen, und O irgend ein (von P verschiedener) eigentlicher Punkt auf c. Wir fällen die Lote OA und OB auf a und b und bezeichnen die Gerade OB mit d; wir setzen voraus, daß B nicht nach P fällt. Da die Geraden a, c, d nicht durch einen und denselben Punkt laufen, so kann die Aufeinanderfolge der drei Spiegelungen S_a, S_c, S_d nicht durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden; denn dann müßte die Transformation $S_dS_cS_a$ involutorisch sein, was nach Satz 2 unmöglich ist. Es gibt also nach Satz 19 eine und nur eine Gerade g, welche bei der Transformation $S_dS_cS_a$ sich selbst entspricht. Diese Gerade geht durch den Punkt A; wenn nämlich $O_1 = S_aO$, so ist

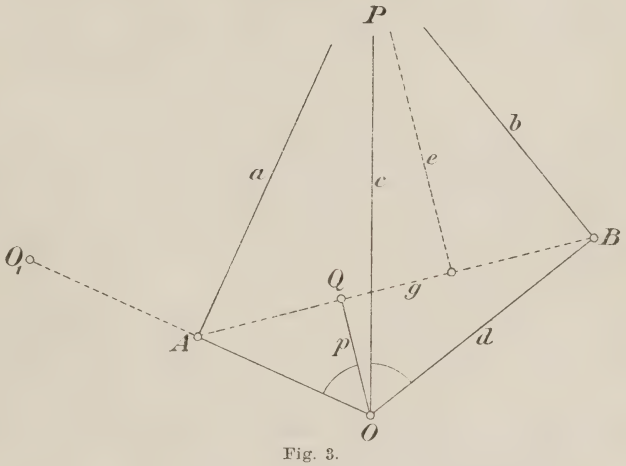


Fig. 3.

$$S_dS_cS_aO_1 = O,$$

und der Mittelpunkt A der Strecke OO_1 muß also auf g liegen.

Es läßt sich nun ferner nachweisen, daß g auch durch B läuft; denn es gibt nach Satz 12 eine Gerade e durch P, so daß

$$S_cS_a = S_bS_e,$$

also auch

$$S_dS_cS_a = S_dS_bS_e,$$

und bei der Transformation $S_dS_bS_e$ muß die von B auf e senkrecht gefällte Gerade sich selbst entsprechen; diese Gerade muß daher mit g zusammenfallen.

Schließlich können wir nun eine Gerade p durch O so bestimmen, daß

$$S_d S_c = S_p S_{OA},$$

und daher:

$$S_d S_c S_a = S_p S_{OA} S_a.$$

Die Gerade p erfüllt nach Satz 18 die Kongruenz:

$$(OA, p) = (c, d),$$

und da p senkrecht auf AB steht, weil $AB = g$ bei der Transformation $S_d S_c S_a = S_p S_{OA} S_a$ fest bleibt, so haben wir:

Satz 21. *Wenn auf zwei verschiedenen Strecken OA und OB Lote in A und B errichtet werden, welche einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt P haben, und wenn ferner das Lot OQ von O auf AB gefällt wird, so gilt immer die Kongruenz:*

$$(OA, OQ) = (OP, OB).$$

In dem beim Beweise ausgeschlossenen Fall, daß B und P zusammenfallen, ist der Satz selbstverständlich.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir den ersten der beiden Beweise, welche Hilbert*) in den „Grundlagen der Geometrie“ für einen speziellen Fall des Pascalschen Satzes gegeben hat, unmittelbar für den folgenden Satz anwenden:

Satz 22. *Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, deren Schnittpunkt ein eigentlicher Punkt S ist, und wenn ferner zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks je ein gemeinsames Lot haben, das durch S läuft, dann hat auch das dritte Paar von Gegenseiten ein gemeinsames Lot durch S.*

Mit Hilfe eines Beweises von G. Hessenberg**) können wir ferner den folgenden speziellen Fall des Pascalschen Satzes gewinnen:

Satz 23 *Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, und wenn ferner die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eigentliche Punkte sind, dann liegen diese drei Punkte auf einer und derselben Geraden.*

Der Beweis Hessenbergs stützt sich wesentlich auf einen Hilfssatz über das vollständige Vierseit. Dieser Hilfssatz soll hier in folgender, verallgemeinerter Form bewiesen werden (Fig. 4): Es seien p, q, r, s vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und es seien die (eigentlichen oder uneigentlichen) Gegeneckenpaare des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits durch AA_1, BB_1, CC_1 bezeichnet;

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie 1899, p. 28.

**) G. Hessenberg, Neue Begründung der Sphärik, Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellschaft 1905, S. 70 (Archiv d. Math. u. Physik, Bd. 9).

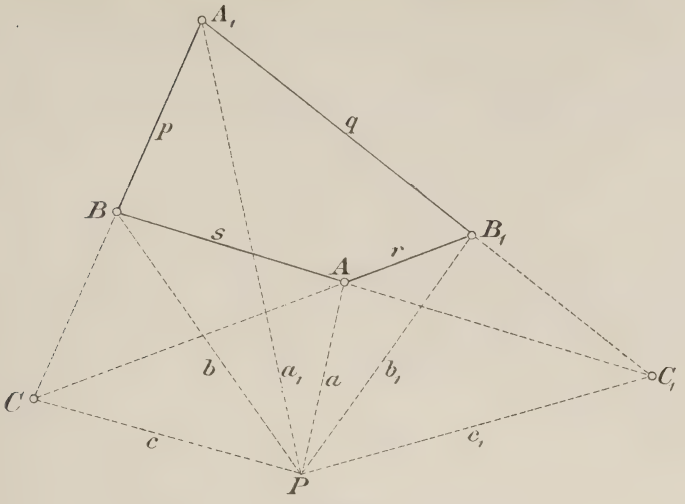


Fig. 4.

wenn nun diese Gegeneckenpaare mit einem beliebigen eigentlichen Punkt P, der nicht in eine Ecke des Vierseits fällt, durch die Geradenpaare aa_1, bb_1, cc_1 verbunden werden, und wenn dann

$$(b, c) = (c_1, b_1),$$

so ist auch

$$(c, a) = (a_1, c_1)$$

und

$$(a, b) = (b_1, a_1).$$

Wir können dies auch in folgender Weise ausdrücken: wenn zwei der Geradenpaaren aa_1, bb_1, cc_1 gemeinsame Spiegelungsachsen haben, so haben alle drei Geradenpaare gemeinsame Spiegelungsachsen. Zum Beweis dieses Hilfssatzes bestimmen wir sechs Geraden a', a_1', b', b_1', c', c_1' derart, daß:

(6) $$S_r S_a = S_{a'} S_s,$$

(7) $$S_s S_b = S_{b'} S_p,$$

(8) $$S_p S_c = S_{c'} S_r,$$

(9) $$S_p S_{a_1} = S_{a_1'} S_q,$$

(10) $$S_q S_{b_1} = S_{b_1'} S_r,$$

(11) $$S_q S_{c_1} = S_{c_1'} S_s.$$

Aus den Gleichungen (8), (9), (10) folgert man:

(12) $$S_{a_1'} S_{b_1'} S_{c'} = S_p S_{a_1} S_{b_1} S_c S_p,$$

und aus (9), (11), (7):

(13) $$S_{a_1'} S_{c_1'} S_{b'} = S_p S_{a_1} S_{c_1} S_b S_p.$$

Ferner ergibt sich aus (7), (6), (8):

$$S_{b'}S_{a'}S_{c'} = S_sS_bS_pS_rS_aS_sS_pS_cS_r = S_pS_bS_aS_cS_p. \tag{14}$$

Die letztere Reduktion erhält man auf Grund der Identitäten:

$$S_sS_bS_p = S_pS_bS_s,$$
$$S_rS_aS_s = S_sS_aS_r,$$
$$S_pS_cS_r = S_rS_cS_p.$$

Jeder der Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (12), (13), (14) stellt eine Spiegelung dar und es läuft somit jedes der Geradentripel $a_1'b_1'c'$; $a_1'c_1'b'$; $b'a'c'$ durch einen Punkt; da nun nach Voraussetzung

$$(b, c) = (c_1, b_1),$$

also nach Satz 17:

$$S_bS_c = S_{c_1}S_{b_1},$$

so ist

$$S_pS_{a_1}S_{b_1}S_cS_p = S_pS_{a_1}S_{c_1}S_bS_p,$$

und daher, nach (12) und (13):

$$S_{a_1'}S_{b_1'}S_{c'} = S_{a_1'}S_{c_1'}S_{b'}. \tag{15}$$

Aus dieser Gleichung folgern wir, daß die Geraden a_1', b_1', c_1', b', c' einen Punkt gemein haben.

Da nun b' von a_1', c_1', c' verschieden ist und da, wie oben gezeigt, jedes der Geradentripel $a_1'b_1'c'$, $a_1'c_1'b'$, $b'a'c'$ durch einen Punkt geht, so leuchtet ein, daß alle sechs Geraden a', b', c', a_1', b_1', c_1' einen Punkt P' gemein haben.

Die Achse der Spiegelung $S_pS_{a_1}S_{c_1}S_bS_p$ geht also (nach Gleichung (13)) durch P', und da diese Achse auch durch das Spiegelbild P_1 von P in bezug auf p gehen muß, weil P_1 bei der Transformation $S_pS_{a_1}S_{c_1}S_bS_p$ fest bleibt, so ist

$$S_pS_{a_1}S_{c_1}S_bS_p = S_{P'P_1}.$$

(P' ist von P_1 verschieden, weil z. B. b' durch P', aber nicht durch P_1 läuft.)

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich aus Gleichung (14), daß:

$$S_pS_bS_aS_cS_p = S_{P'P_1}.$$

Es ist also:

$$S_pS_{a_1}S_{c_1}S_bS_p = S_pS_bS_aS_cS_p,$$

und daher

$$S_{a_1}S_{c_1}S_b = S_bS_aS_c = S_cS_aS_b,$$

also

$$S_{a_1}S_{c_1} = S_cS_a,$$

d. h. (nach Satz 18)

$$(c, a) = (a_1, c_1),$$

w. z. b. w.

Wir können jetzt nach Hessenberg den Beweis des Satzes 23 in folgender Weise führen (Fig. 5).

Das Sechseck $ABCDEF$ sei dem Geradenpaar gh einbeschrieben und die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten seien mit P, Q, R

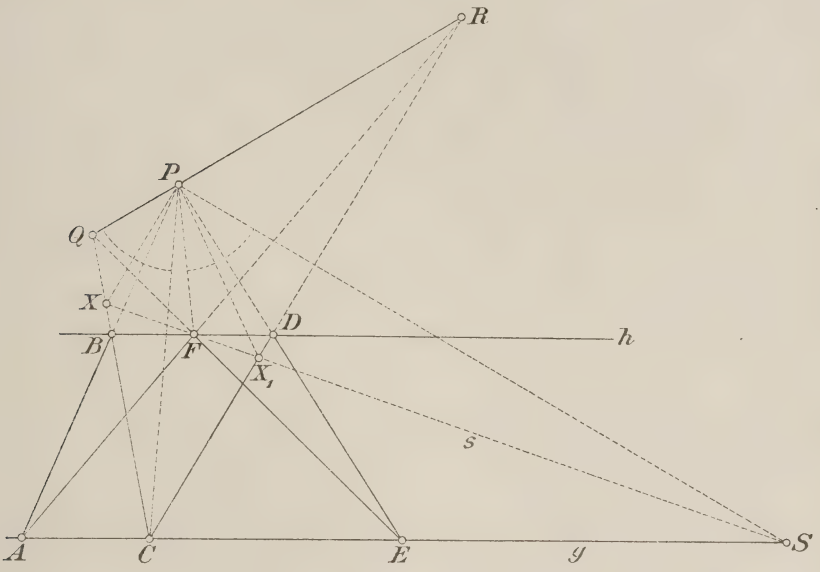


Fig. 5.

bezeichnet. Auf g bestimmen wir einen Punkt S derart, daß die Geradenpaare PS, PQ und PC, PF gemeinsame Spiegelungsachsen haben.

Die Gerade $FS = s$ schneidet die Geraden CB und CD in bzw. X und X_1.

Die Gerade s bildet mit jedem der Dreiecke CQE, BCD, ACR ein vollständiges Vierseit, und wenn wir unseren Hilfssatz auf diese drei Vierseite nacheinander anwenden, so ergibt sich, daß die Geradenpaare

$$PS,\ PQ$$
$$PC,\ PF$$
$$PX,\ PE$$
$$PX_1,\ PB$$
$$PS,\ PR$$

gemeinsame Spiegelungsachsen haben; in dieser Reihe finden wir aber die beiden Paare PS, PQ und PS, PR, und die Gerade PQ fällt also mit PR zusammen.

§ 4.

Über eine spezielle Kollineation.

Es sei $(ABC\cdots)$ irgend eine Figur, deren Punkte $A, B, C, \cdots$ sämtlich eigentlich sind, und O ein beliebiger eigentlicher Punkt; aus $(ABC\cdots)$ leiten wir durch eine Drehung um O, welche keine Umwendung ist, eine neue Figur $(A_2B_2C_2\cdots)$ ab; die Mittelpunkte $A_1, B_1, C_1, \cdots$ der Strecken AA_2, BB_2, CC_2, $\cdots$ bilden dann eine dritte Figur, deren Punkte den Punkten der ursprünglichen Figur $(ABC\cdots)$ eindeutig entsprechen. Es besteht also eine eindeutige Transformation, durch welche die Figur $(ABC\cdots)$ in $(A_1B_1C_1\cdots)$ übergeht. Diese Transformation nennen wir eine *direkte Halbdrehung* um O, während die umgekehrte Transformation eine *inverse Halbdrehung* um O heißen soll. Die Beziehung der beiden Figuren $(ABC\cdots)$ und $(A_1B_1C_1\cdots)$ ist ein-eindeutig, weil $OA_1 \perp AA_1$, $OB_1 \perp BB_1, \cdots$, und

$$(OA, OA_1) = (OB, OB_1) = (OC, OC_1) = \cdots .$$

Der Punkt O entspricht sich selbst, und jeder Geraden durch O entspricht eine Gerade durch O.

Entsprechende Winkel mit dem Scheitel O sind einander kongruent.

Eine direkte oder inverse Halbdrehung ist bestimmt, wenn das Drehzentrum O und zwei durch O gehende einander entsprechende Geraden gegeben sind; diese Geraden können nicht senkrecht zueinander stehen.

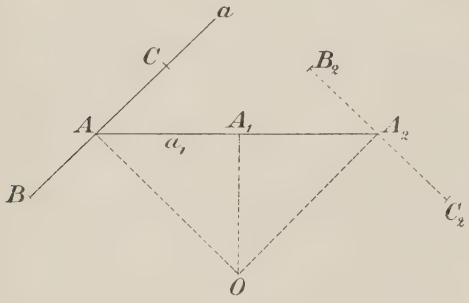


Fig. 6.

Bei einer direkten Halbdrehung gehen nach Satz 20 die eigentlichen Punkte einer gegebenen Geraden a in eigentliche Punkte einer Geraden a_1 über; um diese Gerade zu konstruieren (Fig. 6), fällen wir das Lot OA auf a und bestimmen den Punkt A_1, welcher bei der gegebenen Halbdrehung dem Punkte A entspricht. Die Gerade AA_1 ist dann die gesuchte.

Um dies zu zeigen, wählen wir auf a zwei Punkte B und C derart, daß $AB = AC$. Diejenige Drehung, aus welcher unsere Halbdrehung abgeleitet ist, kann nun durch die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an OA und OA_1 dargestellt werden; wenn also diese Drehung die Punkte B und C nach B_2 und C_2 führt, so ist B_2C_2 das Spiegelbild von CB in bezug auf OA_1. Da nun die gesuchte Gerade a_1 durch die Mittelpunkte B_1 und C_1 der Strecken BB_2 und CC_2 läuft, so steht sie senkrecht auf OA_1 und fällt daher mit AA_1 zusammen.

Gleichzeitig ergibt sich, daß ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel durch O läuft, durch die Halbdrehung in einen rechten Winkel übergehen muß.

Satz 24. *Wenn mehrere Geraden einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt P gemein haben, so werden sie durch jede direkte Halbdrehung in Geraden übergeführt, welche ebenfalls einen Punkt gemein haben.*

Zum Beweis (siehe Fig. 3) ziehen wir durch das Drehzentrum O eine Gerade c nach P (der Fall, daß P in O fällt, ist schon behandelt worden); es seien a und b zwei andere Geraden durch P. Wir fällen die Lote OA und OB auf a und b, und weiter das Lot OQ auf AB; es ist dann nach Satz 21:

$$(OA, OQ) = (c, OB).$$

Eine direkte Halbdrehung um O führt nun unsere Figur in eine ganz ähnliche Figur über; a, b, c, OA, OB, OQ gehen in a_1, b_1, c_1, OA_1, OB_1, OQ_1 über, so daß $OA_1 \perp a_1$, $OB_1 \perp b_1$, $OQ_1 \perp A_1B_1$, und

$$(OA_1, OQ_1) = (c_1, OB_1).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun nach Satz 21, daß die Geraden a_1, b_1, c_1 einen Punkt P_1 gemeinsam haben. Wenn wir beliebige andere Geraden durch P ziehen, so leuchtet demnach ein, daß die ihnen entsprechenden Geraden durch P_1 laufen. Wir können also sagen, daß bei jeder direkten Halbdrehung einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt P ein Punkt P_1 eindeutig entspricht; wenn P eine Gerade a durchläuft, muß P_1 die entsprechende Gerade a_1 durchlaufen.

Auch für eine inverse Halbdrehung gilt, daß jedem Punkt ein Punkt entspricht; aber ein eigentlicher Punkt wird nicht immer in einen eigentlichen Punkt übergeführt, und Punkte einer Geraden gehen nicht immer in Punkte einer Geraden über; indessen kann man immer beliebig viele eigentliche Punkte angeben, deren entsprechende Punkte auch eigentlich sind, und wir können jedenfalls den folgenden Satz aussprechen:

Satz 25. *Wenn bei irgend einer (direkten oder inversen) Halbdrehung zwei Punkte A und B in A_1 und B_1 übergehen, und wenn die beiden Geraden AB und A_1B_1 existieren, so wird bei dieser Halbdrehung jedem Punkt der Geraden AB ein Punkt der Geraden A_1B_1 entsprechen.*

Wir schreiten nun zur Betrachtung einer Transformation, die durch die Aufeinanderfolge einer direkten, und einer inversen Halbdrehung, bzw. D, J, mit gemeinsamem Drehzentrum O, gebildet wird.

Wenn die Transformation J gewisse eigentliche Punkte oder Geraden in ebensolche überführt, so geht aus Satz 21 unmittelbar hervor, daß die Halbdrehungen D und J in bezug auf diese Punkte oder Geraden ver-

tauschbar sind, und auf Grund dieser Tatsache können wir beweisen, daß die beiden Halbdrehungen in bezug auf alle Punkte vertauschbar sind.

Es sei U ein beliebiger Punkt, und

$$U_1 = JU,$$
$$U_2 = DU_1,$$

also

$$U_2 = DJU.$$

Wir wählen zwei eigentliche Punkte, A_1 und B_1, deren Verbindungsgerade nicht durch U_1 geht, und bestimmen die Punkte A, B, A_2, B_2 derart, daß:

$$A_1B_1 = J(AB),$$
$$A_2B_2 = D(A_1B_1),$$

also

$$A_2B_2 = DJ(AB).$$

A, B, A_2, B_2 sind demnach alle eigentlich; es existieren also die Verbindungsgeraden AU, BU, A_1U_1, B_1U_1, A_2U_2, B_2U_2 sämtlich. Da nun die Geraden AU und BU durch die Halbdrehung J in A_1U_1 und B_1U_1 übergehen, und da wiederum A_1U_1 und B_1U_1 durch die Halbdrehung D nach A_2U_2 und B_2U_2 geführt werden, so müssen AU und BU bei jeder der beiden Transformationen DJ und JD in A_2U_2 und B_2U_2 übergehen, d. h.

$$U_2 = DJ(U) = JD(U), \text{ w. z. b. w.}$$

In ähnlicher Weise kann leicht nachgewiesen werden, daß zwei direkte oder zwei inverse Halbdrehungen mit gemeinsamem Drehzentrum vertauschbar sind. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 26. *Wenn bei der Aufeinanderfolge von beliebig vielen Halbdrehungen mit gemeinsamem Drehzentrum zwei Punkte A und B in A_1 und B_1 übergehen, und die beiden Geraden AB und A_1B_1 existieren, so wird jeder Punkt der Geraden AB in einen Punkt der Geraden A_1B_1 übergehen.*

In dem Falle, daß die Halbdrehungen entweder sämtlich direkt oder sämtlich invers sind, folgt der Satz aus Satz 25.

Wenn dagegen die Halbdrehungen teilweise invers und teilweise direkt sind, so lassen sie sich wegen des soeben bewiesenen Satzes über die Vertauschbarkeit der Halbdrehungen derart ordnen, daß alle vorkommenden direkten Halbdrehungen zuerst ausgeführt werden. Nach Satz 25 ist der Beweis hiermit auch für diesen Fall erbracht.

§ 5.

Einführung uneigentlicher Geraden.

Im folgenden wählen wir einen festen eigentlichen Punkt O (den Fundamentalpunkt) als Zentrum derjenigen Halbdrehungen, welche zur Anwendung kommen werden.

Definition. *Eine uneigentliche Gerade ist ein System von uneigentlichen Punkten, welches entweder durch eine Halbdrehung um den Fundamentalpunkt in die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Punkte einer gewöhnlichen Geraden übergehen kann, oder mit der Gesamtheit der absoluten Pole aller Geraden durch O zusammenfällt.*

Im letzteren Fall soll die uneigentliche Gerade die *ausgezeichnete Gerade* heißen. Die Punkte dieser Geraden nennen wir die *ausgezeichneten Punkte.*

Satz 27. *Wenn drei Punkte U, V, W auf einer uneigentlichen Geraden liegen, so werden diese Punkte durch eine beliebige Halbdrehung D_1 um den Fundamentalpunkt in drei Punkte U_1, V_1, W_1 verwandelt, welche auf einer (eigentlichen oder uneigentlichen) Geraden liegen.*

Beweis. Sind U, V, W ausgezeichnete Punkte, so gehen sie durch die Halbdrehung D_1 in ebensolche über; dieser Fall ist somit schon erledigt.

Wenn U, V, W nicht alle ausgezeichnet sind, so muß nach unserer Definition eine direkte Halbdrehung existieren, durch welche U, V, W in Punkte U', V', W' einer eigentlichen Geraden übergehen. Die umgekehrte Halbdrehung, welche invers sein muß, sei mit J bezeichnet; wir können dann schreiben:

$$UVW = J(U'V'W').$$

Es soll nun bewiesen werden, daß man eine Halbdrehung bestimmen kann, bei der U_1, V_1, W_1 in Punkte einer eigentlichen Geraden verwandelt werden. Wir wählen eine direkte Halbdrehung D_2, derart daß z. B. U_1 nach einem eigentlichen Punkt U_2 geführt wird, während V_1 und W_1 in V_2 und W_2 übergehen.

Es ist also:

$$U_2 V_2 W_2 = D_2(U_1 V_1 W_1),$$

und da der Voraussetzung zufolge

$$U_1 V_1 W_1 = D_1(UVW)$$

und

$$UVW = J(U'V'W'),$$

so ist:

$$U_2 V_2 W_2 = D_2 D_1 J(U'V'W').$$

Da nun U', V', W' auf einer eigentlichen Geraden liegen, und da U_2 ein eigentlicher Punkt ist, so müssen nach Satz 26 die Punkte U_2, V_2, W_2 auch auf einer eigentlichen Geraden liegen, und der Beweis ist hiermit vollendet.

Nach Einführung der uneigentlichen Geraden haben nun die folgenden Verknüpfungssätze allgemeine Gültigkeit:

Satz 28. *Irgend zwei Punkte A und B haben eine Verbindungsgerade.*

Es genügt hier den Fall zu betrachten, daß beide Punkte uneigentlich sind.

Es seien erstens die beiden Punkte ausgezeichnete Punkte; dann ist die ausgezeichnete Gerade die gesuchte.

Ist zweitens A nicht ausgezeichnet, so können wir eine solche Halbdrehung wählen, daß A bei dieser Halbdrehung in einen eigentlichen Punkt A_1 verwandelt wird; wenn dann B in B_1 übergeht, so haben A_1 und B_1 eine eigentliche Verbindungsgerade; die Punkte A und B haben daher eine eigentliche oder uneigentliche Verbindungsgerade.

Satz 29. *Zwei Geraden a und b haben einen und nur einen Punkt gemein.*

Ist eine der Geraden, z. B. a, die ausgezeichnete Gerade, so können wir eine Halbdrehung wählen, welche b in eine eigentliche Gerade b_1 verwandelt. Bei dieser Halbdrehung bleibt a fest, und da a und b_1 einen und nur einen Punkt gemein haben, gilt dasselbe von a und b.

Wenn beide Geraden von der ausgezeichneten Geraden verschieden sind, so gehen sie bei der Aufeinanderfolge von zwei geeigneten Halbdrehungen in zwei eigentliche Geraden über, und da diese Geraden einen und nur einen Punkt gemein haben, ist der Beweis hiermit vollendet.

Satz 30. *Die absoluten Pole aller Geraden durch einen festen eigentlichen Punkt P liegen auf einer Geraden.* Diese Gerade soll *die absolute Polare* von P heißen.

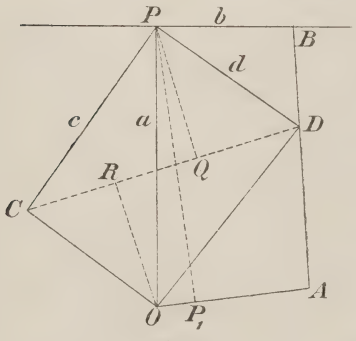


Fig. 7.

Wenn P in den Fundamentalpunkt O fällt, ist der Satz eine unmittelbare Folge unserer Definition.

Fällt P nicht in O, so ziehen wir (Fig. 7) die Gerade $OP = a$, das Lot b auf a in P, und schließlich zwei beliebige aufeinander senkrechte Geraden c und d durch P.

Es wird dann genügen zu beweisen, daß die absoluten Pole der Geraden a, b, c auf einer Geraden liegen.

Wir fällen die Lote OC und OD auf c und d, und ferner die Lote DB auf b und OA auf BD.

Wenn nun $OA \perp a$, so haben die Geraden a und BD zwei gemeinsame Lote b und OA; die absoluten Pole der Geraden durch P fallen dann mit den absoluten Polen der Geraden durch O zusammen und bilden daher die ausgezeichnete Gerade.

In allen anderen Fällen trifft das Lot PP_1 von P auf OA diese Gerade in einem von O verschiedenen Punkt P_1. Diejenige Halbdrehung um O, welche P in P_1 verwandelt, führt nun a nach OA, und BA nach einer Geraden, die durch A läuft; der absolute Pol von b geht daher als Schnittpunkt der beiden Geraden a und BA bei der erwähnten Halbdrehung in A über. Da ferner der absolute Pol von a in den absoluten Pol von OA übergehen muß, so wird die Verbindungsgerade der absoluten Pole von b und a in die Gerade AB übergehen: es bedarf also nur noch des Nachweises, daß der absolute Pol von c durch unsere Halbdrehung in einen Punkt von AB verwandelt wird. Um dies zu zeigen, fällen wir von P und O die Lote PQ und OR auf CD; es ist dann nach Satz 21

$$(PQ, d) = (c, PO) = (d, b).$$

Das Dreieck PQD ist also das Spiegelbild von PBD in bezug auf d, und daher sind d und OD Spiegelungsachsen der Geraden BA und CD. Hieraus geht ferner hervor, daß die Dreiecke ORD und OAD durch Spiegelung an OD ineinander übergehen. Es ist also:

$$(OD, OA) \doteq (OR, OD) = (OC, OP),$$

und daher:

$$(OP, OD) + (OD, OA) = (OC, OP) + (OP, OD),$$

also:

$$(OP, OA) = (OC, OD).$$

Auf Grund dieser Gleichung muß die Gerade OC durch die erwähnte Halbdrehung in OD verwandelt werden, und da ferner d bei der Halbdrehung in eine Gerade durch D übergeht, so geht der absolute Pol von c als Schnittpunkt der Geraden OC und d in D über. Der Beweis ist hiermit vollendet.

§ 6.

Beweis des Pascalschen Satzes.

A. Der singuläre Fall.

Um die Begründung der Geometrie im singulären Falle zu vollziehen, wird es genügen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 31. *Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S, und liegen zwei von den drei Schnittpunkten der Gegenseitenpaare auf der ausgezeichneten Geraden, dann muß auch der dritte Schnittpunkt auf dieser Geraden liegen.*

Der Satz ist schon (Satz 22) für den speziellen Fall bewiesen, daß alle Ecken wie auch der Punkt S eigentlich sind; der allgemeine Fall kann aber durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt auf den speziellen Fall zurückgeführt werden. In der Tat kann, da keine der Ecken auf der ausgezeichneten Geraden liegt, durch die Aufeinanderfolge von geeigneten Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt erzielt werden, daß alle Ecken in eigentliche Punkte übergehen, während der Punkt S entweder nach einem eigentlichen Punkt geführt wird oder auf der ausgezeichneten Geraden liegt. Tritt ersterer Fall ein, so ist der Satz mithin bewiesen, und für den letzteren Fall kann man dann leicht den Beweis indirekt führen; doch kann man auch für letzteren Fall einen direkten Beweis geben, indem die ganze Figur in sich selbst übergeht durch eine Umwendung um den gemeinsamen Mittelpunkt der beiden „Parallelogramme", welche von den beiden Gegenseitenpaaren des Sechsecks und demjenigen Geradenpaare, welchem das Sechseck einbeschrieben ist, begrenzt werden.

Da nun in unserer Geometrie die ausgezeichnete Gerade die Rolle der unendlich fernen Geraden in der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie spielt, können wir nach Hessenberg*) die Begründung der Geometrie im singulären Fall als erledigt betrachten.

B. Der ordinäre Fall.

In diesem Falle beweisen wir den allgemeinen Pascalschen Satz über das einem Geradenpaare eingeschriebene Sechseck:

Satz 32. *Hat ein Sechseck seine Ecken abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden.*

Durch die Aufeinanderfolge geeigneter Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt können wir eine derartige Verwandlung der Figur erzielen, daß unter den zu betrachtenden neun Punkten jedenfalls keine anderen uneigentlichen Punkte vorhanden sind als solche, die auf der ausgezeichneten Geraden liegen; unter den Verbindungsgeraden der neun Punkte findet man alsdann höchstens *eine* uneigentliche Gerade, nämlich die ausgezeichnete.

Durch kongruente Verschiebung der in dieser Weise erhaltenen Figur kann man ferner erreichen, daß die zurückgebliebenen uneigentlichen Punkte nach Punkten außerhalb der ausgezeichneten Geraden geführt werden; da durch diese Verschiebung die ausgezeichnete Gerade in die absolute Polare eines eigentlichen Punktes übergeht, also nach Satz 30 in eine uneigent-

*) G. Hessenberg, Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, diese Ann., Bd. 61, S. 165, sowie Desarguesscher Satz und Zentralkollineation, Arch. d. Math. u. Phys., III. Reihe, Bd. 6.

liche Gerade, und da ferner die eigentlichen Punkte und Geraden in ebensolche übergehen, so wird es genügen, unseren Satz für die nach der Verschiebung erhaltene Figur zu beweisen.

Schließlich kann nun diese Figur wiederum durch Halbdrehungen um den Fundamentalpunkt derart verwandelt werden, daß sämtliche neun Punkte und deren Verbindungsgeraden in lauter eigentliche Elemente übergehen, und da der Pascalsche Satz für die solchergestalt verwandelte Figur Geltung hat (Satz 23), so muß er auch für die ursprüngliche Figur gelten.

Nach Hessenberg*) ist die Begründung der ebenen Geometrie hiermit vollendet. Ferner zeigen die Entwicklungen von F. Schur**), wie man zur analytischen Geometrie gelangt.

§ 7.

Über die Winkelsumme des Dreiecks.

Im singulären Fall ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks gleich zwei Rechten. Die ausgezeichnete Gerade ist die absolute Polare aller eigentlichen Punkte. Wenn keine uneigentlichen Punkte außerhalb dieser Geraden existieren, so ist die Geometrie die gewöhnliche Euklidische. Wenn es aber andere uneigentliche Punkte gibt, so können die Begriffe der Anordnung und Kongruenz dahin erweitert werden, daß sämtliche ebenen Axiome für alle eigentlichen und uneigentlichen Elemente, mit Ausschluß der ausgezeichneten Geraden, erfüllt werden. Indem man unter parallelen Geraden solche Geraden versteht, deren Schnittpunkt auf der ausgezeichneten Geraden liegt, wird alsdann auch das Parallelenaxiom erfüllt. Die somit erzielte Geometrie ist also die Euklidische.

Es gibt also wohl, wie M. Dehn bewiesen hat***), eine „semi-Euklidische Geometrie", aber jede solche Geometrie geht, wie sich eben mit Hilfe der von Dehn benutzten Pseudogeometrie schließen läßt, durch geeignete Hinzufügung uneigentlicher Elemente in die gewöhnliche Euklidische Geometrie über.

Im ordinären Falle ist jeder eigentlichen Geraden und jedem eigentlichen Punkt ein absoluter Pol bzw. eine absolute Polare ein-eindeutig zugeordnet. Auf projektivem Wege kann diese Beziehung zu einer vollständigen Polarität erweitert werden, und auf jeder Geraden erhalten wir

*) G. Hessenberg, Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, diese Annalen Bd. 61, S. 161.

**) F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie, diese Annalen, Bd. 55, S. 281 ff.

***) M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme des Dreiecks, diese Annalen, Bd. 53, S. 436.

dann in bezug auf diese Polarität eine absolute Involution von konjugierten Punkten.*) Wie man den Begriff des „Trennens“ einführen kann, setzen wir als bekannt voraus.

Mit Hilfe einer kongruenten Verschiebung ergibt sich sogleich der Satz:

Wenn auf irgend einer eigentlichen Geraden die absolute Involution $\left\{\begin{matrix}\text{gleichsinnig}\\ \text{ungleichsinnig}\end{matrix}\right\}$ ist, so ist die absolute Involution einer jeden eigentlichen Geraden bzw. $\left\{\begin{matrix}\text{gleichsinnig}\\ \text{ungleichsinnig}\end{matrix}\right\}$.

Ferner haben wir den Satz:

Ist in irgend einem Vierecke mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel stumpf resp. spitz, so ist in jedem Vierecke mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel stumpf resp. spitz.

Hat nämlich das Viereck $ABCD$ bei B, C, D rechte Winkel, und errichtet man in A das Lot a auf AB, so schneiden die Geradenpaare a, AB und AC, AD zwei Punktepaare auf BC aus, welche der absoluten Involution von BC angehören. Je nachdem diese Involution gleichsinnig oder ungleichsinnig ist, müssen die Geradenpaare a, AB und AC, AD sich trennen oder nicht trennen, und hiermit ist der Satz bewiesen.**)

Bekanntlich kann nun folgender Satz leicht bewiesen werden:

Wenn in irgend einem Dreiecke die Winkelsumme größer resp. kleiner als zwei rechte Winkel ist, so ist sie in jedem Dreiecke größer resp. kleiner als zwei rechte Winkel.***)

Wenn nun die Winkelsumme des Dreiecks größer als zwei rechte Winkel ist, so soll unsere Geometrie die elliptische Geometrie genannt werden. Die absolute Polarität ist in diesem Falle eine gleichförmige Polarität; und wenn wir den ursprünglichen Begriff der Bewegung derart erweitern, daß jede Kollineation, durch welche die absolute Polarität nicht gestört wird, eine Bewegung heißen soll, so läßt sich leicht nachweisen, daß die gewöhnlichen Axiome der vollständigen elliptischen Geometrie für die Gesamtheit unserer eigentlichen und uneigentlichen Elemente Geltung haben.

Wenn die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als zwei rechte Winkel ist, so soll unsere Geometrie die hyperbolische Geometrie genannt werden.

---

*) Vgl. F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie, diese Annalen, Bd. 55, S. 286.

**) Vgl. M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig 1882), S. 163; K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie (Leipzig 1905), S. 261, bemerkt, daß der Satz schon von Lambert (Vgl. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien (Leipzig 1895), S. 186) ohne Benutzung der Stetigkeit bewiesen worden ist. Der Beweis bei Vahlen, a. a. O. S. 258, ist im wesentlichen eine Wiedergabe des Lambertschen Beweises.

***) Andere Beweise bei Dehn, a. a. O., S. 429 und Schur, a. a. O., S. 291.

Die absolute Polarität ist in diesem Falle eine ungleichförmige Polarität. Nehmen wir an, daß der Kreis jede Gerade schneidet, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner ist als der Radius, so existiert für die absolute Polarität eine Ordnungskurve, durch welche die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Punkte in zwei Bereiche geteilt wird, und derjenige dieser Bereiche, welcher die eigentlichen Punkte enthält, wird dann eine Lobatscheffskysche Ebene ausmachen.

Wir haben also die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Die Winkelsumme des Dreiecks ist gleich zwei rechten Winkeln. Die Geometrie ist, entweder unmittelbar oder nach Einführung uneigentlicher Elemente, die Euklidische Geometrie.

2. Die Winkelsumme des Dreiecks ist größer als zwei rechte Winkel. Die Geometrie soll die elliptische Geometrie genannt werden. Nach Einführung uneigentlicher Elemente erhält man die vollständige elliptische Geometrie.*)

3. Die Winkelsumme des Dreiecks ist kleiner als zwei rechte Winkel. Die Geometrie soll die hyperbolische genannt werden. Auf Grund des Axioms über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden und nach geeigneter Einführung von uneigentlichen Elementen erhält man die Lobatscheffskysche Geometrie.

§ 8.

Über die Axiome der Anordnung.

Bei der vorstehenden Begründung der Geometrie haben wir (mit Ausnahme des § 7) die Axiome der Anordnung tatsächlich nur wenig benutzt; hätten wir von diesen Axiomen unbeschränkten Gebrauch gemacht, so hätte manches leichter ausgeführt werden können; es war aber unser Ziel, durch die von uns gewählte Darstellung hervortreten zu lassen, daß die erwähnten Axiome und die durch sie definierten Begriffe, wenn nicht ganz entbehrlich, so doch für unseren Zweck nur von sehr geringer Bedeutung sind. Nur bei den Beweisen der Sätze 11 und 19 haben wir von den Anordnungsaxiomen expliziten Gebrauch gemacht; aber auch an diesen Stellen könnten wir die Begriffe der Anordnung entbehren, wenn nur die folgende Tatsache uns zur Verfügung steht: Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks liegen nicht auf einer Geraden.

Unsere Begründung der ebenen Geometrie könnte alsdann auf Grund der folgenden Axiome durchgeführt werden:

---

*) Wir heben hervor, daß nach unserer Auffassung gerade der hier eingeschlagene Weg der natürliche ist, um die vollständige elliptische Geometrie aufzubauen. Vgl. hier die Bemerkung von Schur, Math. Annalen Bd. 55, S. 267 u. 274.

1. *Durch je zwei Punkte geht eine und nur eine Gerade.*

Das System von zwei Punkten A und B nennen wir eine Strecke (AB oder BA).

2. *Zwei Strecken, die einer dritten Strecke kongruent sind, sind untereinander kongruent.*

3. *Ist A ein gegebener Punkt einer gegebenen Geraden, so kann man auf dieser Geraden zwei und nur zwei Punkte B so bestimmen, daß die Strecke AB einer gegebenen Strecke kongruent wird.*

Jede Beziehung, durch welche jeder Geraden und jedem Punkte in ihr eine Gerade und ein Punkt in ihr eindeutig so zugeordnet ist, daß die in dieser Weise einander entsprechenden Strecken kongruent sind, soll eine Bewegung heißen.

4. *Es gibt außer der Identität eine und nur eine Bewegung, bei welcher alle Punkte einer gegebenen Geraden a fest bleiben. Bei dieser Bewegung wird kein außerhalb a gelegener Punkt fest bleiben.*

Jede solche Bewegung heißt eine Spiegelung.

Das Aufeinandersenkrechtstehen läßt sich nun leicht definieren.

5. *Es gibt eine Bewegung, bei welcher ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck in sich selbst übergeht, so daß die Spitze fest bleibt, und die beiden Schenkel vertauscht werden.*

6. *Jede Strecke hat einen und nur einen Mittelpunkt.*

7. *Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks liegen nicht auf einer Geraden.*

Die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome 1—7 mag vorläufig dahingestellt bleiben.

Ob die Axiome der Anordnung tatsächlich von den Axiomen 1—7 unabhängig sind, wird wesentlich davon abhängen, ob es möglich ist, ein komplexes Zahlensystem im Sinne Hilberts*) zu definieren, für welches die folgenden Sätze gelten:

A. *Die Sätze der Verknüpfung sind sämtlich befriedigt.*

B. *Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung.*

C. *Die Sätze der Anordnung können nicht befriedigt werden.*

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man unschwer sich davon überzeugt, daß das Hinzufügen eines weiteren Axioms, auf Grund dessen man die Begriffe „größer“ und „kleiner“ definieren kann, genügen wird, um die Axiome der Anordnung zu beweisen.

Dieses Axiom läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

8. *Wenn zwei Strecken nicht kongruent sind, so existiert immer ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse einer der Strecken, die eine Kathete aber der anderen Strecke kongruent ist.***)

*) Hilbert: Grundlagen der Geometrie 1899 (S. 26).

**) Vgl. Peano, Torino Atti 38. Bd. S. 10.

Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen.*)

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Vorwort.

Das kommutative Gesetz gilt für die Addition und Multiplikation der Cantorschen transfiniten Ordnungszahlen im allgemeinen nicht. Demgemäß stellen die Gleichungen

(1) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha^{**}),$$

(2) $$\alpha\beta = \beta\alpha$$

beschränkende Beziehungen zwischen α und β dar.

Denkt man sich α gegeben, so genügen auf Grund des assoziativen Gesetzes der Addition die endlichen Vielfachen von α der Gleichung (1), d. h. alle Zahlen der Form $\beta = \alpha n$, wo $n < \omega$ ist.

Wir zeigen in § 1, daß alle mit α additiv vertauschbaren Zahlen die Gestalt $\beta = \bar{\alpha} b$ haben, wo $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α additiv vertauschbare Zahl (> 0) bedeutet und $b < \omega$ ist. Daraus folgt dann, daß *alle mit α vertauschbaren Zahlen untereinander vertauschbar sind*, und es zeigt sich weiter, daß (1) denselben Inhalt hat wie die Gleichung

(1a) $$\alpha b' = \beta a', \qquad (a', b' < \omega).$$

Die Gleichungen (1) und (1a) folgen auseinander.

*) Man vergl. mit den folgenden Untersuchungen die Resultate, die Herr G. Cantor in seiner Arbeit: Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, II, Bd. 49 dieser Zeitschrift, pag. 239 ff. abgeleitet hat. — Dabei möchte ich bemerken, daß sich in der Encykl. der math. Wissenschaften, Bd. I, 1, pag. 194, Anm. 40 ein Fehler findet. Herr G. Cantor gibt nämlich l. c. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gleichung $\alpha\beta = \beta\alpha$ *nur* unter der Voraussetzung, daß die Zahlen der zweiten Zahlklasse α und β von der *ersten Art*, d. h. keine Limeszahlen sind. Die Cantorschen Bedingungen sind ja, wie die folgenden Untersuchungen zeigen, in der Tat nur für diesen Fall richtig.

**) Transfinite Zahlen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben, endliche Zahlen mit kleiner lateinischer Schrift.

In § 2 und § 3 behandeln wir die Gleichung (2). Ganz analog weisen wir hier nach, *daß alle mit α multiplikativ vertauschbaren Zahlen untereinander vertauschbar sind*, und daß (2) gleichwertig ist mit der Gleichung

$$\alpha^{b_1} = \beta^{a_1} \qquad (a_1, b_1 < \omega). \tag{2a}$$

So weit entsprechen diese Resultate denen aus § 1. Aber es besteht ein Unterschied: die mit α multiplikativ vertauschbaren Zahlen β sind nicht immer endliche Potenzen der kleinsten mit α vertauschbaren Zahl; nämlich dann nicht immer, wenn α eine Limeszahl ist. Doch auch in diesem Fall lassen sich alle Zahlen β in einfacher Weise darstellen.

In § 4 wird uns schließlich die Gleichung

$$\alpha^\beta = \beta^\alpha \tag{3}$$

beschäftigen. Für $\beta = \alpha$ gibt es bekanntlich im Gebiet der endlichen ganzen Zahlen nur eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar 2, 4. Ganz anders aber liegen, wie wir zeigen werden, die Verhältnisse im Bereich der transfiniten Zahlen.

§ 1.*)

Sei uns α gegeben und es erfülle β die Gleichung

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.^{**}) \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$\alpha + \beta > \beta, \quad \beta + \alpha > \alpha, \tag{2}$$

und hieraus ergibt sich, daß α und β beide endlich oder beide transfinit sind. Wir nehmen daher — der erste Fall, in dem α und β endlich sind, interessiert uns ja hier nicht — an

$$\alpha \geqq \omega. \tag{3}$$

Satz I. *Sind β und γ mit α vertauschbar, so gilt von $\beta + \gamma$ gleiches.*

Beweis. Außer (1) besteht noch die Gleichung $\gamma + \alpha = \alpha + \gamma$. Addiert man hier auf beiden Seiten β, so folgt unter Benutzung von (1)

$$(\beta + \gamma) + \alpha = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Satz II (Umkehrung von I). *Sind $\gamma + \beta$ und γ mit α vertauschbar, dann ist auch $\beta + \alpha = \alpha + \beta$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$(\gamma + \beta) + \alpha = \alpha + (\gamma + \beta) \tag{a}$$

$$\gamma + \alpha = \alpha + \gamma. \tag{b}$$

*) Für die folgenden Untersuchungen setzen wir den mengentheoretischen Kalkul als bekannt voraus. Man findet eine sehr übersichtliche Darstellung desselben in der Abhandlung von Herrn G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandl. der Friesschen Schule, I. Band 4. Heft (als Sonderdruck erschienen).

**) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ wird als trivial ausgeschlossen.

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Gleichung (a) auf Grund von (b) $\alpha + \gamma$ durch $\gamma + \alpha$ und erhalten so

$$(c) \quad \gamma + (\beta + \alpha) = \gamma + (\alpha + \beta).$$

Hieraus folgt aber, wie der mengentheoretische Kalkul lehrt,

$$(d) \qquad \beta + \alpha = \alpha + \beta.$$

Satz III. *Ist β eine nicht unterhalb α liegende und mit α vertauschbare Zahl, dann ist*

$$(4) \qquad \beta = \alpha b + \varrho \qquad (b < \omega,\ \varrho < \alpha),$$

und es gelten für ϱ die Gleichungen

$$(5) \qquad \varrho + \alpha = \alpha + \varrho,$$

$$(6) \qquad \varrho + \beta = \beta + \varrho.$$

Beweis. Da $\beta \geq \alpha$ ist, so existieren zwei Ordnungszahlen ξ, ϱ derart, daß

$$\beta = \alpha\xi + \varrho^*), \qquad (\xi \leq \beta,\ \varrho < \alpha);$$

es ist also

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + \xi) + \varrho.$$

Wäre nun ξ überendlich, also $1 + \xi = \xi$, dann folgte $\alpha + \beta = \beta$, eine Gleichung, die (2) widerspricht; demnach ist $\xi < \omega$ und als endliche Zahl bezeichnen wir ξ mit b. Da weiter αb und β mit α und mit β vertauschbar sind, so folgt (5) und (6) aus Satz II.

Es bedeute nun $\bar{\alpha}$ die kleinste von Null verschiedene mit α vertauschbare Zahl, dann ist nach Satz III

$$\alpha = \bar{\alpha}a + \varrho', \quad a < \omega, \quad \varrho' < \bar{\alpha}.$$

Da ϱ' nach (6) mit α vertauschbar ist und kleiner als $\bar{\alpha}$ sein soll, so muß $\varrho' = 0$ sein und es gilt

$$(7) \qquad \alpha = \bar{\alpha}a \qquad (a < \omega).$$

$\bar{\alpha}$ ist mit keiner kleineren Zahl vertauschbar, denn mit ihr wäre nach Satz I auch $\bar{\alpha}a = \alpha$ vertauschbar.

Satz IV. *Ist β mit α vertauschbar, dann ist*

$$(8) \qquad \beta = \bar{\alpha}b', \qquad (b' < \omega).$$

Beweis. a) Sei zunächst $\beta < \alpha = \bar{\alpha}a$. Aus dieser Ungleichung folgt, daß sich β in die Form setzen läßt:

$$\beta = \bar{\alpha}b' + \varrho_1 \qquad (\varrho_1 < \bar{\alpha}).$$

Hieraus schließen wir nach Satz II, daß

$$\varrho_1 + \alpha = \alpha + \varrho_1$$

ist, und wegen $\varrho_1 < \bar{\alpha}$ ergibt sich daraus $\varrho_1 = 0$ und somit (8).

*) Satz III läßt sich auch leicht aus Satz II folgern (ohne Benutzung der Gleichung $\beta = \alpha\xi + \varrho$).

b) Sei $\beta \geqq \alpha$, dann gilt (4) und (5); nach Fall a) folgt daher $\varrho = \bar{\alpha} r$, wo $r < \omega$ ist. (4) geht dadurch unter Berücksichtigung von (7) über in

$$\beta = \bar{\alpha} ab + \bar{\alpha} r = \bar{\alpha} b',$$

wo $b' = ab + r'$ gesetzt ist.

Es folgt sofort:

Satz V. *Sind β und γ mit α vertauschbar, dann ist auch β mit γ vertauschbar.*

Der Beweis ergibt sich aus den Gleichungen

$$\beta = \bar{\alpha} b',$$
$$\gamma = \bar{\alpha} c',$$
$$b' + c' = c' + b',$$

und weiterhin folgt

$$\beta c' = \gamma b'. \tag{9}$$

Satz VI. *Seien α, β zwei transfinite Zahlen, zwischen denen die Gleichung*

$$\alpha b'' = \beta a'' \tag{9a}$$

besteht, dann ist β mit α vertauschbar.

Beweis. α ist mit $\alpha b'' = \beta a''$ und $\beta a''$ ist mit β vertauschbar, also nach Satz V α mit β.

Es folgt aus (9a) sehr leicht:

$$\alpha \frac{b''}{d} = \beta \frac{a''}{d}, \tag{10}$$

wenn $d = (a'', b'')$ ist.

§ 2.

Sei uns α gegeben und β erfülle die Gleichung

$$\alpha\beta = \beta\alpha^{*}). \tag{1}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß aus $\alpha < \omega$ auch $\beta < \omega$ folgt. Sei also wieder $\alpha \geqq \omega$. Genau wie in § 1 beweist man auch hier:

Satz I. *Sind β und γ mit α vertauschbar**), so gilt von $\beta\gamma$ gleiches.*

Satz II (Umkehrung von I). *Sind $\gamma\beta$ und γ mit α vertauschbar, dann ist auch*

$$\beta\alpha = \alpha\beta.$$

Bis hierher geht die Untersuchung mit der in § 1 parallel.

---

*) $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ schließen wir als trivial aus.

**) Vertauschbar schiechthin bedeutet im folgenden „multiplikativ vertauschbar".

Jetzt machen wir Gebrauch von der Theorie der *Hauptzahlen.**) Der höchste nicht oberhalb α gelegene Haupttypus sei ω^μ; ω^ν habe für β die gleiche Bedeutung. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} &(2) \quad \alpha = \omega^\mu a + \varrho + r, \quad a, r \prec \omega;\ \varrho \prec \omega^\mu \\ &(3) \quad \beta = \omega^\nu b + \sigma + s, \quad b, s \prec \omega;\ \sigma \prec \omega^\nu \end{aligned}\right\} \varrho, \sigma \text{ sind Limeszahlen.}$$

Wir behandeln in diesem Paragraphen nur den Fall, in dem $r = 0$, also α eine Limeszahl ist.

Sei also $r = 0$, dann ist auch $s = 0$, d. h. β eine Limeszahl. Wäre nämlich $s \succ 0$, dann ist

$$\alpha\beta = \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma + \omega^\mu a s + \varrho,$$
$$\beta\alpha = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Also ist wegen (1)

$$\omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma + \omega^\mu a s + \varrho = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Diese Gleichung stellt einen Widerspruch dar; die linke Seite, in die Cantorsche Normalform gesetzt, würde anders ausfallen als die rechte Seite. Setzen wir also $s = 0$, so wird

$$\alpha\beta = \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma,$$

und (1) geht über in

$$(4) \qquad \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung einer transfiniten Zahl als Summe nicht zunehmender Haupttypen zerfällt (4) in die Gleichungen

$$(5) \qquad \mu + \nu = \nu + \mu,$$
$$(6) \qquad a = b,$$
$$(7) \qquad \omega^\mu \sigma = \omega^\nu \varrho.$$

Auf Grund von § 1 können wir (5) ersetzen durch

$$(5\text{a}) \qquad \mu = \tau m, \qquad n = \tau n,$$

wo τ mit keiner kleineren Zahl additiv vertauschbar ist.**)

---

*) Hauptzahl nennt Herr Hessenberg l. c. S. 578 eine Zahl, die allen ihren (von Null verschiedenen) Resten gleich ist. Diese Zahlen sind identisch mit den Potenzen von ω und werden von Herrn Hessenberg direkt zur Definition dieser und der Potenzen beliebiger Zahlen benutzt. Die Hauptzahlen sind *additive* Primzahlen; daher ist die Cantorsche Normaldarstellung transfiniter Ordnungszahlen das additive Analogon der multiplikativen Darstellung endlicher Zahlen durch Primzahlen. Dagegen ist die Produktformel, die Herr G. Cantor l. c. für die transfiniten Ordungszahlen aufgestellt hat, nicht von der gleichen Bedeutung; denn die dabei auftretenden multiplikativ irreduzibelen Zahlen haben nur in gewissen Fällen Primzahlcharakter. — Mit Benutzung der Hauptzahlen kommt man in § 1 schneller zum Ziel; wir wollten aber in § 1 absichtlich die Untersuchung mit möglichst wenig Hilfsmitteln führen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die in § 1 eingeführte Zahl $\bar{\alpha}$ die Form hat $\bar{\alpha} = \omega^{\mu'} + \varrho$, wo $\varrho \prec \omega^{\mu'}$ ist. Alle mit α additiv vertauschbaren Zahlen haben die Gestalt $\beta = \omega^{\mu'} b' + \varrho$ $(b' = 1, 2, \cdots)$.

**) τ ist durch μ, also durch α eindeutig bestimmt; ist μ endlich, dann ist $\tau = 1$.

Ist $\mu = \nu$, so folgt aus (7)

$$\varrho = \sigma, \qquad \alpha = \beta.$$

Sei also $\mu > \nu$, d. h. $m > n$ und demnach $\alpha > \beta$. Aus (7) ergibt sich dann

(8) $$\varrho = \omega^{\tau(m-n)}\sigma,$$

(9) $$\begin{aligned}\alpha &= \omega^{\tau m}a + \varrho = \omega^{\tau m}a + \omega^{\tau(m-n)}\sigma \\ &= \omega^{\tau(m-n)}(\omega^{\tau n}a + \sigma) \\ &= \omega^{\tau(m-n)}\beta.\end{aligned}$$

Stellen wir das bisherige zusammen: jede mit $\alpha = \omega^{\tau m}a + \varrho$ vertauschbare Zahl β hat die Gestalt $\beta = \omega^{\tau n}a + \sigma$, wobei σ sich aus der Gleichung

$$\omega^{\tau m}\sigma = \omega^{\tau n}\varrho$$

bestimmt; und es ist, falls $\alpha \geqq \beta$ ist,

$$\alpha = \omega^{\tau(m-n)}\beta.$$

Alle Zahlen β der angegebenen Gestalt sind aber auch mit α vertauschbar.

Sei nun $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α (multiplikativ) vertauschbare Zahl, dann folgt für $\beta = \bar{\alpha}$, da ja $\alpha \geqq \bar{\alpha}$ ist,

(10) $$\alpha = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha}, \qquad 0 \leqq a' < \omega.$$

Satz III. *Jede mit α vertauschbare Zahl γ hat die Gestalt*

(11) $$\gamma = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}, \qquad 0 \leqq c' < \omega.$$

Beweis. a) Wenn $\gamma \geqq \alpha$ ist, dann ist nach (9) und (10)

$$\gamma = \omega^{\tau c}\alpha, \qquad \alpha = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha},$$

also

(11) $$\gamma = \omega^{\tau(c+a')}\bar{\alpha} = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}.$$

b) Sei $\alpha > \gamma \geqq \bar{\alpha}$, dann ist nach (9) und (10)

$$\alpha = \omega^{\tau c''}\gamma = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha}.$$

Wegen $\gamma \geqq \bar{\alpha}$ folgt hieraus $c'' \leqq a'$ und demnach

(11) $$\gamma = \omega^{\tau(a'-c'')}\bar{\alpha} = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}.$$

Satz IV. *Jede mit α vertauschbare Zahl γ ist auch mit $\bar{\alpha}$ vertauschbar.*

Beweis. Nach dem, was oben über die Gestalt jeder mit α vertauschbaren Zahl bemerkt wurde, besteht für $\bar{\alpha}$ die Gleichung:

(12) $$\bar{\alpha} = \omega^{\tau a}a + \bar{\varrho}.$$

Aus (11) und (12) folgt für jede mit α vertauschbare Zahl γ

(13) $$\gamma = \omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho}.$$

Man bilde aus (12) und (13) $\gamma\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}\gamma$:

$$\begin{cases} \gamma\bar{\alpha} = \omega^{\tau(c'+2\bar{a})}a + \omega^{\tau(c'+a)}\bar{\varrho}, \\ \bar{\alpha}\gamma = \omega^{\tau(c'+2\bar{a})}a + \omega^{\tau(c'+\bar{a})}\bar{\varrho} = \gamma\bar{\alpha}. \end{cases}$$

Satz V. *Sind β und γ mit α vertauschbar, so ist auch β mit γ vertauschbar.**)*

Beweis. Nach Satz III ist

$$\gamma = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}, \qquad \beta = \omega^{\tau b'}\bar{\alpha},$$

also

$$\gamma\beta = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}\beta = \omega^{\tau c'}\beta\bar{\alpha} \quad \text{(Satz IV)}$$
$$= \omega^{\tau(c'+b')}\bar{\alpha}^2.$$

Genau ebenso folgt

$$\beta\gamma = \omega^{\tau(b'+c')}\bar{\alpha}^2$$

und hieraus

$$\beta\gamma = \gamma\beta. \tag{14}$$

Aus Satz V schließen wir, daß $\bar{\alpha}$ mit keiner kleineren Zahl vertauschbar ist.

Wann sind alle mit α vertauschbaren Zahlen $\omega^{\tau c'}\bar{\alpha}$ endliche Potenzen einer und derselben Zahl δ? Da auch $\bar{\alpha}$ eine Potenz dieser Zahl δ sein müßte, also mit δ vertauschbar wäre, so muß wegen der vorhergehenden Bemerkung diese Zahl gleich $\bar{\alpha}$ sein. Unsere Frage lautet also: wann haben alle Zahlen $\omega^{\tau c'}\bar{\alpha}$ $(c' = 0, 1, 2, \cdots)$ die Gestalt $\bar{\alpha}^e$ $(1 < e < \omega)$? Die Gleichung

$$\omega^{\tau c'}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^e \tag{15}$$

geht wegen (12) über in

$$\omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho} = \omega^{\tau\bar{a}e}a + \omega^{\tau(e\bar{a}-1)}\bar{\varrho}. \tag{16}$$

Gleichung (16), also auch (15), ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$c' = \bar{a}(e-1) \tag{17}$$

ist, d. h. wenn jedes ganzzahlige c' durch $\bar{a}$ teilbar ist. Also muß

$$\bar{a} = 1, \qquad c' = e - 1$$

sein. Die Gleichung (15) lautet jetzt

$$\omega^{\tau c'}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{c'+1}. \tag{15a}$$

Wir erhalten so

Satz VI. *Alle mit α vertauschbaren Zahlen sind dann und nur dann Potenzen der kleinsten mit α vertauschbaren Zahl $\bar{\alpha}$, wenn $\bar{\alpha}$ die Gestalt hat*

$$\bar{\alpha} = \omega^{\tau}a + \bar{\varrho}, \tag{18}$$

*wo τ mit keiner kleineren Zahl additiv vertauschbar und $\bar{\varrho}$ eine unterhalb ω^{τ} gelegene Limeszahl ist.***)*

---

*) Dieser Satz läßt sich leicht direkt aus den Gleichungen (5a), (6) und (7) herleiten; es ist nur ϱ aus zwei Gleichungen der Form (7) zu eliminieren. Aus V folgt dann IV und III. Wir haben unsere etwas längere Darstellung gewählt, um die analoge, aber schwierigere Untersuchung in § 3 dem Verständnis näher zu bringen.

**) Dafür daß $\bar{\alpha}$ diese Form hat, ist notwendig und hinreichend die Bedingung $\mu^t > \tau(m-1)$, wenn ω^{μ} das niederste Glied in der Cantorschen Normaldarstellung von α ist. — Ist $m > 1$ und $\mu_t < \tau$, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}$; für $m = 1$ ist stets $\alpha = \bar{\alpha}$.

§ 3.*)

Nachdem wir nun die Gleichung (1) in § 2 unter der Voraussetzung behandelt haben, daß α eine Limeszahl ist, setzen wir jetzt voraus: *α ist keine Limeszahl.* Dann folgt, daß auch β keine ist. Zu den Gleichungen (2) und (3) des vorigen Paragraphen kommen also noch die Bedingungen

$$r, s > 0.$$

(1) geht jetzt über in

(19) $$\omega^{\mu+\nu}b + \omega^{\mu}(\sigma+as) + \varrho + r = \omega^{\nu+\mu}a + \omega^{\nu}(\varrho+br) + \sigma + s.$$

und diese Gleichung zerfällt in

(5a) $$\mu = \tau m, \qquad \nu = \tau n,$$

(6) $$a = b,$$

(20) $$r = s,$$

(21) $$\omega^{\tau m}(\sigma+ar) + \varrho = \omega^{\tau n}(\varrho+ar) + \sigma.$$

Also sind alle mit $\alpha = \omega^{\tau m}a + \varrho + r$ vertauschbaren Zahlen von der Gestalt $\beta = \omega^{\tau n}a + \sigma + r$; σ bestimmt sich aus (21). Wählt man umgekehrt n und σ so, daß (21) erfüllt ist, dann ist das dadurch definierte β mit α vertauschbar.

Aus (21) folgt wegen der Eindeutigkeit der Cantorschen Normaldarstellung einer transfiniten Zahl: ist $m = n$, so ist $\varrho = \sigma$, also $\alpha = \beta$; ist aber $m > n$, also $\alpha > \beta$, dann ist $\varrho > \sigma$. Oder anders gefaßt: aus $\alpha > \beta$ folgt $m > n$ und $\varrho > \sigma$.

Satz VII. *Sei $\alpha > \beta$, dann existiert eine Zahl β', so daß*

(22) $$\alpha = \beta\beta' = \beta'\beta$$

ist, und auch β' ist mit α vertauschbar.

Beweis. Wir denken uns in (21) die rechte und die linke Seite in die Normalform gesetzt und vergleichen auf beiden Seiten die Glieder, die größer sind als $\omega^{\tau n}$. Da $m > n$ ist, so ergibt sich bei dieser Vergleichung

(23) $$\omega^{\tau n}\varrho \geqq \omega^{\tau m}(\sigma+ar),$$

(23a) $$\varrho \geqq \omega^{\tau(m-n)}(\sigma+ar).$$

Also definiert uns

(24) $$\varrho = \omega^{\tau(m-n)}(\sigma+ar) + \sigma'$$

in eindeutiger Weise σ'. Diesen Ausdruck für ϱ führe man in die rechte Seite von (21) ein, dann folgt

$$\omega^{\tau m}(\sigma+ar) + \varrho = \omega^{\tau m}(\sigma+ar) + \omega^{\tau n}(\sigma'+ar) + \sigma,$$

oder

(25) $$\varrho = \omega^{\tau n}(\sigma'+ar) + \sigma.$$**)

*) Die Sätze I und II gelten auch für diesen Paragraphen, da ihre Ableitung sich nicht darauf stützte, daß α eine Limeszahl ist.

**) Gleichung (25) kann man direkt erhalten, wenn man in Gleichung (21) beiderseits die Glieder vergleicht, die kleiner sind als $\omega^{\tau m}$.

Aus (24) und (25) folgt

$$\omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma = \omega^{\tau(m-n)}(\sigma + ar) + \sigma'. \tag{26}$$

Aus der Definition von σ' ergibt sich, daß σ' eine Limeszahl ist, und aus (25) schließen wir

$$\omega^{\tau n}\sigma' < \varrho$$

und wegen $\varrho < \omega^{\tau m}$

$$\omega^{\tau n}\sigma' < \omega^{\tau m},$$

also ergibt sich

$$\sigma' < \omega^{\tau(m-n)}. \tag{27}$$

Wir setzen nun definierend

$$\beta' = \omega^{\tau(m-n)}a + \sigma' + r. \tag{28}$$

Dann ist $\omega^{\tau(m-n)}$ wegen (27) der größte nicht oberhalb β' gelegene Haupttypus und wegen (25) wird

$$\begin{aligned}\beta\beta' &= \omega^{\tau m}a + \omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma + r \\ &= \omega^{\tau m}a + \varrho + r = \alpha,\end{aligned}$$

während (26) besagt, daß

$$\beta\beta' = \beta'\beta^{*})$$

ist, denn (26) hat dieselbe Gestalt wie (21) und diese letztere besagte ja $\alpha\beta = \beta\alpha$. Damit ist (22) bewiesen und aus Satz II folgt sofort, daß auch β' mit α vertauschbar ist. Wir bemerken noch die Beziehung

$$\alpha > \beta'. \tag{29}$$

Satz VIII. *Sei $\alpha > \beta > \delta$ und seien β, δ mit α vertauschbar, dann ist*

$$\beta = \delta\beta_1, \tag{30}$$

$$\beta_1 < \beta, \tag{31}$$

und es ist (nach Satz II) β_1 mit α vertauschbar.

Beweis. Sei

$$\text{(a)} \quad \beta = \omega^{\tau n}a + \sigma + r,$$

$$\text{(b)} \quad \delta = \omega^{\tau p}a + \psi + r.$$

Daß δ mit α vertauschbar ist, drückt sich aus durch die Gleichung

$$\omega^{\tau m}(\psi + ar) + \varrho = \omega^{\tau p}(\varrho + ar) + \psi. \tag{21a}$$

Diese Gleichung halten wir mit (21) zusammen; wäre $n = p$, so folgte aus beiden $\sigma = \psi$, also $\beta = \delta$ gegen Annahme. Also ist $n > p$. Man bestimme nach Satz VII zu β die Zahl $\beta' = \omega^{\tau(m-n)}a + \sigma' + r$, für die $\alpha = \beta\beta' = \beta'\beta$ ist, und setze dann definierend

$$\beta_1' = \beta'\delta = \omega^{\tau(m-n+p)}a + \omega^{\tau(m-n)}(\psi + ar) + \sigma' + r. \tag{32}$$

Aus $n > p$ folgt

$$m - n + p < m; \tag{33}$$

*) Das folgt auch direkt aus § 2, Satz II.

somit ist $\beta_1' < \alpha$, und da nach (32) und Satz I β_1' mit α vertauschbar ist, so existiert nach Satz VII zu β_1' eine Zahl $(\beta_1')' = \beta_1$, so daß

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta_1'\beta_1 \\ &= \beta'\delta\beta_1 = \beta'\beta\end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt (30) durch Division mit β'. Ferner folgt aus (32)

$$(\beta_1')' = \beta_1 = \omega^{\tau(n-p)}a + \cdots < \beta. \tag{34}$$

Aus Satz VII und VIII folgern wir nunmehr

Satz IX. *Bedeutet $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α vertauschbare Zahl, dann ist jede mit α vertauschbare Zahl eine Potenz von $\bar{\alpha}$ (mit endlichem Exponenten).*

Beweis. Zunächst beweisen wir den Satz für α selbst. Wenn $\alpha = \bar{\alpha}$ ist, dann haben wir nichts zu beweisen nötig. Sei also $\alpha > \bar{\alpha}$; dann existiert nach Satz VII $\bar{\alpha}' = \alpha_1$, so daß

$$\alpha = \bar{\alpha}\alpha_1 = \alpha_1\bar{\alpha}; \quad \alpha_1\alpha = \alpha\alpha_1; \quad \alpha > \alpha_1$$

ist. Demnach ist $\alpha_1 \geqq \bar{\alpha}$. Gilt das Gleichheitszeichen, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}^2$, die Behauptung wäre bewiesen. Sei also $\alpha_1 > \bar{\alpha}$. Nach Satz VII und II folgt

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}\alpha_2 = \alpha_2\bar{\alpha}; \quad \alpha_2\alpha = \alpha\alpha_2; \quad \alpha_2 \geqq \bar{\alpha}; \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Wenn $\alpha_2 = \bar{\alpha}$, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}^3$; wenn aber $\alpha_2 > \bar{\alpha}$, dann fahren wir so fort. Da $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$ ist, diese Reihe aber abbrechen muß, so folgt, daß es einen endlichen Index e geben muß, für den $\alpha_e = \bar{\alpha}$ ist. Wir erhalten demnach die Gleichungen

$$\begin{cases} \alpha &= \alpha_1\bar{\alpha}, \\ \alpha_1 &= \alpha_2\bar{\alpha}, \\ \alpha_2 &= \alpha_3\bar{\alpha}, \\ \vdots & \\ \alpha_{e-1} &= \alpha_e\bar{\alpha}, \\ \alpha_e &= \bar{\alpha}, \end{cases} \tag{35}$$

und hieraus ergibt sich

$$\alpha = \bar{\alpha}^{e+1}.^{*}) \tag{36}$$

Genau ebenso beweist man nach Satz VII: ist γ mit α vertauschbar und $\gamma \geqq \alpha$, dann ist

$$\gamma = \alpha^c\beta^{**}), \tag{37}$$

wo $\beta < \alpha$ und β mit α vertauschbar ist. Also ist $\beta \geqq \bar{\alpha}$.***)

*) Für $e = 0$ ist $\alpha = \bar{\alpha}$; aus (36) folgt, daß $\bar{\alpha}$ mit keiner kleineren Zahl vertauschbar ist, denn mit ihr wäre auch $\bar{\alpha}^{e+1} = \alpha$ vertauschbar.

**) Es kann hier $\beta = 1$ sein.

***) Falls $\beta > 1$ ist.

Nach demselben Schlußverfahren, durch das man zu (36) gelangte, erhalten wir jetzt durch wiederholte Anwendung von Satz VIII auf die Zahl $\delta = \bar{\alpha}$ die Gleichung

$$\beta = \bar{\alpha}^{f}. \tag{38}$$

Aus (36), (37), (38) folgt für die Zahlen $\gamma \geqq \alpha$

$$\gamma = \bar{\alpha}^{c(e+1)+f}. \tag{39}$$

Damit ist Satz IX bewiesen. Es ergibt sich hieraus sofort, daß Satz V auch in diesem Falle gilt.

Satz X. *Sind β und γ mit α vertauschbar, dann existieren zwei endliche Zahlen b und c, so daß*

$$\beta^{c} = \gamma^{b} \tag{40}$$

ist.

Beweis. a) *α sei eine Limeszahl*; dann ist nach Satz III und Gleichung (13)

$$\beta = \omega^{\tau b'}\bar{\alpha} = \omega^{\tau(b'+\bar{a})}a + \omega^{\tau b'}\bar{\varrho}, \quad \gamma = \omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho}.$$

Da nun

$$\beta^{n} = \omega^{\tau n(b'+\bar{a})-\tau\bar{a}}\,\bar{\alpha} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{41}$$

ist, so ergibt sich sofort

$$\beta^{\frac{c'+\bar{a}}{d}} = \gamma^{\frac{b'+\bar{a}}{d}},$$

wo $d = (c'+\bar{a}, b'+\bar{a})$ der größte gemeinsame Divisor von $c'+\bar{a}$ und $b'+\bar{a}$ ist.

b) *α sei keine Limeszahl*, dann ist nach Satz IX $\beta = \bar{\alpha}^{b'}$, $\gamma = \bar{\alpha}^{c'}$, also

$$\beta^{\frac{c'}{d}} = \gamma^{\frac{b'}{d}} \tag{43}$$

wo $d = (b', c')$ ist. Damit sind in beiden Fällen die Zahlen b und c gefunden.

Satz XI. *Sind α und β zwei transfinite Zahlen, zwischen denen die Gleichung*

$$\alpha^{b_1} = \beta^{a_1} \tag{40a}$$

besteht, dann ist α mit β vertauschbar.

Beweis. α ist mit α^{b_1}, β mit $\beta^{a_1} = \alpha^{b_1}$ vertauschbar, also nach Satz V auch α mit β.

§ 4.

Wir betrachten nun schließlich die Gleichung

$$\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}.^{*}) \tag{1}$$

*) Gleichung (1) ist für endliches α und transfinites β unmöglich, wie sich zeigen läßt; daher setzen wir $\alpha, \beta \geqq \omega$ voraus.

Sei wieder

(2) $$\alpha = \omega^{\mu} a + \varrho + r,$$

(3) $$\beta = \omega^{\nu} b + \sigma + s.$$

Dann ist

(4) $$\alpha^{\beta} = \omega^{\mu(\beta - s)} \alpha^{s} *),$$

(5) $$\beta^{\alpha} = \omega^{\nu(\alpha - r)} \beta^{r}.$$

Ist $r = 0$, dann ist β^{α} ein Haupttypus; ist in diesem Falle $s > 0$, so muß wegen (1) auch α^{β}, also $\alpha^{s} = \omega^{\mu(s-1)}\alpha$, daher auch α ein Haupttypus sein. Somit ist $\alpha = \omega^{\mu}$. Es wird dann $\alpha^{\beta} = \omega^{\mu\beta} = \beta^{\alpha} = \omega^{\nu\alpha}$, also $\mu\beta = \nu\alpha$. Diese Gleichung enthält aber einen Widerspruch; denn $\nu\alpha$ ist ein Haupttypus, $\mu\beta$ aber nicht, da $\mu\beta$ in der Normaldarstellung mehr als ein Glied enthält, also kein Haupttypus ist. Gleichung (1) ist in diesem Fall unmöglich.

Sei $r, s > 0$, dann ist

(6) $$\alpha^{s} = \omega^{\mu s} a + \cdots + r,$$

(7) $$\beta^{r} = \omega^{\nu r} b + \cdots + s.$$

Die Ausdrücke setzen wir in (4) und (5) ein und erhalten dann wegen (1)

(8) $$\omega^{\mu\beta} a + \cdots + \omega^{\mu(\beta - s)} r = \omega^{\nu\alpha} b + \cdots + \omega^{\nu(\alpha - r)} s.$$

Es folgt durch Vergleichung

(9) $$\mu\beta = \nu\alpha,$$

(10) $$\mu(\beta - s) = \nu(\alpha - r),$$

(11) $$r = s.$$

(10) und (11) zusammen ergeben

(10a) $$\mu(\beta - r) = \nu(\alpha - r).$$

Da nun $\mu\beta = \mu(\beta - r) + \mu r$, $\nu\alpha = \nu(\alpha - r) + \nu r$ ist, so folgt aus (9) und (10a)

(12) $$\mu r = \nu r.$$

Hieraus ergibt sich nach § 1, Gl. (10) $\mu = \nu$ und daher wegen (9) $\beta = \alpha$. Der letzte Fall, der nun noch möglich ist, ist $r = s = 0$.

Gleichung (1), (4) und (5) zusammen ergeben $\omega^{\mu\beta} = \omega^{\nu\alpha}$. Also ist

(9) $$\mu\beta = \nu\alpha.$$

Sei ω^{γ} der größte Haupttypus nicht oberhalb μ; ω^{δ} habe für ν die gleiche Bedeutung. Dann ist (9) gleichwertig mit

(13) $$\omega^{\gamma}\beta = \omega^{\delta}\alpha.$$

---

*) Ist ν ein Rest von λ, so bezeichnen wir die kleinste Lösung μ der Gleichung $\lambda = \mu + \nu$ mit $\lambda - \nu$.

Aus $\delta = \gamma$ folgt hiernach $\alpha = \beta$. Diesen Fall schließen wir aus und nehmen an

$$\delta > \gamma, \quad \delta = \gamma + \varepsilon. \tag{14}$$

Durch (14) ist ε eindeutig definiert und (13) geht über in

$$\begin{aligned} \beta = \omega^{\varepsilon}\alpha &= \omega^{\varepsilon+\mu}a + \cdots \\ &= \omega^{\nu}b + \cdots. \end{aligned} \tag{15}$$

Hieraus ergibt sich

$$\nu = \varepsilon + \mu. \tag{16}$$

Da nun $\omega^{\gamma+\varepsilon}$ das höchste Glied in der Cantorschen Normaldarstellung von ν ist, aber der größte nicht oberhalb μ gelegene Haupttypus $\omega^{\gamma} < \omega^{\gamma+\varepsilon}$ ist, so folgt aus (16), daß $\omega^{\gamma+\varepsilon}$ die größte Hauptzahl ist, die nicht oberhalb ε liegt, d. h.

$$\varepsilon \geqq \omega^{\gamma+\varepsilon} \geqq \omega^{\varepsilon} \geqq \varepsilon, \tag{17}$$

$$\varepsilon \geqq \omega^{\gamma+\varepsilon} > \mu \geqq \omega^{\gamma}. \tag{18}$$

Aus (17) folgt, daß $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$ ist. Also ist ε eine ε-Zahl.

Aus (18) folgt

$$\varepsilon = \omega^{\varepsilon} > \omega^{\mu} \tag{19}$$

und daher

$$\varepsilon > \alpha. \tag{20}$$

Die Gleichung (15) schreibt sich jetzt

$$\beta = \varepsilon\alpha. \tag{15a}$$

Sei nun umgekehrt ε eine ε-Zahl oberhalb der Limeszahl α. Setzen wir dann $\beta = \varepsilon\alpha$, dann behaupten wir, daß β die Gleichung (1) erfüllt. Aus $\alpha = \omega^{\mu}a + \cdots < \varepsilon = \omega^{\varepsilon}$ folgt

$$\mu < \varepsilon \tag{18}$$

und daher

$$\mu\varepsilon = \varepsilon. \tag{19}$$

Nun ist $\alpha^{\beta} = \omega^{\mu\beta} = \omega^{\mu\varepsilon\alpha} = \omega^{\varepsilon\alpha}$ (wegen (19)). Weiter ist

$$\beta^{\alpha} = (\varepsilon\alpha)^{\alpha} = (\omega^{\varepsilon+\mu})^{\alpha} = \omega^{(\varepsilon+\mu)\alpha} = \omega^{\varepsilon\alpha} = \alpha^{\beta}.$$

Somit ist (1) erfüllt.*)

Wann gibt es eine Zahl $\beta < \alpha$, für die (1) erfüllt ist? Dann ist

$$\alpha = \varepsilon\beta \quad \text{und} \quad \varepsilon > \beta.$$

Daraus folgt, daß β dann und nur dann vorhanden ist, wenn

$$\alpha = \omega^{\varepsilon+\nu}b + \omega^{\varepsilon+\nu_1}b_1 + \omega^{\varepsilon+\nu_2}b_2 + \cdots, \tag{20}$$

*) Aus $\beta = \varepsilon\alpha$ folgt $\sigma = \varepsilon\varrho$ und, da $\varepsilon > \varrho$ ist, ergibt sich demnach $\varrho^{\sigma} = \sigma^{\varrho}$.

wo

$$\varepsilon = \omega^{\varepsilon} \succ \nu \succ \nu_1 \succ \nu_2 \succ \cdots \tag{21}$$

ist. β ist durch (20) eindeutig bestimmt.

Wir fassen die Resultate zusammen zu folgendem

Satz. *Die Gleichung $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ ist für $\beta \neq \alpha$ nur möglich, wenn α eine Limeszahl ist. Verstehen wir dann unter ε eine beliebige ε-Zahl oberhalb α, so erfüllen alle Zahlen $\beta = \varepsilon\alpha$ unsere Gleichung, und wenn β sie erfüllt und oberhalb α liegt, dann hat β die angegebene Gestalt. (Unter gewissen Voraussetzungen existiert unterhalb α noch ein einziges β, für das $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ ist.)*

Über das Möbiussche Netz.

Von

E. Busche in Hamburg.

Bei der Herstellung eines Möbiusschen Netzes aus vier Grundpunkten zerfällt die Ebene anfänglich nur in endliche und unendlich große Dreiecke und Vierecke, doch kann man z. B. schon mit der elften Linie ein Fünfeck erzielen, dessen Inneres nicht von Netzlinien durchzogen wird. Ich will im folgenden zeigen, wie man ein beliebiges endliches Netz durch eine endliche Zahl von Netzlinien so vervollständigen kann, daß es nur drei- und viereckige Maschen hat.

I.

Wenn auf einer Geraden eine endliche Menge von verschiedenen Punkten, deren Anzahl $\geqq 2$ ist, angenommen wird, so hat ein beliebiger Punkt P der Geraden, der nicht der Menge angehört, bekanntlich zwei Nachbarpunkte, d. h. solche Punkte der Menge, die man, von P ausgehend, nötigenfalls unter Überschreitung des unendlich fernen Punktes erreichen kann, ohne vorher einen andern Punkt der Menge zu treffen. Diesen und den entsprechenden Nachbarbegriff im Strahlenbüschel kann man zwar auf nicht linear geordnete Mengen von Elementen einer Ebene, die nur aus Punkten oder aus Geraden bestehen, nicht übertragen, wohl aber auf Systeme, die aus Punkten und Geraden zugleich gebildet sind. Eine Gerade q des Systems heißt einem Punkt P *benachbart* oder eine *Nachbargerade* von P, wenn man von P aus sich einen Punkt in der Ebene, eventuell unter Überschreitung der unendlich fernen Geraden, so bewegen lassen kann, daß er q trifft, ohne vorher oder bei Erreichung von q mit einem Punkt einer andern Geraden des Systems zusammenzufallen. Die Menge der Punkte P, die hierbei in Betracht gezogen wird, ist nur der Bedingung unterworfen, daß kein auf den Geraden des Systems liegender Punkt zu ihr gehören soll, die Menge der Geraden wird als endlich vorausgesetzt. Gehen mehrere Geraden des Systems durch einen Punkt, so hat

ein Punkt P höchstens zwei von diesen Geraden zu Nachbargeraden. Sind mindestens drei Gerade vorhanden, die nicht durch denselben Punkt gehen, so hat jeder Punkt P wenigstens drei Nachbargeraden.

Dual entsprechend heißt ein Punkt Q eines aus Punkten und Geraden bestehenden ebenen Systems einer Geraden p *benachbart* oder ein *Nachbarpunkt* von p, wenn man von p aus eine Gerade sich in der Ebene so bewegen lassen kann, daß sie Q trifft, ohne vor oder bei Erreichung von Q mit einer Geraden durch einen anderen Systempunkt zusammenzufallen. Jetzt kann p irgend eine Gerade sein, die nicht durch einen Punkt des Systems geht, während die Menge der Punkte als endlich vorausgesetzt wird. Liegen mehrere Punkte des Systems auf derselben Geraden, so hat eine Gerade p höchstens zwei von diesen Punkten zu Nachbarpunkten. Gibt es mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so hat jede Gerade p wenigstens drei Nachbarpunkte.*)

II.

Um die Aufgabe über das Möbiussche Netz zu lösen, beweise ich zunächst, daß es — auch abgesehen von ganz speziellen Fällen, bei denen die geforderte Eigenschaft auf der Hand liegt — Netze mit lauter Dreiecks- und Viereeksmaschen gibt, d. h. solche Netze, bei denen jeder nicht auf einer Netzlinie liegende Punkt nur drei oder vier Netzlinien zu Nachbargeraden hat. Zu diesem Zwecke betrachte ich den folgenden besonderen Fall des dual entsprechenden Satzes.

In einer Ebene mit rechtwinkligem Koordinatensystem bestimmen die Geraden $x=0, x=1, \cdots, x=m-1$ *mit den Geraden* $y=0, y=1, \cdots, y=n-1$, *wo* m *und* n *ganze positive Zahlen sind, ein rechteckiges System von Gitterpunkten. Nimmt man zu diesen Punkten noch die unendlich fernen Punkte* U *auf der* x*-Achse,* V *auf der* y*-Achse und* W *auf der Geraden* $y=x$ *hinzu, so hat jede Gerade* p *der Ebene, die nicht durch einen dieser* $mn+3$ *Punkte geht, drei oder vier von diesen Punkten zu Nachbarpunkten.*

Beweis. Wenn p den Umfang des Gitterpunktrechtecks nicht schneidet, so hat diese Gerade zwei von den unendlich fernen Punkten und denjenigen Eckgitterpunkt zu Nachbarpunkten, den man erreicht, wenn man p parallel mit sich selbst an das Rechteck heranschiebt. Schneidet p z. B. die x-Achse in dem Punkt $x = m' > m-1$ unter einem Winkel $< 45^0$, so sind die Nachbarpunkte von p die Punkte U und W und der

*) Diese Beziehungen sind natürlich, abgesehen von der Benennung, nicht neu. Vergl. z. B. V. Eberhard: Die Grundgebilde der ebenen Geometrie, Band 1, Leipzig 1895.

Punkt mit den Koordinaten $m-1, 0$. Um einen anderen Punkt des Systems zu erreichen, müßte die Gerade p bei ihrer Bewegung vorher oder zugleich durch einen der genannten Punkte gehen, ein weiterer Nachbarpunkt von p ist also nicht vorhanden.

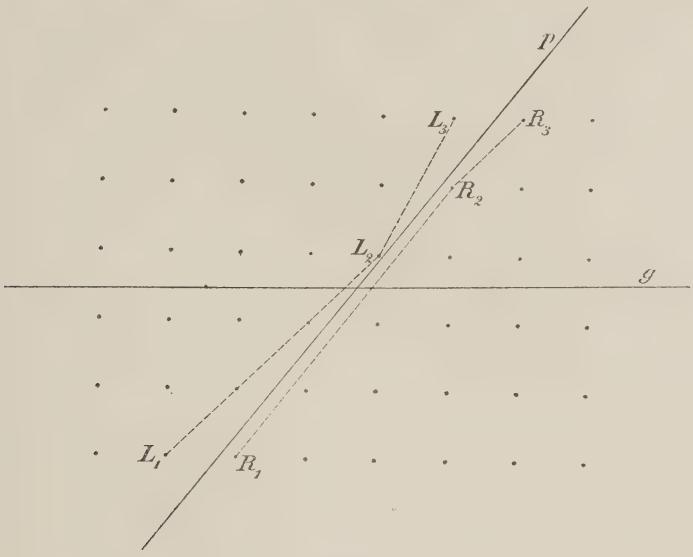


Fig. 1.

Wenn p den Umfang des Rechtecks schneidet, so werde vorläufig von U, V, W ganz abgesehen. Die Gerade verteilt die Gitterpunkte auf einen links und einen rechts von ihr liegenden Haufen. Legt man um diese die konvexen „Umrißpolygone“ H_l und H_r, die alle Punkte je eines Haufens umschließen und deren Eckpunkte Gitterpunkte sind*), so schneidet p eine Seite des Recktecks zwischen zwei Eckpunkten L_1 und R_1, eine andere zwischen zwei Eckpunkten L_λ und R_ϱ der Umrißpolygone. Die Eckpunkte von H_l, die im Innern des Rechtecks liegen, werden mit $L_2, \cdots, L_{\lambda-1}$, die entsprechenden Eckpunkte von H_r mit $R_2, \cdots, R_{\varrho-1}$ bezeichnet. Dann sind die Nachbarpunkte von p unter den Punkten L und R zu suchen.

Nun werde für einen Augenblick eine Gerade als relativ parallel zu p bezeichnet, wenn sie nicht aus einem Umrißpolygon in das andere übertritt. In der Figur (Fig. 1) ist $R_1 R_2$ zu p relativ parallel. Dann kann von den Polygonseiten $L_\mu L_{\mu+1}$ oder $R_r R_{r+1}$ höchstens je *eine* zu p relativ parallel sein. Denn eine solche Seite muß mit der zu einer Achse durch die Mitte des in dem Rechteck liegenden Stückes von p gezogenen Parallelen g einen inneren Punkt gemeinsam haben, da man sonst bei Verlängerung

*) Vergl. F. Klein: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I (lith. Vorlesungsheft. Göttingen 1896), S. 24 und Eberhard a. a. O. S. 35.

der Seite um sich selbst nach g hin entweder auf derselben Seite oder auf der anderen Seite von p einen Gitterpunkt antreffen würde. Das erste würde aber mit der Voraussetzung, daß es sich um eine Polygonseite, das andere mit der Annahme, daß es sich um eine zu p relativ parallele Gerade handelt, im Widerspruch stehen. Wenn nicht gerade eine Polygonseite absolut parallel zu p ist, so gibt es, weil die Polygone konvex sind, immer je einen Eckpunkt von H_l und H_r, der der nächste an p ist. Ist z. B. L_μ dieser Punkt links, so unterscheidet er sich von allen anderen Punkten L dadurch, daß man die Polygonseiten $L_{\mu-1}L_\mu$ und $L_\mu L_{\mu+1}$ beide über L_μ hinaus verlängern muß, um sie mit p zum Schnitt zu bringen. Gibt es nun etwa auf der linken Seite von p keine zu p relativ parallele Polygonseite, so ist sicher ein solcher Punkt L_μ vorhanden, und zwar treten in diesem Falle die Verlängerungen von $L_{\mu-1}L_\mu$ und $L_\mu L_{\mu+1}$ über L_μ hinaus beide in H_r ein. Nun ist jede Verbindungslinie von zwei Punkten dieser Verlängerungen relativ parallel zu p, denn eine solche Linie kann in H_l nicht eintreten. Hieraus und aus der Tatsache, daß es rechts höchstens *eine* zu p relativ parallele Polygonseite gibt, folgt, daß die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte der Verlängerungen mit dem Umfang von H_r eine Polygonseite oder ein Stück einer solchen ist, und zwar ist diese relativ parallel zu p. Es gibt also immer entweder eine oder zwei zu p relativ parallele Polygonseiten.

Die beiden Endpunkte einer zu p relativ parallelen Polygonseite und ein nächster Eckpunkt sind Nachbargitterpunkte von p. Bei einem nächsten Eckpunkt kann man nämlich durch Parallelverschiebung von p bewirken, daß diese Linie durch ihn geht, ohne vorher oder zugleich einen anderen Gitterpunkt zu treffen. Bei demjenigen Endpunkt einer zu p relativ parallelen Seite, der nicht zugleich nächster Punkt an p ist, verlängere man die Seite bis zum Schnitt mit p und darüber hinaus. Dann wird auf dieser Verlängerung und in dem einen Winkelfeld zwischen ihr und p kein Gitterpunkt liegen, und durch eine Drehung von p um einen genügend nahe an dem Schnittpunkt nach der Mitte der in dem Rechteck liegenden Strecke von p hin befindlichen Punkt kann man erreichen, daß die gedrehte Gerade durch den erwähnten Endpunkt der Seite geht, ohne vorher oder zugleich einen anderen Gitterpunkt zu treffen. Bei einer zu p absolut parallelen Polygonseite bewirkt man die Inzidenz ihrer Endpunkte mit p durch Drehungen dieser Geraden um zwei genügend weit von dem Rechteck entfernt auf ihr liegende Punkte, die durch das Rechteck voneinander getrennt sind. Irgend ein anderer Gitterpunkt kann, wie man leicht sieht, nicht Nachbarpunkt von p sein; es sind also gerade drei oder vier solche Punkte vorhanden.

Nun werden die unendlich fernen Punkte U, V, W zu den Gitter-

punkten hinzugenommen. Die Linie p kann das Rechteck so schneiden, daß sie innerhalb des Rechtecks ganz in einem der Streifen zwischen den Geradenpaaren

$$x = r,\ x = r + 1 \quad (r = 0, 1, \cdots, m - 2)$$

oder

$$y = s,\ y = s + 1 \quad (s = 0, 1, \cdots, n - 2)$$

oder

$$y = x + t,\ y = x + t + 1 \quad (t = -m + 1, -m + 2, \cdots, 0, 1, \cdots, n - 2)$$

enthalten ist. Dann ist einer der Punkte U, V, W Nachbarpunkt von p, aber die vorher benachbarten Gitterpunkte, die nicht zugleich nächste Punkte sind, bleiben nicht Nachbarpunkte von p. Absolut parallel kann eine Polygonseite mit p jetzt nicht sein, da p ja nicht durch U, V, W gehen soll. Bleibt dagegen p innerhalb des Rechtecks nicht in einem der angegebenen Parallelstreifen, so ist keiner der Punkte U, V, W Nachbarpunkt von p, und die drei oder vier benachbarten Gitterpunkte bleiben Nachbarpunkte.

III.

Zu der eben betrachteten Figur F konstruiere man jetzt eine reziproke f, bei der den Parallelstrahlenbüscheln durch U und V die Punkte zweier projektiven Skalen (v. Staudtscher Abszissensysteme) auf zwei Geraden u und v entsprechen. Um diese Skalen in bekannter Weise zu finden, bezeichne man den Schnittpunkt von u und v in beiden mit ∞, nehme auf u die Punkte 0 und 1, auf v die Punkte $0'$ und $1'$ von dem Schnittpunkt und voneinander verschieden willkürlich an, verbinde 0 mit $0'$, 1 mit $1'$ und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinien mit dem Punkt ∞ durch die Gerade w, die dem Punkt W in F entspricht. Mittels dieser Elemente kann man durch Ziehen von Verbindungslinien und Bestimmen von Schnittpunkten die Skalen bis zu den Punkten $m - 1$ auf u und $(n-1)'$ auf v fortsetzen und erhält dann, indem man alle Punkte $0, 1, \cdots, m - 1$ mit allen Punkten $0', 1', \cdots, (n-1)'$ verbindet, die Figur f. Diese ist ein Möbiussches Netz, in dem jedem nicht auf einer Netzlinie liegenden Punkt drei oder vier Netzlinien benachbart sind. Statt des Gitters mit ganzzahligen Gitterpunkten hätte man in F ebenso gut ein solches benutzen können, dessen sämtliche Punkte Koordinaten mit dem Generalnenner N haben, wo N eine beliebige ganze positive Zahl ist.

Um endlich ein beliebiges angefangenes Möbiussches Netz in der gewünschten Weise zu vervollständigen, bezeichne man den Schnittpunkt zweier Netzgeraden u, v mit ∞ und wähle — allerdings nur einer geringfügigen Vereinfachung zuliebe — diese Geraden so aus, daß auf beiden sich nur auf einer Seite des Punktes ∞ andere Netzpunkte befinden.

Solche Geraden kann man nötigenfalls durch Vervollständigung des Netzes sicher finden. Die beiden von ∞ am weitesten entfernten Netzpunkte auf u bezeichne man mit 0 und 1, auf v mit $0'$ und $1'$, so daß 1 zwischen 0 und ∞, $1'$ zwischen $0'$ und ∞ liegt. Den Schnittpunkt der Verbindungslinie von 0 und $0'$ mit der von 1 und $1'$ verbinde man mit ∞ durch die Gerade w. Dann bestimme man die rationalen Zahlen, die den übrigen Netzpunkten auf u und v in den durch $0, 1, \infty$ und $0', 1', \infty$ bestimmten Skalen zukommen, und deren Generalnenner N und schalte durch weitere Netzlinien die Punkte $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots$ in beide Skalen ein bis zu einem solchen Werte, daß man alle ursprünglich vorhandenen Netzpunkte auf u und v und auch die bei der Konstruktion von $\frac{1}{N}$ neu hinzugekommenen Punkte, die ganzzahlig sind, erreicht hat. Bei diesem letzteren Verfahren kommen neue Netzpunkte auf u und v nicht mehr hinzu. Verbindet man schließlich alle jetzt vorhandenen Netzpunkte auf u mit allen auf v liegenden, so sind unter diesen Verbindungslinien auch alle ursprünglichen und die bei der bis dahin vorgenommenen Vervollständigung des Netzes hinzugekommenen Netzlinien mit Ausnahme von u, v, w enthalten. Das so entstandene Netz ist das verlangte.

Über Kurven 12. und 10. Ordnung, die in der Enveloppentheorie auftreten.

Von

O. Losehand in Wilhelmshaven.

In meiner Inaugural-Dissertation, Kiel 1904, hatte ich eine mir von Herrn Prof. Dr. P. Stäckel gestellte Aufgabe aus der Enveloppentheorie behandelt. Da meine Ergebnisse neuerdings von Herrn G. Loria in bemerkenswerter Weise verallgemeinert worden sind (vergl. S. 512—516 dieses Bandes), gebe ich im folgenden eine kurze, in einigen Punkten verbesserte Darstellung dieser Untersuchungen.

I. Stellung der Aufgabe. Mittelkurve.

Es sind in der Ebene zwei feste Kreise gegeben. Man zeichnet alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dem ersten liegen, und die den zweiten berühren. Die Enveloppe dieser Kreisschar ist zu untersuchen.

In dieser Aufgabe treten drei willkürlich zu wählende Größen auf, nämlich der Radius R des Kreises, auf dem die Mittelpunkte der die Enveloppe erzeugenden Kreise liegen, der Radius r des berührten Kreises und die Zentrale c dieser beiden Kreise. Da es nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so erhalten wir eine Schar von ∞^2 Enveloppenkurven; es ist also erlaubt, einen dieser Parameter, z. B. R, ein für allemal festzulegen.

Eine Enveloppe ist definiert als Gesamtheit der Schnittpunkte je zweier unendlich benachbarter Kurven einer Kurvenschar. Die erzeugenden Kurven sind in unserem Falle Kreise, die ihren Mittelpunkt auf dem Kreise R haben, und die den Kreis r berühren. Je zwei solche unendlich benachbarte Kreise werden im allgemeinen zwei reelle Schnittpunkte besitzen, deren einer irgendwo in der Ebene liegt, während der andere sich auf dem Kreise r befindet. Wir unterscheiden demnach, je nach der Erzeugung durch jenen oder diesen Schnittpunkt, zwei Teile der Enveloppe;

es soll diese Bezeichnung als erster und zweiter Enveloppenteil durchgehends festgehalten werden.

Alle Punkte des *zweiten Teils* der Enveloppe können nach der eben gegebenen Definition nur auf dem Kreise mit dem Radius r liegen. Aber sie brauchen diesen Kreis nicht zu erfüllen. Dies tritt vielmehr nur dann ein, wenn der Mittelpunkt des Kreises r innerhalb des Kreises R liegt. Befindet er sich dagegen außerhalb des Kreises R, so sind die Enveloppenkreise nicht mehr in ihrer ganzen Ausdehnung reell, es besteht der zweite Teil der Enveloppe in diesem Fall aus zwei einander diametral gegenüberliegenden doppelt beschriebenen Kreisstücken. Ein besonderes Interesse bietet der Übergangsfall, der eintritt, wenn der Mittelpunkt des Kreises r auf der Peripherie von R liegt. Der Kreis r gehört dann gleichzeitig zu den erzeugenden Kreisen und zu der Enveloppe, und da in der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung eine Enveloppenkurve als eine singuläre Lösung anzusehen ist, so haben wir hier den merkwürdigen Fall, daß ein Integral einer Differentialgleichung zugleich partikuläre und singuläre Lösung ist.

Der *erste Teil* der Enveloppenkurven, der eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften und eine reiche Fülle der verschiedensten Gestalten darbietet, soll hier etwas eingehender behandelt werden.

Die Kurve, die für $r = 0$ entsteht, d. h. die man erhält, wenn der Radius des berührten Kreises in einen Punkt entartet, ist der einfachste Typus unserer entstehenden Kurven. Es wird deshalb vorteilhaft sein, diese Kurve vorweg zu behandeln. Aus Gründen, die erst später klar werden, nennen wir sie die *Mittelkurve*. Um ihre Gleichung zu erhalten, legen wir das Koordinatensystem so, daß der in einen Punkt entartete Kreis der Anfang wird, und daß der Mittelpunkt des Kreises R, welcher die Mittelpunkte der die Enveloppe erzeugenden Kreise trägt, auf der negativen Seite der η-Achse liegt. Die Gleichung des erzeugenden Kreises ist dann:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2R\xi \cos\varphi - 2R\eta \sin\varphi + 2c\eta = 0. \tag{1}$$

Differentiert man nach φ, so erhält man

$$\xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist allgemein erfüllt durch

$$\xi = \varrho \cos\varphi, \qquad \eta = \varrho \sin\varphi.$$

Das bedeutet aber die Darstellung von ξ und η in Polarkoordinaten. Führt man diese in die obige Gleichung ein, so geht (1) über in

$$\varrho^2 - 2R\varrho + 2c\varrho \sin\varphi = 0, \tag{3}$$

wofür man auch schreiben darf:

$$\varrho = 0, \qquad \varrho = -2c\sin\varphi + 2R. \tag{3a}$$

Von diesen beiden Gleichungen stellt $\varrho = 0$ den Anfangspunkt dar, es ist also der Anfangspunkt stets ein Teil der Kurve. Um eine explizite Darstellung von ξ und η als Funktion von φ zu erhalten, multipliziere man $\varrho = -2c\sin\varphi + 2R$ noch mit $\cos\varphi$ bez. $\sin\varphi$. Man findet auf diese Weise die Koordinaten der Mittelkurve als

$$\begin{cases} \xi = -2c\sin\varphi\cos\varphi + 2R\cos\varphi, \\ \eta = -2c\sin^2\varphi + 2R\sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Dazu ist noch der Anfangspunkt hinzuzunehmen.

In kartesischen Koordinaten lautet die Gleichung der Kurve

$$(\xi^2+\eta^2+2c\eta)^2 - 4R^2(\xi^2+\eta^2) = 0. \tag{5}$$

Sie ist bekannt unter dem Namen *Kreiskonchoide* oder *Pascalsche Schnecke* (Limaçon), im Falle $c = R$ heißt sie *Kardioide.**)

Übrigens ergibt sich eine neue Konstruktionsart der Kreiskonchoide aus den Gleichungen (1) und (2). In Worte übertragen, besagen diese Gleichungen folgendes:

In einer Ebene ist ein fester Kreis und ein fester Punkt gegeben. Schlägt man einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem gegebenen Kreis liegt, und der durch den festen Punkt hindurchgeht, und zieht durch jenen Punkt eine Parallele zu der Verbindungslinie beider Kreiszentra, so schneidet diese Parallele aus dem beweglichen Kreis stets einen Punkt der Kreiskonchoide aus.

II. Herstellung der Gleichung des ersten Enveloppenteils, Parallelität der Kurven, Herleitung der Parallelkurven als Kreisenveloppen nach Cayley.

Wir gehen jetzt daran, die Gleichung der Enveloppenkurven wirklich herzustellen. Dabei soll derjenige Teil der Enveloppen, der aus den Kreisen oder Kreisstücken besteht, und der oben als zweiter Teil der Enveloppe bezeichnet wurde, unberücksichtigt gelassen werden.

Die Gleichung des ersten Enveloppenteils ist das Resultat einer Elimination von φ aus der Gleichung des erzeugenden Kreises, der jetzt den Kreis r berührt, und der daraus durch Differentiation nach φ gewonnenen Gleichung. Führt man diese Elimination wirklich aus, so erhält man die Kurvengleichung in kartesischen Koordinaten. Wir wollen uns jedoch

*) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Leipzig 1873, S. 52. Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, Leipzig 1902, S. 134 und S. 142.

hier mit einer Gleichung der Kurve begnügen, die x und y explizit als Funktion von φ liefert. In Analogie mit der Mittelkurve lege man das Koordinatensystem so, daß der Mittelpunkt des Kreises r der Anfang wird, und derjenige des Kreises R auf der negativen y-Achse liegt.

Aus der Gleichung des erzeugenden Kreises

$$(6)\quad (x - R\cos\varphi)^2 + (y + c - R\sin\varphi)^2 = (r \pm \sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi})^2,$$

$$(7)\quad x^2 + y^2 - 2R\cos\varphi \cdot x - 2R\sin\varphi \cdot y + 2cy = r^2 \pm 2r\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}$$

folgt durch Differentiation nach φ

$$(8)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = \mp \frac{rc\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}}.$$

Wir setzen jetzt die Gleichung der Kurve an in der Form:

$$y = \xi + r\alpha, \qquad y = \eta + r\beta,$$

wobei ξ und η die Koordinaten der Mittelkurve und α und β vorläufig noch nicht bekannte Größen bedeuten. Also wird

$$(9)\qquad \begin{cases} x = 2(R - c\sin\varphi)\cdot\cos\varphi + r\alpha, \\ y = 2(R - c\sin\varphi)\cdot\sin\varphi + r\beta. \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (7) ergibt sich jetzt die Gleichung:

$$(10)\quad 4(R - c\sin\varphi)^2 + 4r(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)(R - c\sin\varphi) + r^2(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$- 4R(R - c\sin\varphi) - 2Rr(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) + 4c(R - c\sin\varphi)\sin\varphi + 2r\beta$$
$$= r^2 \pm 2r\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}.$$

Diese Gleichung soll für jedes φ identisch erfüllt sein, es folgt also durch Vergleichung der Koeffizienten von r^2 zwischen α und β die Relation:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Eine weitere Beziehung zwischen beiden Größen erhält man, wenn man die Gleichungen (9) bez. mit $\sin\varphi$ und $-\cos\varphi$ multipliziert und addiert. Eine Vergleichung mit (8) liefert dann:

$$(11)\qquad \alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi = \frac{\mp c\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}}.$$

Nun ist aber

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)^2 + (\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi)^2 = 1,$$

mithin

$$(12)\qquad \begin{aligned} \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi &= \pm\sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\varphi}{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}} \\ &= \pm\frac{-R + c\sin\varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR\sin\varphi}}. \end{aligned}$$

Bei richtiger Wahl der Vorzeichen ergibt sich aus den Gleichungen (11) und (12)

$$\alpha = \pm \frac{c \sin 2\varphi - R \cos \varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi}}, \tag{13}$$

$$\beta = \pm \frac{-\cos 2\varphi - R \sin \varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi}}. \tag{14}$$

und zwar sind die Vorzeichen so zu kombinieren, daß die beiden oberen und die beiden unteren zusammengehören. Setzen wir die so gefundenen Ausdrücke für α und β in (9) ein, so ergibt sich als Darstellung des ersten Teils unserer Enveloppenkurve die folgende:

$$\begin{cases} x = -2c \sin \varphi \cos \varphi + 2R \cos \varphi \pm r \dfrac{c \sin 2\varphi - R \cos \varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi}}, \\ y = -2c \sin^2 \varphi \qquad + 2R \sin \varphi \pm r \dfrac{-c \cos 2\varphi - R \sin \varphi}{\sqrt{c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi}}. \end{cases} \tag{15}$$

Es läßt sich nun folgender wichtige Satz beweisen:

Die Enveloppen der in der Aufgabe definierten Kreisschar sind Parallelkurven der für $r = 0$ entstehenden Kurve, und zwar erhält man die Parallelkurve im Abstand r_1, wenn der berührte Kreis den Radius r_1 hat.

Bevor wir zum Beweise dieses Satzes übergehen, mag hier eine Bemerkung über Parallelkurven Platz finden. Cayley definiert in seiner Abhandlung: *On evolutes and parallel curves**) die Parallelkurve einer gegebenen Kurve als die Enveloppe eines Kreises mit konstantem Radius, dessen Mittelpunkt die gegebene Kurve beschreibt, oder der die gegebene Kurve stets berührt. Dieselbe Definition wird auch in Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, aufgestellt (S. 118f.). Zugleich aber findet man hier eine zweite Definition der Parallelkurven, nämlich als Enveloppe einer Geraden, die parallel der Tangente in fester Entfernung von derselben ist, also als Enveloppe von

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = kz (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

wo U_1, U_2, U_3 die homogenen Linienkoordinaten der Geraden sind. Diese Definition ist von der oben gegebenen wesentlich verschieden, denn sie berücksichtigt außer den Parallelen zu den eigentlichen Tangenten der Kurve auch die Parallelen zu allen uneigentlichen Tangenten. Tritt also bei einer gegebenen Kurve ein Doppel- oder isolierter Punkt oder eine Spitze auf, so liefert die Definition der Parallelkurve als Enveloppe der Parallelen zu den Kurventangenten auch die Kreise (bzgl. Kreisstücke) mit, von denen schon oben (S. 496) die Rede war, während die Cayleysche Definition diese Kreise nicht mitgibt. Nach der Cayleyschen Definition

*) Mathematical Papers VIII, S. 31 = Quart. Journ. XI, 1871.

sind also nur die Kurven des *ersten* Enveloppenteils Parallelkurven, nach der anderen Definition fallen auch die Kurven des *zweiten* Enveloppenteils mit unter diesen Begriff, und es sind demnach die ganzen in der Aufgabe definierten Kurven als Parallelkurven zu bezeichnen. Wir werden im folgenden die Cayleysche Definition annehmen, müssen uns also auch in dem oben ausgesprochenen Satz auf den ersten Teil der Enveloppe beschränken.

Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt sind, sei ein Beweis für die Parallelität der Kurven erbracht, der sich auf die Cayleysche Definition der Parallelkurven stützt. Man sucht die Enveloppe der Kreise

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2, \tag{16}$$

wobei ξ und η die Gleichungen (4)

$$\xi=2(R-c\sin\varphi)\cos\varphi, \qquad \eta=2(R-c\sin\varphi)\sin\varphi$$

befriedigen. Durch Differentiation von (16) nach φ findet man

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{d\varphi}+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\varphi}=0. \tag{17}$$

Setzt man jetzt versuchsweise

$$x=\xi+r\gamma, \qquad y=\eta+r\delta,$$

so folgt durch Substitution in (16) die Gleichung

$$\gamma^2+\delta^2=1,$$

während die Substitution in (17) ergibt

$$\gamma\frac{d\xi}{d\varphi}+\delta\frac{d\eta}{d\varphi}=0,$$

wofür man setzen darf

$$\gamma=-\mu\frac{d\eta}{d\varphi}, \qquad \delta=+\mu\frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\xi}{d\varphi}=-2c\cos 2\varphi-2R\sin\varphi, \quad \frac{d\eta}{d\varphi}=-2c\sin 2\varphi+2R\cos\varphi,$$

$$\gamma=-(-2c\sin 2\varphi+2R\cos\varphi)\mu, \qquad \delta=(-2c\cos 2\varphi-2R\sin\varphi)\mu,$$

$$1=\gamma^2+\delta^2=(c^2+R^2-2cR\sin\varphi)\,4\mu^2,$$

$$\mu=\pm\frac{1}{2\sqrt{c^2+R^2-2cR\sin\varphi}},$$

also wird

$$x=\xi\pm r\frac{c\sin 2\varphi-R\cos\varphi}{\sqrt{c^2+R^2-2cR\sin\varphi}}, \qquad y=\eta\pm r\frac{-c\cos 2\varphi-R\sin\varphi}{\sqrt{c^2+R^2-2cR\sin\varphi}}.$$

Die jetzt auf Grund der Cayleyschen Definition der Parallelkurven hergestellte Gleichung ist mit der früher abgeleiteten Gleichung (15) identisch, womit die Parallelität der Kurven bewiesen ist.

Wir haben auf S. 496 die für $r = 0$ entstehende Kurve die *Mittelkurve* genannt. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich jetzt aus der Parallelität der Kurven, denn die für $r = 0$ entstehende Kurve verläuft tatsächlich in der Mitte der Kurven $r \neq 0$, wie aus der Cayleyschen Erzeugungsweise direkt folgt.

III. Die Parallelkurven.

a) Die Evolute.

Jedes System von Parallelkurven besitzt ein und dieselbe Krümmungsmittelpunktskurve. Es wird daher vorteilhaft sein, diese bei der Diskussion der Kurven zugrunde zu legen. Wir gewinnen die Gleichung der Evolute am einfachsten aus der Mittelkurve:

$$\xi = -2c \sin\varphi \cos\varphi + 2R\cos\varphi, \qquad \eta = -2c\sin^2\varphi + 2R\sin\varphi.$$

Bezeichnet man die Ableitung nach φ mit einem Strich, so ist die Gleichung der Evolute

$$(18) \qquad \overline{X} = \xi - \frac{(\xi'^2+\eta'^2)\eta'}{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}, \qquad \overline{Y} = \eta + \frac{(\xi'^2+\eta'^2)\xi'}{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}.$$

Man erhält also

$$\overline{X} = -2c\sin\varphi\cos\varphi + 2R\cos\varphi - \frac{(c^2+R^2-2cR\sin\varphi)(-2c\sin 2\varphi + 2R\cos\varphi)}{2c^2+R^2-3cR\sin\varphi},$$

$$\overline{Y} = -2c\sin^2\varphi \qquad + 2R\sin\varphi + \frac{(c^2+R^2-2cR\sin\varphi)(-2c\cos 2\varphi - 2R\sin\varphi)}{2c^2+R^2-3cR\sin\varphi},$$

oder wenn man diese Rechnungen und gleichzeitig die Verschiebung des Koordinatensystems

$$X = \overline{X}, \qquad Y = \overline{Y} + 2c$$

ausführt,

$$(19) \qquad X = \frac{2cR^2\cos^3\varphi}{2c^2+R^2-3cR\sin\varphi}, \qquad Y = \frac{2c^2(c - R\sin^3\varphi)}{2c^2+R^2-3cR\sin\varphi}.$$

Es werde zunächst die Evolute genau untersucht.

1) *Unendliche Werte* von X und Y können nur dann auftreten, wenn der Nenner verschwindet. Das ergibt die Bedingung

$$\sin\varphi = \frac{2c^2+R^2}{3cR}.$$

Man findet also, daß die Kurve ins Unendliche läuft, wenn

$$|\sin\varphi| = \left|\frac{2c^2+R^2}{3cR}\right| \leqq 1,$$

d. h. $\frac{2c^2+R^2}{3cR} \leqq 1$ ist, was eintritt, wenn c zwischen $\frac{1}{2}R$ und R liegt.

2) Für $c = R$ liegt die Asymptote horizontal und geht durch $y = 2c$ hindurch, sie berührt in diesem Fall reell nur im Endlichen. Für die

Lage der Kreise R und r bedeutet $c = R$, daß der Mittelpunkt von r auf der Peripherie von R liegt. — Für $c = \frac{1}{2} R$, d. h. wenn der Mittelpunkt von r gerade zwischen dem Mittelpunkt von R und der Peripherie von R liegt, ist die Asymptote vertikal. Ihr Schnittpunkt mit der Y-Achse liegt in diesem Fall im Unendlichen, die Y-Achse ist selber Asymptote. *Ändert sich c von $\frac{1}{2} R$ zu R, so wird der Winkel, den die Asymptote mit der X-Achse bildet, stets kleiner.*

3) *Die im Falle $c = R$ entstehende Evolute ist ähnlich der zugehörigen Mittelkurve. Sie geht durch dreifache Vergrößerung und Wahl eines anderen Koordinatensystems in jene über.*

4) *Die Extremwerte beider Koordinaten* sind durch Differentiation von (19) leicht erhältlich. Sie treten ein

für X bei $\cos^2 \varphi = 0$, d. h. doppelt

für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$,

$\sin \varphi = \frac{c}{R}$,

$\sin \varphi = \frac{R}{2c}$.

für Y bei $\cos \varphi = 0$, d. h. für

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$,

$\sin \varphi = \frac{c}{R}$,

$\sin \varphi = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8c^2}}{4c}$.

Besonderes Interesse bieten die Wurzeln, welche Spitzen der Evolute liefern. Solche sind die beiden ersten Wurzeln. Spitzentangente ist die Y-Achse. Die Ordinaten der Spitzen sind $Y = \frac{2c^2}{2c \mp R}$, wo das obere Zeichen für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, das untere für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ gilt. Für $c = \frac{1}{2} R$ rückt die obere Spitze ins Unendliche. Ein Zusammenfallen beider Spitzen ist unmöglich außer für $R = 0$.

Für die Wurzel $\sin \varphi = \frac{c}{R}$ besitzen sowohl X als auch Y als Funktion von φ Extremwerte (oder im speziellen Fall Wendepunkte mit achsenparalleler Tangente). Das ist aber nur möglich, wenn der Wurzel $\sin \varphi = \frac{c}{R}$ eine Spitze der Evolute entspricht. Die Koordinaten dieser Spitze sind leicht aus (19) zu berechnen:

$$X = \frac{2c\sqrt{R^2 - c^2}}{R}, \qquad Y = \frac{2c^3}{R^2}.$$

Die Spitze liegt stets im Endlichen, sie ist reell für $c < R$. Für $c = R$, d. h. wenn der Mittelpunkt des berührten Kreises r bei der Enveloppe auf der Peripherie des Kreises R liegt, ist $X = 0$, $Y = 2c$, die beiden für $\sin \varphi = \frac{c}{R}$ auftretenden Spitzen fallen also auf der Y-Achse zusammen.

Ist andererseits $c = 0$, so fallen beide Spitzen in den Nullpunkt, was ja auch ganz natürlich ist, da im Falle konzentrischer Kreise die Evolute in einen Punkt ausartet.

5) *Die Evolute berührt den Kreis, auf dem die Mittelpunkte der erzeugenden Kreise liegen, in zwei reellen oder imaginären Punkten. Reell sind die Berührungspunkte für* $c \gtreqless R$. *Der zugehörige Wert von* φ *wird gegeben durch* $\sin \varphi = \frac{R}{c}$.

b) Der Krümmungsradius.

Mit der Kenntnis der Evolute ist das erste Hilfsmittel zur Diskussion der Parallelkurven gegeben. Ein zweites gleich wichtiges Hilfsmittel erhält man, wenn man den Krümmungsradius der Mittelkurve als Funktion eines auf dieser laufenden Punktes darstellt, z. B. als Funktion von φ. Aus diesem Krümmungsradius der Mittelkurve ist dann ohne weiteres durch Addition oder Subtraktion eines konstanten Stückes der Krümmungsradius einer beliebigen Parallelkurve zu gewinnen.

Wir stellen also aus der Gleichung der Mittelkurve (4)

$$\xi = -2c \sin \varphi \cos \varphi + 2R \cos \varphi, \qquad \eta = -2c \sin^2 \varphi + 2R \sin \varphi$$

ihren Krümmungsradius

$$\tau = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi' \eta'' - \eta' \xi''}$$

her. Die Rechnung ergibt

$$\tau = \frac{2(c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi)^{\frac{3}{2}}}{2c^2 + R^2 - 3cR \sin \varphi}, \tag{20}$$

wobei die Wurzel mit dem positiven Zeichen gewählt werden soll.

Es ergeben sich dann folgende Resultate:

1) Die Funktion τ ist *symmetrisch in bezug auf* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2) *Unendliche Werte* treten an der Stelle $\sin \varphi = \frac{2c^2 + R^2}{3cR}$ auf, wofür Vorbedingung ist

$$\frac{1}{2} R \leqq c < R.$$

3) *Die Extremwerte der Funktion,* die hier von großer Wichtigkeit sind, werden geliefert durch die Gleichung

$$\cos \varphi \sqrt{c^2 + R^2 - 2cR \sin \varphi}\,(c - R \sin \varphi) = 0.$$

Daraus folgt

1) $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = \pm 1$. Das gibt

$$\text{für } c > R \qquad \tau = \frac{2(c \mp R)^2}{2c \mp R},$$

$$\text{für } c < R \qquad \tau = \frac{2(c \mp R)^2}{R \mp 2c}.$$

Beide Formeln sind also bis auf das Vorzeichen gleich. Nur für $c = R$ liefern beide dasselbe.

2) $\sin\varphi = \frac{c^2 + R^2}{2cR}$. Das gibt, in Gleichung (20) eingesetzt, $\tau = 0$. Dieser Fall kann übrigens, wie man sieht, nur für $c = R$ eintreten.

3) $\sin\varphi = \frac{c}{R}$. Die Gleichung (24) liefert

$$\tau = \frac{4(R^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2 + c^2}.$$

Von diesen drei Formeln ergibt die erste für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ stets ein Maximum; für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ein Minimum, falls $c > R$, ein Maximum, falls $c < \frac{R}{2}$ und $R > c > \frac{R}{2}$. Ist $c = R$, so treten eigentlich, d. h. wenn wir uns nicht auf das obere Zeichen von Gleichung (20) beschränken, zwei Wendepunkte auf. Da jedoch diese Beschränkung aufrecht erhalten werden soll, so tritt hier eine Unstetigkeit der Tangente ein. Für $c = \frac{R}{2}$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eine Kuspidalasymptote. $\sin\varphi = \frac{2c^2 + R^2}{3cR}$ liefert zwei gewöhnliche Asymptoten. Für $c = 0$ ist die Kurve eine Parallele in endlicher, für $c = \infty$ eine Parallele in unendlicher Entfernung von der φ-Achse.

Durch die Festlegung des Wurzelvorzeichens in Gleichung (20) ist gleichzeitig ein für allemal das Vorzeichen des Krümmungsradius bei den Parallelkurven festgelegt, da der Krümmungsradius der Parallelkurve sich stets nur um eine Konstante von dem der Mittelkurve unterscheidet. Ist für gleiches φ der Krümmungsradius einer Parallelkurve größer als derjenige der zugehörigen Mittelkurve, so wollen wir sagen, der Kurvenzug liegt *außerhalb der Mittelkurve*, oder wir wollen kurz vom *äußeren Zug* der Kurve sprechen, ist er dagegen kleiner, so soll er der *innere Zug* heißen. Je ein äußerer und ein innerer Kurvenzug gehören zusammen zu einer Kurve, ebenso ist im speziellen Falle die Mittelkurve als doppelt belegt anzusehen.

c) Diskussion der Parallelkurven.

Mit Hilfe der Evolute und des Krümmungsradius läßt sich nun die Diskussion der Parallelkurven durchführen. Dabei ist zunächst das Augenmerk auf die Spitzen der Kurven zu richten.

Um den Ort der Spitzen einer durch $r = r_1$ bestimmten Kurve zu erhalten, muß man die Gleichung für r nach $\sin\varphi$ auflösen. Die Gleichung ist in $\sin\varphi$ kubisch, also können höchstens sechs reelle Spitzen vorhanden sein. Die cardanische Formel eignet sich indessen zu einer Untersuchung über Ort und Anzahl der Spitzen nicht, es ist daher besser, ein anderes

Verfahren einzuschlagen, das auf der in b) gelieferten Diskussion des Krümmungsradius begründet werden soll. Wir bestimmen nämlich die Zahl der Schnittpunkte einer im Abstand r von der φ-Achse gezeichneten Parallelen mit der Kurve. Läßt man r variieren, so treten wegen der Symmetrie der Kurve neue Schnittpunkte immer paarweise auf und verschwinden auch wieder paarweise — dadurch ist die Anzahl der Schnittpunkte und somit der Kurvenspitzen gegeben. Der Ort der Schnittpunkte, als innerhalb der Abszissen je zweier Extremwerte gelegen, ist für unsere Zwecke genau genug.

Um dies Verfahren aber anwenden zu dürfen, muß man die Größenreihenfolge der Ordinaten der Extrema kennen. Diese macht jedoch nur in *einem* Fall Schwierigkeit, nämlich, wenn $\frac{1}{2}R > c > 0$ ist, wo zwei Maxima auftreten. Aus der angesetzten Ungleichung ergibt sich leicht, daß

$$[r]_{\frac{\pi}{2}} > [r]_{-\frac{\pi}{2}}$$

ist, wenn $c < \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$. Nun ist aber $\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{2}$, also ist der Bereich $c < \frac{R}{2}$ einbegriffen in $c < \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$, mithin stets die obige Ungleichung erfüllt.

Zwecks besserer Übersicht ist es nötig, die entstehenden Kurven in eine Reihe von Gruppen zusammenzufassen, in denen dann die Kurven lauter gemeinschaftliche Merkmale aufweisen. Wir betrachten Kurvenscharen, in denen r Parameter ist und

I) $c > R$, III) $\frac{1}{2}R < c < R$, V) $c < \frac{1}{2}R$,

II) $c = R$, IV) $c = \frac{1}{2}R$, VI) $c = 0$.

Die Gestalt der Kurven wird wesentlich durch die Spitzen bedingt, die sie besitzen. Wir beginnen deshalb mit den Spitzen und verfolgen zugleich die Stetigkeit der Gestaltsänderung.

I) $c > R$.

Äußerer Zug. Keine Spitzen.

Innerer Zug.

1) $r < \frac{2(c-R)^2}{2c-R}$ keine Spitzen

2) $r = \frac{2(c-R)^2}{2c-R}$ 2 Spitzen, ausartend $\varphi = \frac{\pi}{2}$

3) $r < \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$ 2 Spitzen $1 > \sin\varphi > -1$

4) $r = \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$	2 Spitzen, ausartend	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
5) $r > \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$	keine Spitzen.	

II) $c = R$.

Äußerer Zug. Keine Spitzen.

Innerer Zug.

1) $r = 0$	2 Spitzen, ausartend	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
2) $r > 0$	2 Spitzen	$1 > \sin\varphi > -1$
3) $r = \frac{8}{3}R$	2 Spitzen, ausartend	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
4) $r > \frac{8}{3}R$	keine Spitzen.	

III) $c < R$.

Äußerer Zug.

1) $r < \frac{2(c-R)^2}{R-2c}$	keine Spitzen	
2) $r = \frac{2(c-R)^2}{R-2c}$	2 Spitzen, ausartend	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
3) $r > \frac{2(c-R)^2}{R-2c}$	2 Spitzen	$1 > \sin\varphi > \frac{2c^2+R^2}{3cR}$.

Innerer Zug.

1) $r < \frac{4(R^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2+c^2}$	keine Spitzen	
2) $r = \frac{4(R^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2+c^2}$	4 Spitzen, zu je zweien ausartend	$\sin\varphi = \frac{c}{R}$
3) $r = \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$	4 Spitzen	$\frac{c}{R} < \sin\varphi < +1$ $\frac{c}{R} > \sin\varphi > -1$
4) $r = \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$	4 Spitzen, davon zwei ausartend	die beiden ausartenden Spitzen bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
5) $r > \frac{2(c+R)^2}{2c+R}$	zwei Spitzen	$\sin\varphi \leqq \frac{2c^2+R^2}{3cR}$.

IV) $c = \frac{1}{2} R.$

Äußerer Zug. Keine Spitzen.

Innerer Zug.

1) $r < \frac{2}{\sqrt{3}} R$	keine Spitzen	
2) $r = \frac{2}{\sqrt{3}} R$	4 Spitzen, zu je zweien ausartend	$\sin\varphi = \frac{c}{R}$
3) $r < \frac{9}{4} R$	4 Spitzen	$\frac{c}{R} < \sin\varphi < 1$ $\frac{c}{R} > \sin\varphi > -1$
4) $r = \frac{9}{4} R$	4 Spitzen, davon zwei ausartend	die ausartenden Spitzen bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
5) $r > \frac{9}{4} R$	2 Spitzen	$\sin\varphi \leqq 1.$

V) $c < \frac{1}{2} R.$

Äußerer Zug. Keine Spitzen.

Innerer Zug.

1) $r < \frac{4(R^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2 + c^2}$	keine Spitzen	
2) $r = \frac{4(R^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2 + c^2}$	4 Spitzen, zu je zweien ausartend	$\sin\varphi = \frac{c}{R}$
3) $r < \frac{2(c+R)^2}{R+2c}$	4 Spitzen	$\frac{c}{R} < \sin\varphi < 1$ $\frac{c}{R} > \sin\varphi > -1$
4) $r = \frac{2(c+R)^2}{R+2c}$	4 Spitzen, davon 2 ausartend	die ausartenden Spitzen bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
5) $r > \frac{2(c+R)^2}{R+2c}$	2 Spitzen	$\sin\varphi < 1$
6) $r = \frac{2(c-R)^2}{2c-R}$	2 Spitzen, ausartend	$\sin\varphi = 1$
7) $r > \frac{2(c-R)^2}{2c-R}$	keine Spitzen.	

VI) $c = 0$.

Äußerer Zug, Kreis mit dem Radius $R + r$.

Innerer Zug, Kreis mit dem Radius $R - r$.

Wir wollen jetzt die Gestaltsänderung der Kurven bei variierendem r in der Nähe der Evolutenspitzen betrachten.

1) *Deformation der Kurven in der Nähe der Evolutenspitze* $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, (Fig. 1). Sie findet statt bei I, 4; II, 3; III, 4; IV, 4; V, 4 und zwar in folgender Art. Die Kurve hat

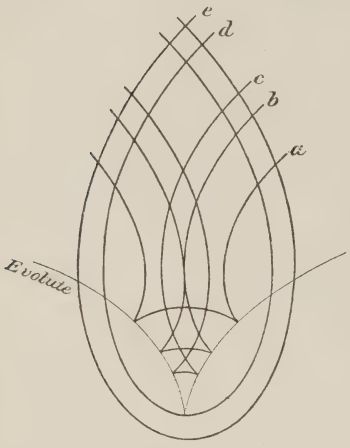


Fig. 1.

a) zwei Spitzen auf der Evolute,

b) zwei Spitzen auf der Evolute und einen Berührungsknoten mit der y-Achse als Tangente,

c) zwei Spitzen auf der Evolute und 2 Doppelpunkte,

d) einen Doppelpunkt und einen dreifachen Punkt auf der y-Achse, „der aber, äußerlich nicht erkennbar, sich nur durch eine scharfe Biegung verrät“ (G. Loria, Ebene Kurven, unter Toroide, S. 647), Schleife.

e) einen Doppelpunkt und eine gewöhnliche Schleife.

2) *Deformation der Kurven in der Nähe der Evolutenspitze* $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

Für $c > R$ (dieselbe Deformation wie 1).

Für $c = R$.

a) 2 Spitzen auf der Evolute. Sie nähern sich und

b) fallen übereinander, wie ja in diesem Fall überhaupt die ganzen Kurven übereinanderfallen. Die Mittelkurve ist doppelt belegt (vgl. IIIb).

c) Sie entfernen sich wieder voneinander, indem sie dieselbe Figur wie in a) bilden.

Für $c > \frac{1}{2} R$. Die Spitze kommt von oben her. Jeder Orthogonalschnitt der Kurve mit einer Evolutenasymptote ist ein Wendepunkt der Kurve.

a) 2 Wendepunkte.

b) 2 Wendepunkte und ein dreifacher Punkt, wenn $r = \frac{2(R-c)^2}{2c-R}$ ist.

c) 2 Wendepunkte, ein Doppelpunkt auf der y-Achse und 2 Spitzen auf der Evolute.

d) 2 Wendepunkte, einen Doppelpunkt auf der y-Achse bildend, und 2 Spitzen. Dies tritt ein für $Y = \frac{4c(R^2 - c^2)}{2c^2 - R^2}$. Punkt M.

e) ein Doppelpunkt, 2 Wendepunkte und 2 Spitzen. Spitzen und Wendepunkte rücken einander asymptotisch näher.

Für $c = \frac{1}{2} R$. Die Spitze rückt auf der negativen Seite der y-Achse ins Unendliche und kommt

für $c > 0$ wieder ins Endliche. Die Kurve besitzt in der Nähe der Spitze

a) keine Besonderheit,

b) einen dreifachen Punkt,

c) 2 Spitzen und einen Doppelpunkt.

3) *Deformation der Kurven in der Nähe der Evolutenspitze*

$$\sin \varphi = \frac{c}{R}$$

(Fig. 2). Auf den Asymptoten der Evolute treten wieder Wendepunkte auf. Sonst hat man

a) keine Besonderheit,

b) einen dreifachen Punkt für $r = \frac{2(R^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}{2R^2 + c^2}$,

c) einen Doppelpunkt und 2 Spitzen auf der Evolute,

d) einen Doppelpunkt, der zugleich Wendepunkt ist, und 2 Spitzen,

c) einen Doppelpunkt und zwei Spitzen.

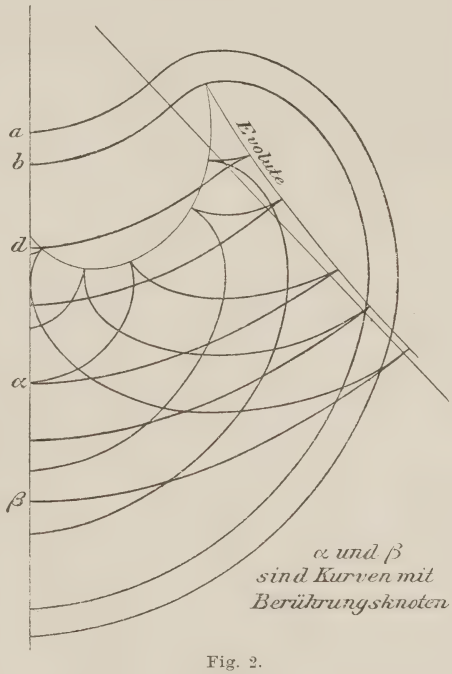


Fig. 2.

Da zugleich mit diesen Deformationen auch die Deformationen 1) auftreten, so sind Berührungsknoten der Kurve möglich, die ihre Lage auf der y-Achse haben. Der eine derselben hat eine horizontale, der andere eine vertikale Tangente, vgl. Figur 2.

IV. Die Plückerschen Zahlen der Kurve.

Die Mittelkurve unserer Kurvenschar ist eine algebraische Kurve, es müssen also auch alle ihre Parallelkurven (im Sinne der *weiteren* Definition) algebraische Kurven sein.

Um die Charakteristiken der Parallelkurven, also diejenigen des ersten Enveloppenteils aufzustellen, benutzen wir die von Cayley in der oben zitierten Abhandlung angegebenen Relationen. Sie sind

$$n' = 2n + 2\nu - 2f - 2g, \qquad k' = 6\nu + 2k - 6f - 6g,$$
$$\nu' = 2\nu, \qquad f' = 2\nu - 2g,$$
$$\varkappa' = 2\varkappa, \qquad g' = 2g.$$

Dabei bedeutet n die Ordnung, ν die Klasse, k die Anzahl der Spitzen und $\varkappa$ die der Wendepunkte der Mittelkurve. Die Zahl f gibt an, wie oft die Kurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte I und J der Ebene geht, und g, wie oft sie die unendlich ferne Gerade berührt. Die gestrichenen Zahlen haben dieselbe Bedeutung für die abgeleitete Kurve. Die Anzahl der Doppelpunkte d und der Doppeltangenten δ folgt endlich noch aus den bekannten Plückerschen Formeln

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3k,$$
$$n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varkappa.$$

Es müssen nun bei den Parallelkurven zwei wesentlich verschiedene Fälle unterschieden werden, nämlich ob in der Gleichung der Mittelkurve $c + R$ oder $c = R$ ist. Im ersten Fall erhält man die *Konchoide*, im zweiten Falle die *Kardioide*.

Die *Konchoide* ist eine Kurve vierter Ordnung und vierter Klasse, sie besitzt zwei Spitzen in den unendlich fernen Kreispunkten und zwei Wendepunkte. Hieraus ergibt sich die Anzahl der Doppelpunkte und Doppeltangenten als $d = 1$, $\delta = 1$. Die Kurve geht je einmal durch den Kreispunkt I und den Kreispunkt J hindurch, indem sie hier Spitzen bildet. Spitzentangenten sind die beiden imaginären Geraden

$$x_1 + ix_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 - ix_2 = 0$$

in homogenen Koordinaten. Beide Gerade schneiden sich in dem reellen Nullpunkt des Koordinatensystems, fallen also nicht mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Die Kurve berührt demnach die unendlich ferne Gerade nicht.

Für die *Kardioide* erfahren diese Zahlen insofern eine Modifikation, als hier der im Endlichen gelegene Doppelpunkt der Konchoide in eine weitere Spitze ausartet. Die Kardioide ist demnach eine Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse mit drei Spitzen und keinem Wendepunkt. Für f und g ergeben sich dieselben Werte wie oben, nämlich $f = 2$, $g = 0$. Endlich ist $d = 0$, $\delta = 1$.

Aus diesen Plückerschen Zahlen ergeben sich direkt die Charakteristiken der Parallelkurven. Und zwar findet man

$$n' = 12, \quad \varkappa' = 4, \quad d' = 38, \quad f' = 8,$$
$$\nu' = 8, \quad k' = 16, \quad \delta' = 16, \quad g' = 0$$

für die Parallelkurven der *Konchoide*, während sich für die Parallelkurven der *Kardioide* die Zahlen ergeben:

$$n' = 10, \quad \varkappa' = 0, \quad d' = 24, \quad f' = 6,$$
$$\nu' = 6, \quad k' = 12, \quad \delta' = 10, \quad g' = 0.$$

Als Geschlecht erhält man hieraus für die Parallelkurven der Konchoide $p = 1$, für die Parallelkurven der Kardioide dagegen $p = 0$.

Wilhelmshaven, April 1907.

Sopra certi inviluppi di cerchi.

(Da una lettera al Prof. Paul Stäckel.)

Di

GINO LORIA a Genova.

Circa tre anni fa un Suo antico scolare, il Dr. O. Losehand, ebbe la cortesia d'inviarmi la sua Inaugural-Dissertation „Über Kurven 16. Ordnung und 12. Klasse, die bei einem Problem der Enveloppentheorie auftreten", la quale è dedicata allo studio dell' inviluppo dei cerchi che toccano un cerchio fisso di raggio r ed i cui centri appartengono ad un altro cerchio. L'autore giunge ivi al notevole risultato che, variando r, tutti gli inviluppi risultanti sono curve parallele a quella che corrisponde all' ipotesi $r = 0$ e che in generale è una lumaca di Pascal e in particolare una cardioide. Combinando tale osservazione con le formole scoperte da Cayley, che legano le caratteristiche plückeriane di una curva a quelle di una curva parallela, si ha il mezzo per trovare ordine, classe ecc. di tutti gli inviluppi considerati.

Assorbito allora da altre cure io prestai a quel lavoro un' attenzione superficiale, riserbandomi di ritornarvi sopra ove mi si presentasse l'occasione di occuparmi nuovamente di curve speciali; ora tale occasione mi fu offerta dall' articolo destinato all' „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" sopra le curve algebriche particolari di ordine > 4, del quale venni incaricato. Mi accade così di far alcune osservazioni che fanno acquistare ai risultati del Dr. Losehand una grande estensione e che mi permetto di comunicare a Lei.

La proposizione principale a cui giunsi si può enunciare così: *L'inviluppi dei cerchi, i cui centri appartengono ad una data linea* Γ *non retta e che toccano un cerchio fisso di raggio* r, *è una curva parallela all' inviluppo analogo corrispondente all' ipotesi* $r = 0$, *cioè all' inviluppo dei cerchi i cui centri stanno su* Γ *e che passano pel punto O, centro del cerchio fisso.* La restrizione che Γ non sia una linea retta è necessaria perchè in

tal caso i cerchi passanti per O costituirebbero un fascio, onde non avrebbero inviluppo.

Per dimostrare questo teorema basterebbe notare che la dimostrazione geometrica esposta dal Dr. Losehand (p. 11—12)*) pel caso in cui Γ sia un cerchio è indipendente da tale ipotesi; ma si può stabilire mediante un calcolo il quale guida a formole suscettibili di altre applicazioni; mi permetta perciò che gliele esponga.

Cominciamo dal ricordare chel la rappresentazione parametrica della curva parallela alla distanza n dalla curva di equazioni

$$x = \varphi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda)$$

è la seguente:

$$(1) \qquad x = \varphi(\lambda) - n\frac{\psi'(\lambda)}{\sqrt{\varphi'^2(\lambda) + \psi'^2(\lambda)}}, \quad y = \psi(\lambda) + n\frac{\varphi'(\lambda)}{\sqrt{\varphi'^2(\lambda) + \psi'^2(\lambda)}}.$$

Prendiamo poi per origine O il centro del cerchio toccato da tutti i circoli considerati e supponiamo date le coordinate ξ, η di un punto qualunque della curva Γ in funzione di un parametro λ; si indichino quindi con ξ', η'; ξ'', η'' le derivate prime e seconde di ξ, η rispetto a quel parametro. Allora (considerando sempre ogni radicale quadratico suscettibile di due valori) l'equazione generale dei cerchi inviluppanti sarà

$$(2) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \left(r + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)^2$$

o più semplicemente

$$(2') \qquad \xi x + \eta y = \frac{1}{2}(x^2+y^2-r^2) - r\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Differenziando quest' equazione rispetto al parametro si ottiene

$$(3) \qquad \xi' x + \eta' y = -r\frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

e l'equazione dell' inviluppo cercato si otterrebbe eliminando λ fra le (2) e (3). Tale eliminazione non è effettuabile senza specificare le funzioni ξ, η; ma si possono ottenere x, y in funzione di ξ, η, ξ', η', cioè di λ. Infatti le (2') e (3) equivalgono alle seguenti equazioni:

$$(4) \qquad x = \frac{x^2+y^2-r^2}{2(\xi\eta' - \xi'\eta)}\eta' - \frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad y = \frac{x^2+y^2-r^2}{2(\eta\xi' - \eta'\xi)}\xi' - \frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

Ora, elevandole a quadrato e poi sommando, si ottiene:

$$x^2+y^2 = \frac{(x^2+y^2-r^2)^2(\xi'^2+\eta'^2)}{4(\xi\eta' - \xi'\eta)^2} - \frac{r(x^2+y^2-r^2)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + r^2.$$

Questa equazione, liberata dal fattore $x^2+y^2-r^2$, diviene

$$\frac{x^2+y^2-r^2}{2(\xi\eta' - \xi'\eta)} = \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)(r+\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}(\xi'^2+\eta'^2)}.$$

*) questo volume pg. 500.

in virtù della quale le (4) divengono

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)(r + \sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}(\xi'^2+\eta'^2)}\eta' - \frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ y &= \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)(r + \sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}(\xi'^2+\eta'^2)}\xi' - \frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \end{aligned}$$

o, se meglio piace:

$$(5')\qquad \begin{aligned} x &= \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'^2+\eta'^2}\eta' - r\frac{2\xi'\eta\eta' - \xi\eta'^2 + \xi\xi'^2}{(\xi'^2+\eta'^2)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \\ y &= \frac{2(\eta\xi' - \xi\eta')}{\xi'^2+\eta'^2}\xi' - r\frac{2\eta'\xi\xi' - \eta\xi'^2 + \eta\eta'^2}{(\xi'^2+\eta'^2)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}. \end{aligned}$$

È questa la rappresentazione parametrica generale degli inviluppi di cui ci occupiamo. Ora se si pone

$$(6)\qquad \varphi(\lambda) = 2\frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\xi'^2+\eta'^2}\eta', \quad \psi(\lambda) = 2\frac{\eta\xi' - \eta'\xi}{\xi'^2+\eta'^2}\xi',$$

si trova

$$\varphi'(\lambda) = 2\frac{(\eta''\xi' - \eta'\xi'')(2\eta'\xi\xi' - \eta\xi'^2 + \eta\eta'^2)}{(\xi'^2+\eta'^2)^2},$$

$$\psi'(\lambda) = 2\frac{(\xi''\eta' - \xi'\eta'')(2\xi'\eta\eta' - \xi\eta'^2 + \xi\xi'^2)}{(\xi'^2+\eta'^2)^2},$$

$$\varphi'^2(\lambda) + \psi'^2(\lambda) = 4\frac{(\xi'\eta'' - \xi''\eta')^2(\xi^2+\eta^2)}{(\xi'^2+\eta'^2)^2},$$

e siffatte relazioni dimonstrano che le equazioni (5) sono del tipo (1), purchè alle funzioni φ, ψ si attribuiscono i valori (6): da ciò traesi subito l'enunciato teorema.

Le formole (5) si possono applicare comodamente allo studio degli inviluppi di cui ci occupiamo nel caso in cui Γ sia una curva razionale, giacchè allora la curva (6) è del pari razionale e le succitate formole di Cayley abilitano a determinare tutti i caratteri di quegli inviluppi.

Se invece la curva Γ è di genere $p > 0$, per ottenere la corrispondente rappresentazione analitica si potrebbe nelle (5) introdurre l'ipotesi che η fosse una data funzione algebrica di ξ; ma val forse meglio di riprendere *ex novo* la questione. Supporremo pertanto che la curva abbia per equazione

$$(7)\qquad f(\xi, \eta) = 0$$

ove f è una funzione algebrica razionale ed intera; la questione consiste allora nella ricerca dell' inviluppo dei cerchi (2'), i parametri ξ, η essendo legati dall' equazione (7). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, applicato nelle attuali ipotesi, dà le due equazioni:

$$-2x-2r\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+\mu\frac{\partial f}{\partial \xi}=0,\quad -2y-2r\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+\mu\frac{\partial f}{\partial \eta}=0.$$

Moltiplicandole per ξ e η, addizionando i prodotti e tenendo conto della (2) si trova

$$\mu=\frac{x^2+y^2-r^2}{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}},$$

valore che, sostituto nelle precedenti, le trasforma in queste altre

$$(8)\qquad \begin{aligned} x&=-\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+\frac{x^2+y^2-r^2}{2\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}\frac{\partial f}{\partial \xi},\\ y&=-\frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+\frac{x^2+y^2-r^2}{2\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}\frac{\partial f}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Quadrandole e sommandole si giunge alla seguente:

$$x^2+y^2=r^2+\frac{(x^2+y^2-r^2)^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right]}{4\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}-r\frac{x^2+y^2-r^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

Com' era prevedibile si ritrova quì la circonstanza favorevole che questa equazione è divisibile per $x^2+y^2-r^2$; liberata da tale fattore essa dà

$$\frac{x^2+y^2-r^2}{2\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}=2\frac{r+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cdot\frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2},$$

onde le (8) assumono questo nuovo aspetto:

$$(9)\qquad \begin{cases} x=-\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+2\frac{r+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cdot\frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi},\\ y=-\frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+2\frac{r+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cdot\frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Queste equazioni dànno la rappresentazione generale degli inviluppi in parola mediante funzioni dei due parametri ξ, η legati dalle relazione (7); tali inviluppi sono curve parallele a quella rappresentata dalle equazioni:

$$(10) \qquad x = 2\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}, \quad y = 2\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}.$$

A tale rappresentazione analitica se ne può sostituire un' altra in cui x, y sono rappresentati in funzione *razionale* di due parametri legati da una equazione algebrica; basta infatti sostituire ai parametri ξ, η i due σ, ϱ definiti come segue:

$$\xi = \varrho\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1}, \quad \eta = \varrho\frac{2\sigma}{\sigma^2+1}.$$

Genova, 20. Gennajo 1907.

Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

§ 1.

Die Funktion $E(x)$.

Bei den folgenden Untersuchungen wird eine von Herrn F. Klein eingeführte Funktion einer reellen Variabeln x eine wichtige Rolle spielen. Diese Funktion $E(x)$ ist durch die Festsetzung definiert, daß sie den Wert Null haben soll, wenn x nicht positiv ist, daß sie dagegen für ein positives Argument x der größten ganzen Zahl gleich sein soll, welche von x überschritten wird. Man erkennt leicht, daß die Funktion $E(x)$ auch durch die folgenden Gleichungen charakterisiert werden kann:

$$E(x) = 0, \text{ wenn } x \leqq 1, \tag{1}$$

$$E(x+1) = E(x) + 1, \text{ wenn } x > 0. \tag{2}$$

Die letzte Gleichung zieht unmittelbar die allgemeinere

$$E(x+n) = E(x) + n, \text{ wenn } x > 0, \tag{2'}$$

nach sich, unter n eine nicht negative ganze Zahl verstanden.

Durch das Symbol $[x]$ werde, wie üblich, die größte in x enthaltene ganze Zahl angedeutet. Ist nun x keine ganze Zahl und positiv, so ist offenbar $E(x) = [x]$, zugleich ist $1 - x < 1$, also $E(1-x) = 0$. Folglich gilt auch

$$E(x) + E(1-x) = [x].$$

Ist aber x keine ganze Zahl und negativ, so gilt

$$E(1-x) + E(x) = [1-x] = -[x].$$

Beide Gleichungen lassen sich in die folgende:

$$E(x) + E(1-x) = \operatorname{sgn} x \cdot [x] \tag{3}$$

zusammenziehen. Dabei bedeutet $\operatorname{sgn} x$ das Vorzeichen von x. Die Gleichung (3) gilt aber nur, wenn x keine ganze Zahl ist.

Mit Hilfe der Funktion $E(x)$ läßt sich in sehr bequemer Weise das Vorzeichen der Γ-Funktion ausdrücken. Indem ich die betreffende Formel entwickele, will ich jedoch in Rücksicht auf die späteren Untersuchungen statt der Γ-Funktion ihren reziproken Wert betrachten, der sich bekanntlich durch das beständig konvergierende Produkt

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} \cdot x \prod_1^\infty \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \tag{4}$$

darstellen läßt, wobei C die Mascheronische Konstante bezeichnet. Die Funktion $f(x)$ genügt den Funktionalgleichungen

$$f(x) = x f(x+1), \qquad f(x) f(1-x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x. \tag{5}$$

Wenn x positiv ist, so ist offenbar auch $f(x)$ positiv; dagegen hat $f(x) = x(x+1) \cdots (x+n-1) f(x+n)$ das Vorzeichen $(-1)^n$, wenn x zwischen $-n$ und $-n+1$ liegt. Demnach ist das Vorzeichen von $f(x)$ für jeden reellen Wert von x, der nicht mit einer der Nullstellen

$$x = 0, -1, -2, -3, \cdots$$

von $f(x)$ zusammenfällt, durch $(-1)^{E(1-x)}$ ausgedrückt:

$$\operatorname{sgn} f(x) = (-1)^{E(1-x)}. \tag{6}$$

Kombiniert man diese Gleichung mit (3) und (5), so findet man die auch leicht direkt zu beweisende Gleichung

$$\operatorname{sgn} \sin \pi x = (-1)^{E(x)+E(1-x)} = (-1)^{[x]}, \tag{7}$$

die für jeden nicht ganzzahligen reellen Wert von x gilt.

§ 2.

Normierung der Fundamentalzweige der P-Funktion.

Die Verzweigungswerte a, b, c der Riemannschen Funktion*)

$$P\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} \tag{8}$$

setze ich als reelle, endliche und der Größe nach geordnete Werte:

$$a < b < c, \tag{9}$$

voraus. Aus den Exponenten, zwischen welchen die Relation

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1 \tag{10}$$

*) Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. Werke, S. 67 (Leipzig, 1892).

besteht, bilde ich die folgenden Zahlen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda = \alpha' - \alpha, \quad \mu = \beta' - \beta, \quad \nu = \gamma' - \gamma, \\ \lambda_1 = \alpha' + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(1 + \lambda - \mu - \nu), \\ \mu_1 = \beta' + \gamma + \alpha = \frac{1}{2}(1 + \mu - \nu - \lambda), \\ \nu_1 = \gamma' + \alpha + \beta = \frac{1}{2}(1 + \nu - \lambda - \mu), \\ \varrho = \alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{1}{2}(1 + \lambda + \mu + \nu). \end{cases}$$

Die Exponenten sollen zunächst nur der einen Einschränkung unterliegen, daß die Exponentendifferenzen λ, μ, ν nicht ganzzahlig sind.

Zur Abkürzung werde ich in der Folge das Doppelverhältnis von irgend vier Größen z, z_1, z_2, z_3 durch

$$(12)\qquad (z z_1 z_2 z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

bezeichnen.

Die Fundamentalzweige der P-Funktion (8) mögen nun in der oberen Halbebene, d. h. in demjenigen Teile der z-Ebene, in welchem die zweite Koordinate von z positiv ist, gemäß den folgenden Gleichungen festgelegt werden:

$$(13)\qquad \begin{cases} y_\alpha = f(1-\lambda)(zabc)^\alpha \mathfrak{P}_\alpha, \quad y_{\alpha'} = f(1+\lambda)(zabc)^{\alpha'} \mathfrak{P}_{\alpha'}, \\ y_\beta = f(1-\mu)(zbca)^\beta \mathfrak{P}_\beta, \quad y_{\beta'} = f(1+\mu)(zbca)^{\beta'} \mathfrak{P}_{\beta'}, \\ y_\gamma = f(1-\nu)(zcab)^\gamma \mathfrak{P}_\gamma, \quad y_{\gamma'} = f(1+\nu)(zcab)^{\gamma'} \mathfrak{P}_{\gamma'}. \end{cases}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{P}_\alpha$ und $\mathfrak{P}_{\alpha'}$ Potenzreihen von $z - a$ mit dem konstanten Gliede 1, ebenso $\mathfrak{P}_\beta$, $\mathfrak{P}_{\beta'}$ Potenzreihen von $z - b$ und $\mathfrak{P}_\gamma$, $\mathfrak{P}_{\gamma'}$ Potenzreihen von $z - c$ je mit dem konstanten Gliede 1.

Die Potenzen der Doppelverhältnisse sollen in der oberen Halbebene durch die Festsetzung bestimmt werden, daß

$$(zabc)^\alpha = e^{\alpha \lg (zabc)}, \quad (zabc)^{\alpha'} = e^{\alpha' \lg (zabc)}, \text{ usw.}$$

gesetzt und die Logarithmen

$$\lg(zabc), \quad \lg(zbca), \quad \lg(zcab)$$

bez. in den Stücken $a \cdots b$, $b \cdots c$, $c \cdots a$ der Achse der reellen Zahlen reell genommen werden sollen.

Die auf diese Weise in der oberen Halbebene eindeutig fixierten Zweige der P-Funktion sind nun durch folgende Gleichungen miteinander verbunden:*)

*) Vgl. Riemann, l. c. S. 72, 73, 86, sowie Bolza, Über die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen

$$(14')\quad \begin{cases} y_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}\,(f(\mu_1)f(1-\lambda_1)\,e^{-i\pi\beta}\,y_\beta - f(\nu_1)f(1-\varrho)\,e^{-i\pi\beta'}\,y_{\beta'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\alpha}}{\sin\nu\pi}\,(f(\nu_1)f(1-\lambda_1)\,y_\gamma - f(\mu_1)f(1-\varrho)\,y_{\gamma'}), \\ y_{\alpha'} = \dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}\,(f(\varrho)f(1-\nu_1)\,e^{-i\pi\beta}\,y_\beta - f(\lambda_1)f(1-\mu_1)\,e^{-i\pi\beta'}\,y_{\beta'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\alpha'}}{\sin\nu\pi}\,(f(\varrho)f(1-\mu_1)\,y_\gamma - f(\lambda_1)f(1-\nu_1)\,y_{\gamma'}), \end{cases}$$

$$(14'')\quad \begin{cases} y_\beta = \dfrac{\pi}{\sin\nu\pi}\,(f(\nu_1)f(1-\mu_1)\,e^{-i\pi\gamma}\,y_\gamma - f(\lambda_1)\,f(1-\varrho)\,e^{-i\pi\gamma'}\,y_{\gamma'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\beta}}{\sin\lambda\pi}\,(f(\lambda_1)f(1-\mu_1)\,y_\alpha - f(\nu_1)f(1-\varrho)\,y_{\alpha'}), \\ y_{\beta'} = \dfrac{\pi}{\sin\nu\pi}\,(f(\varrho)f(1-\lambda_1)\,e^{-i\pi\gamma}\,y_\gamma - f(\mu_1)f(1-\nu_1)\,e^{-i\pi\gamma'}\,y_{\gamma'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\beta'}}{\sin\lambda\pi}\,(f(\varrho)f(1-\nu_1)\,y_\alpha - f(\mu_1)f(1-\lambda_1)\,y_{\alpha'}), \end{cases}$$

$$(14''')\quad \begin{cases} y_\gamma = \dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}\,(f(\lambda_1)f(1-\nu_1)\,e^{-i\pi\alpha}\,y_\alpha - f(\mu_1)f(1-\varrho)\,e^{-i\pi\alpha'}\,y_{\alpha'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\gamma}}{\sin\mu\pi}\,(f(\mu_1)f(1-\nu_1)\,y_\beta - f(\lambda_1)f(1-\varrho)\,y_{\beta'}), \\ y_{\gamma'} = \dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}\,(f(\varrho)f(1-\mu_1)\,e^{-i\pi\alpha}\,y_\alpha - f(\nu_1)f(1-\lambda_1)\,e^{-i\pi\alpha'}\,y_{\alpha'}) \\ \quad = \dfrac{\pi\,e^{i\pi\gamma'}}{\sin\mu\pi}\,(f(\varrho)f(1-\lambda_1)\,y_\beta - f(\nu_1)f(1-\mu_1)\,y_{\beta'}). \end{cases}$$

Die Gleichungen (14″) und (14‴) sind natürlich Folgen der Gleichungen (14′) und entstehen übrigens aus diesen durch die zyklische Permutation

$$(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha'\beta'\gamma')\,(abc).$$

Die Fundamentalzweige y_α, $y_{\alpha'}$, y_β, $y_{\beta'}$, y_γ, $y_{\gamma'}$ sind im Innern der oberen Halbebene eindeutige reguläre analytische Funktionen, die sich auch an allen Stellen der Achse der reellen Zahlen, abgesehen von den Stellen a, b, c, regulär verhalten. Ihre Entwicklungen, in der Umgebung der letzteren Stellen sind aus den Gleichungen (13) und (14) ersichtlich. Die in den Gleichungen (13) auftretenden Potenzreihen $\mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{P}_{\alpha'}$, $\cdots$ sind in einfacher Weise durch die Gaußsche Reihe

$$F(l, m, n, x) = 1 + \frac{lm}{1\cdot n}x + \frac{l(l+1)\,m(m+1)}{1\cdot 2\cdot n(n+1)}x^2 + \cdots$$

ausdrückbar. Man hat nämlich (vgl. Riemann, l. c. S. 82):

---

von Integralen der Riemannschen Differentialgleichung. Mathematische Annalen, Bd. 42, S. 526.

$$(13') \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_\alpha = (zbac)^\beta F(1-\varrho, \nu_1, 1-\lambda, (zabc)) \\ \qquad = (zbac)^{\beta'} F(\mu_1, 1-\lambda_1, 1-\lambda, (zabc)), \\ \mathfrak{P}_{\alpha'} = (zbac)^\beta F(\lambda_1, 1-\mu_1, 1+\lambda, (zabc)) \\ \qquad = (zbac)^{\beta'} F(1-\nu_1, \varrho, 1+\lambda, (zabc)). \end{cases}$$

Durch die Permutation $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha'\beta'\gamma')$ (abc) gehen hieraus die Darstellungen von $\mathfrak{P}_\beta$, $\mathfrak{P}_{\beta'}$, $\mathfrak{P}_\gamma$, $\mathfrak{P}_{\gamma'}$ durch die Gaußsche Reihe hervor.

Von nun ab will ich voraussetzen, daß die Exponenten $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ reelle Werte haben. Es sind dann auf der Achse der reellen Zahlen die Fundamentalzweige y_α, $y_{\alpha'}$ für das Stück $a \cdots b$, ebenso y_β, $y_{\beta'}$ für das Stück $b \cdots c$ und y_γ, $y_{\gamma'}$ für das Stück $c \cdots a$ reell. Sei nun weiter

$$(15) \qquad \alpha' > \alpha, \quad \beta' > \beta, \quad \gamma' > \gamma,$$

so daß die Exponentendifferenzen λ, μ, ν positiv sind. Ferner möge durch die, eventuell mit Indizes versehenen, Buchstaben p und q stets eine *positive* Konstante bezeichnet werden.

Wie aus (6) und (13) hervorgeht, lauten dann die Anfangsglieder der Entwicklungen von y_α und $y_{\alpha'}$ an der Stelle $z = a$ folgendermaßen:

$$(16) \qquad \begin{cases} y_\alpha = (-1)^{E(\lambda)} p_\alpha (z-a)^\alpha + \cdots, \\ y_{\alpha'} = \qquad\qquad p_{\alpha'} (z-a)^{\alpha'} + \cdots. \end{cases}$$

Für die Stelle $z = b$ findet man aus (13) und (14') zunächst

$$y_\alpha = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} (f(\mu_1) f(1-\lambda_1) f(1-\mu)\, p \cdot (b-z)^\beta + \cdots),$$

wenn $f(\mu_1) f(1-\lambda_1)$ nicht Null ist. Andernfalls kommt dagegen

$$y_\alpha = -\frac{\pi}{\sin \mu\pi} (f(\nu_1) f(1-\varrho) f(1+\mu)\, p \cdot (b-z)^{\beta'} + \cdots).$$

In Rücksicht auf (6) und (7) folgt nun:

$$(17) \qquad \begin{cases} y_\alpha = (-1)^{E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)} q_\alpha (b-z)^\beta + \cdots, & \text{wenn } f(\mu_1) f(1-\lambda_1) \neq 0, \\ y_\alpha = (-1)^{E(\mu)+E(\varrho)+E(1-\nu_1)+1} q_\alpha (b-z)^{\beta'} + \cdots, & \text{wenn } f(\mu_1) f(1-\lambda_1) = 0. \end{cases}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man beachtet, daß $\varrho > 0$, also auch $f(\varrho) > 0$ ist:

$$(18) \qquad \begin{cases} y_{\alpha'} = (-1)^{E(\nu_1)} q_{\alpha'} (b-z)^\beta + \cdots, & \text{wenn } f(1-\nu_1) \neq 0, \\ y_{\alpha'} = (-1)^{E(\mu)+E(\mu_1)+E(1-\lambda_1)+1} q_{\alpha'} (b-z)^{\beta'} + \cdots, & \text{wenn } f(1-\nu_1) = 0. \end{cases}$$

Die in den Formeln (16), (17), (18) auftretenden Potenzen von $z-a$ und $b-z$ sind reell zu nehmen für reelle positive Werte von $z-a$ bez. $b-z$.

Die Gleichungen (17) und (18) lassen sich noch etwas vereinfachen.

Wenn $f(\mu_1) f(1-\lambda_1) = 0$ ist, so hat entweder λ_1 oder $1-\mu_1$ einen positiven ganzzahligen Wert. Im ersten Falle folgt aus

$$\mu + \lambda_1 = 1 - \nu_1, \quad \varrho + \lambda_1 = 1 + \lambda,$$

daß

$$E(1-\nu_1) = E(\mu) + \lambda_1, \quad E(\nu_1) = 0, \quad E(\lambda) + 1 = E(\varrho) + \lambda_1$$

und folglich

$$(17') \qquad E(\mu) + E(\varrho) + E(1-\nu_1) + 1 \equiv E(\lambda) + E(\nu_1) \pmod 2$$

ist. Im zweiten Falle gilt dieselbe Kongruenz. Denn jetzt folgt aus

$$\varrho = \mu + (1-\mu_1), \quad \nu_1 = (1-\mu_1) - \lambda,$$

daß

$$E(\varrho) = E(\mu) + (1-\mu_1), \quad [\nu_1] = [-\lambda] + (1-\mu_1),$$

d. i. nach (3)

$$E(\varrho) = E(\mu) + (1-\mu_1), \quad \pm(E(\nu_1) + E(1-\nu_1)) = -E(1+\lambda) + (1-\mu_1),$$

woraus wieder die Kongruenz (17′) hervorgeht.

Wenn $f(1-\nu_1) = 0$ ist, so hat ν_1 einen positiven ganzzahligen Wert und es folgt dann aus

$$\lambda + \nu_1 = 1 - \mu_1, \quad \mu + \nu_1 = 1 - \lambda_1,$$

daß

$$E(\mu_1) = 0, \quad E(1-\lambda_1) = E(\mu) + \nu_1$$

und folglich

$$(18') \qquad E(\mu) + E(\mu_1) + E(1-\lambda_1) + 1 \equiv \nu_1 + 1 \equiv E(\nu_1) \pmod 2$$

ist. Vermöge der Kongruenzen (17′) und (18′) lassen sich die Entwicklungsformeln (17) und (18) durch die folgenden ersetzen:

$$(19) \quad \begin{cases} y_\alpha = (-1)^{E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)} q_\alpha (b-z)^\beta + \cdots, & \text{wenn } f(\mu_1) f(1-\lambda_1) \neq 0, \\ y_\alpha = (-1)^{E(\lambda)+E(\nu_1)} q_\alpha (b-z)^{\beta'} + \cdots, & \text{wenn } f(\mu_1) f(1-\lambda_1) = 0, \\ y_{\alpha'} = (-1)^{E(\nu_1)} q_{\alpha'} (b-z)^\beta + \cdots, & \text{wenn } f(1-\nu_1) \neq 0, \\ y_{\alpha'} = (-1)^{E(\nu_1)} q_{\alpha'} (b-z)^{\beta'} + \cdots, & \text{wenn } f(1-\nu_1) = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (11) geht hervor, daß von den Zahlen λ_1, μ_1, ν_1, ϱ höchstens eine ganzzahlig sein kann; denn andernfalls würde eine der Exponentendifferenzen λ, μ, ν eine ganze Zahl sein. Daher können jedenfalls die Gleichungen

$$f(\mu_1) f(1-\lambda_1) = 0, \quad f(1-\nu_1) = 0$$

niemals gleichzeitig bestehen.

Den Gleichungen (16), (19) entsprechende Gleichungen gelten natürlich für die Fundamentalzweige y_{β}, $y_{\beta'}$ und y_γ, $y_{\gamma'}$. Sie entstehen aus jenen durch die zyklische Permutation $(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha'\beta'\gamma')\,(abc)$.

§ 3.

Indizes.

Weiterhin werde ich mich häufig der Rechnung mit Cauchyschen Indizes bedienen, weshalb ich hier die hauptsächlichen, diese Indizes betreffenden Sätze zusammenstelle.

Es sei φ eine in dem Intervalle

$$a \leqq t \leqq b \tag{20}$$

reelle und, abgesehen von einer endlichen Zahl im Innern des Intervalles liegender Stellen, eindeutige und stetige Funktion von t. Diese Ausnahmestellen seien

$$t_1, t_2, \cdots, t_r. \tag{21}$$

Dieselben sollen „polare" Unstetigkeitspunkte von φ sein, d. h. es soll in einer genügend kleinen Umgebung $t_i - \delta \cdots t_i + \delta$ des Punktes t_i der reziproke Wert von φ dadurch zu einer stetigen Funktion von t werden, daß man ihm im Punkte t_i selbst den Wert Null beilegt. Ein solcher Unstetigkeitspunkt ist offenbar für die ursprüngliche Funktion φ dadurch charakterisiert, daß der Wert von φ mit bestimmtem Vorzeichen unendlich wird, sowohl wenn man t von links her, als auch wenn man t von rechts her nach t_i konvergieren läßt. Für die einzelne Unstetigkeitsstelle t_i soll nun

$$\varepsilon(t_i) = 0, \quad +1 \quad \text{oder} \quad -1 \tag{22}$$

gesetzt werden, je nachdem φ beim Überschreiten der Stelle t_i sein Vorzeichen nicht wechselt, oder von negativen zu positiven oder von positiven zu negativen Werten übergeht.

Bezeichnet δ eine unendlich kleine positive Größe, so ist, wie leicht zu sehen,

$$\varepsilon(t_i) = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sgn}\varphi(t_i + \delta) - \operatorname{sgn}\varphi(t_i - \delta)]. \tag{23}$$

Unter dem Index $J_a^b(\varphi)$ der Funktion φ für das Intervall $a \leqq t \leqq b$ versteht man nun die Summe

$$J_a^b(\varphi) = \varepsilon(t_1) + \varepsilon(t_2) + \cdots + \varepsilon(t_r). \tag{24}$$

Diese Definition wird durch die Festsetzung ergänzt, daß

$$J_a^b(\varphi) = 0 \tag{25}$$

sein soll, wenn φ eine für das ganze Intervall $a \leqq t \leqq b$ stetige Funktion von t ist.

Statt $J_a^b(\varphi)$ werde ich bisweilen auch kürzer $J(\varphi)$ schreiben. Bei dieser Schreibweise muß dann natürlich das Intervall $a \leqq t \leqq b$, für welches der Index genommen werden soll, noch ausdrücklich angegeben werden.

Aus der Definition des Index ergeben sich nun ohne Schwierigkeit die folgenden Sätze:

I. Bezeichnet c einen zwischen a und b liegenden Stetigkeitspunkt der Funktion φ, so ist

$$J_a^b(\varphi) = J_a^c(\varphi) + J_c^b(\varphi). \tag{26}$$

II. Besitzen die Funktionen φ_1 und φ_2 im Intervalle $a \leqq t \leqq b$ keinen gemeinsamen Unstetigkeitspunkt, so ist

$$J(\varphi_1 + \varphi_2) = J(\varphi_1) + J(\varphi_2); \tag{27}$$

insbesondere gilt

$$J(\varphi_1 + \varphi_2) = J(\varphi_1), \tag{28}$$

wenn φ_2 durchaus stetig ist.

Die in den Gleichungen (27), (28) auftretenden Indizes sind sämtlich für das Intervall $a \cdots b$ zu nehmen.

III. Bedeutet c eine nicht verschwindende Konstante, so ist

$$J(c\varphi) = \operatorname{sgn} c \cdot J(\varphi), \tag{29}$$

wobei die beiden Indizes sich auf dasselbe Intervall beziehen.

IV. Wenn ebenso wie φ auch $\frac{1}{\varphi}$ für das Intervall $a \leqq t \leqq b$ nur einzelne, im Innern des Intervalles liegende polare Unstetigkeiten hat, so gilt zwischen den auf dieses Intervall bezogenen Indizes von φ und $\frac{1}{\varphi}$ die Relation

$$J(\varphi) + J\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}\varphi(b) - \operatorname{sgn}\varphi(a)). \tag{30}$$

Die linke Seite dieser Relation gibt nämlich an, um wie viel häufiger φ von negativen zu positiven als von positiven zu negativen Werten übergeht, während t das Intervall $a \cdots b$ durchläuft. Dieser Überschuß ist aber offenbar 0, wenn $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ gleiches Zeichen haben, dagegen $+1$, wenn $\varphi(b)$ positiv und $\varphi(a)$ negativ ist, und endlich -1, wenn $\varphi(b)$ negativ und $\varphi(a)$ positiv ist.

V. Es seien u, v, u_1, v_1 reelle Funktionen der Veränderlichen t, die im Intervalle $a \leqq t \leqq b$ stetig sind, an den Grenzen des Intervalles sämtlich von Null verschieden sind, im Innern des Intervalles nur endlich viele Nullstellen besitzen und der Bedingung genügen, daß für das ganze Intervall

$$uv_1 - vu_1 > 0 \tag{31}$$

ist. Dann besteht die Gleichung

$$J\left(\frac{u}{v}\right) = J\left(\frac{u_1}{v_1}\right) + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(vv_1)_b - \operatorname{sgn}(vv_1)_a), \tag{32}$$

wobei die Indizes auf das Intervall $a \cdots b$ zu beziehen sind.*)

*) Man vergleiche zu diesem Satze die Abhandlung von P. Stäckel: Über Systeme von Funktionen reeller Variabeln, Crelles Journal, Bd. 112, S. 311.

Infolge der Bedingung (31) können u und v niemals gleichzeitig verschwinden. Der Quotient $\frac{u}{v}$ besitzt daher die Nullstellen von v zu polaren Unstetigkeitsstellen. Die nämlichen Stellen sind auch polare Unstetigkeitsstellen von $\frac{v_1}{v}$. Da nun wegen (31) u und v_1 an den Nullstellen von v das gleiche Vorzeichen besitzen, so ist

$$J\left(\frac{u}{v}\right) = J\left(\frac{v_1}{v}\right).$$

Auf dieselbe Weise folgt

$$J\left(\frac{u_1}{v_1}\right) = -J\left(\frac{v}{v_1}\right).$$

Kombiniert man nun diese Gleichungen mit dem aus (30) hervorgehenden Werte von

$$J\left(\frac{v_1}{v}\right) + J\left(\frac{v}{v_1}\right),$$

so ergibt sich ohne Schwierigkeit die Gleichung (32).

VI. Es sei u eine reelle Funktion von t, die im Intervalle $a \leqq t \leqq b$ ein stetige Ableitung $u' = \frac{du}{dt}$ besitzt. Die Funktion u soll nur endlich viele und zwar sämtlich im Innern des Intervalles liegende Nullstellen haben; ferner sollen u und u' niemals gleichzeitig verschwinden. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von u gleich dem für das Intervall $a \cdots b$ genommenen Index von $\frac{u'}{u}$.

Beim Überschreiten einer Nullstelle von u geht nämlich $\frac{u'}{u}$ stets von negativen zu positiven Werten über; nach Gleichung (24) setzt sich daher der Index von $\frac{u'}{u}$ aus so vielen Einheiten zusammen, als die Funktion u Nullstellen besitzt.

§ 4.

Die reellen Nullstellen der P-Funktion.

Es wurde schon oben bemerkt, daß für das Stück $a \cdots b$ der Achse der reellen Zahlen die Fundamentalzweige y_α und $y_{\alpha'}$ reelle Werte besitzen. Jeder Zweig der P-Funktion, welcher dieselbe Eigenschaft hat, drückt sich offenbar aus in der Form

$$y = k y_\alpha + k' y_{\alpha'}, \tag{33}$$

unter k und k' reelle Konstante verstanden.

In diesem Paragraphen soll es sich nun darum handeln, die Anzahl der Nullstellen der Funktion y, die im Innern des Intervalles

$$a \leqq z \leqq b$$

liegen, zu bestimmen. Diese Anzahl ist eine endliche, da die (aus (16), (17) und (18) folgenden) Entwicklungen von y in der Umgebung der Stellen a und b zeigen, daß die letzteren Stellen keine Häufungspunkte von Nullstellen der Funktion y sein können.

Bezeichnet δ eine unendlich kleine positive Größe und bezieht man die im folgenden auftretenden Cauchyschen Indizes sämtlich auf das Intervall

$$a + \delta \leq z \leq b - \delta,$$

so gibt nach Satz VI. des vorigen Paragraphen

$$J\left(\frac{y'}{y}\right) = J\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dz}\right) \tag{34}$$

die in Rede stehende Anzahl von Nullstellen an.

Nun folgt aus (33)

$$y' y_{\alpha'} - y y'_{\alpha'} = k(y'_\alpha y_{\alpha'} - y_\alpha y'_{\alpha'}). \tag{35}$$

Nach bekannten Sätzen bewahrt die rechte Seite — wenn zunächst k von Null verschieden vorausgesetzt wird — zwischen a und b ein konstantes Zeichen. Um dieses zu bestimmen, entwickle man mit Hilfe von (16) nach Potenzen von $(z-a)$. Man findet so

$$y'_\alpha y_{\alpha'} - y_\alpha y'_{\alpha'} = p_\alpha p_{\alpha'}(\alpha - \alpha')\,(-1)^{E(\lambda)}\,(z-a)^{\alpha+\alpha'-1} + \cdots$$

und das zu bestimmende Vorzeichen ist daher

$$-\operatorname{sgn} k \cdot (-1)^{E(\lambda)}.$$

Aus den Sätzen III. und V. des vorigen Paragraphen folgt nun:

$$J\left(\frac{y'}{y}\right) = J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sgn} k\,(-1)^{E(\lambda)}\,(\operatorname{sgn}(y y_{\alpha'})_{b-\delta} - \operatorname{sgn}(y y_{\alpha'})_{a+\delta}).$$

Das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(y y_{\alpha'})_{a+\delta}$ erweist sich auf Grund der Entwicklung von

$$y y_{\alpha'} = k y_\alpha y_{\alpha'} + k' y_{\alpha'}^2$$

nach Potenzen von $z-a$ gleich dem Vorzeichen von $k(-1)^{E(\lambda)}$. Daher kommt

$$J\left(\frac{y'}{y}\right) = J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right) + \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^{E(\lambda)} \operatorname{sgn}(k y y_{\alpha'})_{b-\delta}). \tag{36}$$

Für den Fall, daß k nicht Null ist, wird durch diese Gleichung die Anzahl der zwischen a und b liegenden Nullstellen von y auf die entsprechende Anzahl für den zum größeren Exponenten gehörenden Fundamentalzweig $y_{\alpha'}$ zurückgeführt. Die erstere Anzahl ist nach (36) offenbar entweder gerade so groß oder um 1 größer als die letztere Anzahl.

Im Falle $k = 0$ ist $y = k' y_{\alpha'}$, und folglich hat dann y dieselbe Anzahl von Nullstellen zwischen a und b wie $y_{\alpha'}$.

Es erübrigt, die Anzahl der Nullstellen von $y_{\alpha'}$ zwischen a und b, also den Wert des Index

$$J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right),$$

festzustellen.

Aus der Gleichung

$$P\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\delta}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\varepsilon} P\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha-\delta, & \beta-\varepsilon, & \gamma+\delta+\varepsilon & z \\ \alpha'-\delta, & \beta'-\varepsilon, & \gamma'+\delta+\varepsilon & \end{pmatrix}$$

schließt man leicht, indem man $\delta = \alpha$, $\varepsilon = \beta$ nimmt, daß die Anzahl der Nullstellen von $y_{\alpha'}$ zwischen a und b nur von den Exponentendifferenzen $\alpha' - \alpha = \lambda$, $\beta' - \beta = \mu$, $\gamma' - \gamma = \nu$ abhängen kann. Sie darf daher als Funktion von λ, μ, ν oder auch — da vermöge (11) λ, μ, ν durch λ_1, μ_1, ν_1 ausgedrückt werden können — als Funktion von λ_1, μ_1, ν_1 angesehen werden. Ich setze dementsprechend

$$J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right) = \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1). \tag{37}$$

Die Determinante

$$y_\alpha y'_{\alpha'} - y_{\alpha'} y'_\alpha$$

besitzt zwischen a und b das konstante Vorzeichen $(-1)^{E(\lambda)}$. Daher ist auch

$$J\left(\frac{y_\alpha}{y_{\alpha'}}\right) = (-1)^{E(\lambda)} J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right) = (-1)^{E(\lambda)} \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1). \tag{38}$$

Zur Bestimmung der Anzahl $\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ betrachte ich nun neben der ursprünglichen P-Funktion noch die ihr benachbarte Funktion

$$P\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha-1, & \beta, & \gamma & z \\ \alpha', & \beta'+1, & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

Die mit einem oberen Striche versehenen Buchstaben mögen für diese Funktion die analoge Bedeutung haben, wie die ungestrichenen Buchstaben für die ursprüngliche P-Funktion. Es ist dann offenbar

$$\bar\lambda = \lambda + 1,\ \bar\mu = \mu + 1,\ \bar\nu = \nu,\ \bar\lambda_1 = \lambda_1,\ \bar\mu_1 = \mu_1,\ \bar\nu_1 = \nu_1 - 1,\ \bar\varrho = \varrho + 1 \tag{39}$$

und die Gleichungen (14′) ergeben daher

$$\begin{cases} \bar y_\alpha = -\dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}\left(f(\mu_1) f(1-\lambda_1)\, e^{-i\pi\beta}\, \bar y_\beta + f(\nu_1 - 1) f(-\varrho)\, e^{-i\pi\beta'}\, \bar y_{\beta'}\right) \\ \qquad = -\dfrac{\pi\, e^{i\pi\alpha}}{\sin\nu\pi}\left(f(\nu_1 - 1) f(1-\lambda_1)\, \bar y_\gamma - f(\mu_1) f(-\varrho)\, \bar y_{\gamma'}\right), \\ \bar y_{\alpha'} = -\dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}\left(f(\varrho+1) f(2-\nu_1)\, e^{-i\pi\beta}\, \bar y_\beta + f(\lambda_1) f(1-\mu_1)\, e^{-i\pi\beta'}\, \bar y_{\beta'}\right) \\ \qquad = \dfrac{\pi\, e^{i\pi\alpha'}}{\sin\nu\pi}\left(f(\varrho+1) f(1-\mu_1)\, \bar y_\gamma - f(\lambda_1) f(2-\nu_1)\, \bar y_{\gamma'}\right). \end{cases} \tag{40}$$

Wenn nun ν_1 von 1 verschieden vorausgesetzt wird, so zeigt der Vergleich der Gleichungen (14′) und (40), daß zwischen den Funktionenpaaren

$$(y_\alpha, y_{\alpha'}), \quad (y_\beta, y_{\beta'}), \quad (y_\gamma, y_{\gamma'})$$

genau dieselben linearen homogenen Relationen bestehen, wie zwischen den Funktionenpaaren

$$(\overline{y}_\alpha, \varrho(1-\nu_1)\overline{y}_{\alpha'}), \quad (-\overline{y}_\beta, \varrho(1-\nu_1)\overline{y}_{\beta'}), \quad ((1-\nu_1)\overline{y}_\gamma, \varrho\overline{y}_{\gamma'}).$$

Daraus folgt aber (Riemann, l. c. § 6)

$$(41) \quad \overline{y}_\alpha y_{\alpha'} - \varrho(1-\nu_1)\overline{y}_{\alpha'} y_\alpha = C\cdot(z-a)^{\alpha+\alpha'-1}(z-b)^{\beta+\beta'}(z-c)^{\gamma+\gamma'},$$

wo C eine Konstante bezeichnet. Aus dieser Gleichung schließt man, daß

$$\overline{y}_\alpha y_{\alpha'} - \varrho(1-\nu_1)\overline{y}_{\alpha'} y_\alpha$$

im Intervalle $a<z<b$ konstantes Vorzeichen besitzt und die Entwicklung an der Stelle $z=a$ zeigt, daß dieses konstante Vorzeichen

$$\operatorname{sgn} f(-\lambda) = (-1)^{E(1+\lambda)} = (-1)^{E(\lambda)+1}$$

ist. Nach den Sätzen des vorigen Paragraphen ist daher

$$J\left(\frac{y_\alpha}{y_{\alpha'}}\right) = \operatorname{sgn}(1-\nu_1) J\left(\frac{\overline{y}_\alpha}{\overline{y}_{\alpha'}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1-\nu_1)(-1)^{E(\lambda)}[\operatorname{sgn}(y_{\alpha'}\overline{y}_{\alpha'})_{b-\delta} - \operatorname{sgn}(y_{\alpha'}\overline{y}_{\alpha'})_{a+\delta}]$$

oder nach (38)

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = -\operatorname{sgn}(1-\nu_1)\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1-1)$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1-\nu_1)[\operatorname{sgn}(y_{\alpha'}\overline{y}_{\alpha'})_{b-\delta} - \operatorname{sgn}(y_\alpha \overline{y}_{\alpha'})_{a+\delta}].$$

Die Entwicklungsformeln (16) und (18) ergeben nun weiter

$$(42) \quad \operatorname{sgn}(y_{\alpha'}\overline{y}_{\alpha'})_{a+\delta} = +1$$

und

$$(43) \quad \operatorname{sgn}(y_{\alpha'}\overline{y}_{\alpha'})_{b-\delta} = -1 \quad \text{oder} \quad (-1)^{E(\nu_1)+E(\nu_1-1)},$$

je nachdem ν_1 eine Zahl der Reihe $2, 3, 4, \cdots$ ist oder nicht.

Daher kommt

$$(44) \quad \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \operatorname{sgn}(\nu_1-1)\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1-1)$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\nu_1-1)[1-(-1)^{E(\nu_1)+E(\nu_1-1)}]$$

im allgemeinen, und

$$(44') \quad \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1-1) + 1,$$

wenn ν_1 eine Zahl der Reihe $2, 3, 4, \cdots$ ist.

Die auf diese Weise gewonnenen Rekursionsformeln gestatten nun die Bestimmung der Anzahl $\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$. Ist nämlich $\nu_1 < 1$, so ergibt (44)

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) + \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1-1) = 0$$

und, da beide Glieder der linken Seite dieser Gleichung nicht negative ganze Zahlen bedeuten,

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = 0, \text{ wenn } \nu_1 < 1. \tag{45}$$

Ist aber $\nu_1 > 1$, so ergeben (44) und (44′) übereinstimmend

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1 - 1) + 1$$

und hieraus folgt, in Rücksicht auf (45),

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = E(\nu_1), \text{ wenn } \nu_1 > 1 \text{ keine ganze Zahl ist,} \tag{46}$$

und

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \varphi(\lambda_1, \mu_1, 1) + (\nu_1 - 1), \text{ wenn } \nu_1 > 1 \text{ eine ganze Zahl ist.} \tag{47}$$

Da nun endlich für $\nu_1 = 1$

$$y_{\alpha'} = \text{const. } (z-a)^{\alpha'}(z-b)^{\beta'}(z-c)^{\gamma}$$

wird, so ist

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, 1) = 0. \tag{48}$$

Die Gleichungen (45) bis (48) lassen sich in die eine Gleichung

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = E(\nu_1) \tag{49}$$

zusammenfassen.

Hiermit sind wir zu folgendem, zuerst von Herrn Klein*) auf ganz anderem Wege gefundenen Satze gelangt:

Satz 1. *Die Anzahl der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen des zum größeren Exponenten gehörenden Fundamentalzweiges $y_{\alpha'}$ beträgt*

$$E(\nu_1) = E\left(\frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}\right). \tag{50}$$

Die entsprechende Anzahl für den zum kleineren Exponenten gehörenden Fundamentalzweig y_α ergibt sich leicht aus (36). Indem man nämlich in (33) und (36) $k = 1$, $k' = 0$ nimmt, kommt

$$J\left(\frac{y'_\alpha}{y_\alpha}\right) = J\left(\frac{y'_{\alpha'}}{y_{\alpha'}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{E(\lambda)} \operatorname{sgn} (y_\alpha y_{\alpha'})_{b-\delta}\right). \tag{51}$$

Das hier auftretende Signum ist nun aus den Entwicklungen (19) zu bestimmen. Man erhält ersichtlich

$$\operatorname{sgn} (y_\alpha y_{\alpha'})_{b-\delta} = (-1)^{E(\lambda)} \quad \text{oder} \quad (-1)^{E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(\nu_1)},$$

je nachdem $f(\mu_1)f(1-\lambda_1) = 0$ ist oder nicht.

*) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, diese Annalen Bd. 37, S. 573. Vgl. auch meine unter gleichem Titel erschienene Arbeit in Bd. 38 dieser Annalen, sowie L. Gegenbauer, „Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe“, Berichte der Akademie zu Wien 1891, und „Über die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe“, Monatshefte f. Mathematik Bd. 2.

Demzufolge gilt der

Satz 2. *Die Anzahl der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen des zum kleineren Exponenten gehörigen Fundamentalzweiges y_α beträgt*

$$E\left(\frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2}\right)+\varepsilon, \tag{52}$$

wobei $\varepsilon=0$ ist, wenn λ_1 oder $1-\mu_1$ eine positive ganze Zahl ist, dagegen

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{E(\lambda)+E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(\nu_1)}\right)$$

in jedem anderen Falle.

Das in der Gleichung (36) auftretende Signum

$$\operatorname{sgn}(kyy_{\alpha'})_{b-\delta}=\operatorname{sgn}((k^2y_\alpha+kk'y_{\alpha'})y_{\alpha'})_{b-\delta}=\operatorname{sgn}\left(y_\alpha+\frac{k'}{k}y_{\alpha'}\right)_{b-\delta}\cdot(-1)^{E(\nu_1)}$$

ist folgendermaßen zu berechnen: Nach (14′) ist

$$y_\alpha+\frac{k'}{k}y_{\alpha'}=\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\Big[\Big(f(\mu_1)f(1-\lambda_1)+\frac{k'}{k}f(\varrho)f(1-\nu_1)\Big)e^{-i\pi\beta}y_\beta$$
$$-\Big(f(\nu_1)f(1-\varrho)+\frac{k'}{k}f(\lambda_1)f(1-\mu_1)\Big)e^{-i\pi\beta'}y_{\beta'}\Big]$$

und ferner (vgl. (16))

$$e^{-i\pi\beta}y_\beta=(-1)^{E(\mu)}p_\beta(b-z)^\beta+\cdots,\quad e^{-i\pi\beta'}y_{\beta'}=p_{\beta'}(b-z)^{\beta'}+\cdots.$$

Da $\sin\mu\pi$ das Vorzeichen $(-1)^{E(\mu)}$ besitzt, so ergibt sich offenbar

$$\operatorname{sgn}\left(y_\alpha+\frac{k'}{k}y_{\alpha'}\right)_{b-\delta}=\operatorname{sgn}\left(f(\mu_1)f(1-\lambda_1)+\frac{k'}{k}f(\varrho)f(1-\nu_1)\right)$$

oder

$$(-1)^{E(\mu)+1}\operatorname{sgn}\left(f(\nu_1)f(1-\varrho)+\frac{k'}{k}f(\lambda_1)f(1-\mu_1)\right),$$

je nachdem

$$f(\mu_1)f(1-\lambda_1)+\frac{k'}{k}f(\varrho)f(1-\nu_1)\neq 0\quad\text{oder}\quad=0$$

ist. Im letzteren Falle, wenn also

$$f(\mu_1)f(1-\lambda_1)+\frac{k'}{k}f(\varrho)f(1-\nu_1)=0$$

ist, ergibt eine leichte Rechnung

$$f(\nu_1)f(1-\varrho)+\frac{k'}{k}f(\lambda_1)f(1-\mu_1)=-\frac{1}{\pi^2}\frac{\sin\pi\mu\sin\pi\lambda}{f(\varrho)f(1-\nu_1)}=(-1)^{E(\mu)+1+E(\lambda)+E(\nu_1)}p,$$

wo p eine positive Größe vorstellt. Also ist dann

$$\operatorname{sgn}\left(y_\alpha+\frac{k'}{k}y_{\alpha'}\right)_{b-\delta}=(-1)^{E(\lambda)+E(\nu_1)}.$$

Es gilt demnach der

Satz 3. *Bezeichnen k und k' zwei reelle Konstante, von denen die erstere nicht Null ist, so ist die Anzahl der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen von*

$$y = k y_\alpha + k' y_{\alpha'}$$

gleich

$$E(\nu_1) + \varepsilon = E\left(\frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}\right) + \varepsilon, \tag{53}$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E(\lambda)+E(\nu_1)} \operatorname{sgn}\left(f(\mu_1) f(1-\lambda_1) + \frac{k'}{k} f(\varrho) f(1-\nu_1)\right)\right]$$

oder

$$\varepsilon = 0$$

ist, je nachdem

$$f(\mu_1) f(1-\lambda_1) + \frac{k'}{k} f(\varrho) f(1-\nu_1)$$

von Null verschieden oder Null ist.

Nach den Formeln (14″) lassen sich mit Hilfe der Sätze 1, 2, 3 die Anzahlen der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen von y_β und $y_{\beta'}$ bestimmen.

Um y_β zu erhalten, muß man

$$k = f(\lambda_1) f(1-\mu_1), \qquad k' = -f(\nu_1) f(1-\varrho)$$

nehmen. Ist μ_1 oder $1 - \lambda_1$ eine positive ganze Zahl, so wird $k = 0$ und y_β hat dieselben Nullstellen wie $y_{\alpha'}$, also $E(\nu_1)$ reelle Nullstellen zwischen a und b.

In jedem andern Falle ist $k \neq 0$, und also nach Satz 3 die in Rede stehende Anzahl

$$E(\nu_1) + \varepsilon,$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E(\lambda)+E(\nu_1)} \operatorname{sgn}\left(f(\mu_1) f(1-\lambda_1) - \frac{f(\nu_1) f(1-\varrho)}{f(\lambda_1) f(1-\mu_1)} f(\varrho) f(1-\nu_1)\right)\right].$$

Der unter dem Signum stehende Ausdruck ist

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{\sin \mu_1 \pi \sin \lambda_1 \pi - \sin \varrho \pi \sin \nu_1 \pi}{f(\lambda_1) f(1-\mu_1)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin \lambda \pi \sin \mu \pi}{f(\lambda_1) f(1-\mu_1)}$$

und hat also das Vorzeichen

$$(-1)^{E(\lambda)+E(\mu)+E(1-\lambda_1)+E(\mu_1)}.$$

Daher kommt nun

Satz 4. *Die Anzahl der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen von y_β beträgt*

$$E(\nu_1) + \varepsilon,$$

wobei

$$\varepsilon = 0,$$

wenn μ_1 *oder* $1-\lambda_1$ *eine positive ganze Zahl ist, dagegen*

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[1-(-1)^{E(\mu)+E(1-\lambda_1)+E(\mu_1)+E(\nu_1)}]$$

in jedem anderen Falle.

Nach (14′) ergibt die Annahme

$$k = f(\varrho)\, f(1-\nu_1), \qquad k' = -f(\mu_1)\, f(1-\lambda_1)$$

den Fundamentalzweig $y_{\beta'}$. Ist $k=0$, so wird $y_{\beta'}$ proportional mit $y_{\alpha'}$; ist aber $k \neq 0$, so liegt der Fall des Satzes 3 vor, in welchem

$$f(\mu_1)\, f(1-\lambda_1) + \frac{k'}{k} f(\varrho)\, f(1-\nu_1) = 0$$

ist.

Man erhält also den

Satz 5. *Die Anzahl der reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen von* $y_{\beta'}$ *beträgt stets* $E(\nu_1)$.

Durch die zyklische Vertauschung $(abc)\,(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha'\beta'\gamma')$ gehen aus den vorstehend bewiesenen Sätzen entsprechende Sätze für die Zweige $y_\beta, y_{\beta'}$ resp. $y_\gamma, y_{\gamma'}$ hervor.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man leicht für einen beliebig gegebenen Zweig y der P-Funktion die Anzahlen seiner reellen Nullstellen im Innern der Stücke ab, bc, ca der reellen Zahlenachse feststellen. Denn jeder solche Zweig y läßt sich durch jedes der Funktionenpaare $(y_\alpha, y_{\alpha'})$, $(y_\beta, y_{\beta'})$, $(y_\gamma, y_{\gamma'})$ linear und homogen ausdrücken. Ist nun z. B.

$$y = Cy_\alpha + C' y_{\alpha'},$$

so wird y zwischen a und b keine reelle Nullstelle besitzen, falls der Quotient $C : C'$ komplex ist. Ist aber dieser Quotient reell, so kann man y auf die Form

$$y = m(ky_\alpha + k' y_{\alpha'})$$

bringen, wo m nicht Null und k und k' reell sind. Dann liest man aus Satz 3 die Anzahl der reellen Nullstellen von y, die zwischen a und b liegen, sofort ab.

Das Ziel der nun folgenden Untersuchungen wird es sein, für einen beliebig gegebenen Zweig

$$y = Cy_\alpha + C' y_{\alpha'} = Dy_\beta + D' y_{\beta'} = Ey_\gamma + E' y_{\gamma'} \tag{54}$$

der P-Funktion auch die Anzahl seiner imaginären, im Innern der oberen Halbebene gelegenen Nullstellen zu bestimmen.

§ 5.

Erledigung einiger speziellen Fälle.

Zur Vereinfachung der Darstellung will ich zunächst diejenigen speziellen Fälle erledigen, in welchen der Zweig y der P-Funktion, für welchen die Zahl der imaginären Nullstellen bestimmt werden soll, sich durch Multiplikation mit Potenzen von $z-a$, $z-b$, $z-c$ in eine eindeutige Funktion von z verwandeln läßt.

Es leuchtet ein, daß der betrachtete Zweig dann, abgesehen von konstanten Faktoren, mit je einem der zu a, b, c gehörenden Fundamentalzweige zusammenfallen muß. Nach den Verwandlungsformeln (14′) liegt ein solcher spezieller Fall dann und nur dann vor, wenn eine der Zahlen λ_1, μ_1, ν_1, ϱ einen ganzzahligen Wert hat.

Da bei der Permutation $(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha'\beta'\gamma')\,(abc)$ die Zahlen λ_1, μ_1, ν_1 sich ebenfalls permutieren, so genügt es, die beiden Fälle, in welchen ϱ oder λ_1 ganzzahlig ist, ins Auge zu fassen.

I) ϱ *besitzt einen (wegen* $\varrho > 0$ *notwendig positiven) ganzzahligen Wert.*

Es ist dann $f(1-\varrho) = 0$ und also nach (14′)

$$y = C\cdot y_\alpha = D\cdot y_\beta = E\cdot y_\gamma = (z-a)^\alpha\,(z-b)^\beta\,(z-c)^\gamma\cdot \mathfrak{G}(z),$$

wo C, D, E nicht verschwindende Konstante bedeuten. Die Funktion $\mathfrak{G}(z)$ ist eindeutig und für jedes endliche z regulär, folglich eine ganze Funktion. An den Stellen $z = a, b, c$ ist $\mathfrak{G}(z)$ von Null verschieden. An der Stelle $z = \infty$ ist

$$\mathfrak{G}(z) = (z-a)^{-\alpha}(z-b)^{-\beta}(z-c)^{-\gamma}\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\right),$$

wobei die Reihe die Entwicklung von y an der Stelle $z = \infty$ vorstellt. Es ist daher $\mathfrak{G}(z)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade

$$-\alpha-\beta-\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'-1 = \varrho-1.$$

Der Grad vermindert sich, wenn $c_0 = 0$ ist, d. h. wenn y an der Stelle $z = \infty$ verschwindet. Da y nirgends von höherer als der ersten Ordnung Null werden kann, ist dann $c_1 \neq 0$ und daher $\mathfrak{G}(z)$ vom Grade $\varrho - 2$. Es ist indessen zweckmäßig, in diesem Falle $\mathfrak{G}(z)$ als ganze Funktion $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades mit verschwindendem höchsten Term anzusehen und dementsprechend den Wert $z = \infty$ als Nullstelle von $\mathfrak{G}(z)$ zu betrachten. Hierdurch erzielt man, daß in jedem Falle die Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ völlig übereinstimmen mit den von a, b, c verschiedenen Nullstellen von y.

Bezeichnen nun $\mathfrak{N}_{ab}$, $\mathfrak{N}_{bc}$, $\mathfrak{N}_{ca}$ die Anzahlen der reellen Nullstellen

von y oder $\mathfrak{G}(z)$, die zwischen a und b, bez. b und c, bez. c und a liegen, so ergeben die Sätze des vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{R}_{ab} = E(\nu_1) + \varepsilon_1, \quad \mathfrak{R}_{bc} = E(\lambda_1) + \eta_1, \quad \mathfrak{R}_{ca} = E(\mu_1) + \xi_1,$$

wobei jede der Zahlen ε_1, η_1, ξ_1 einen der beiden Werte 0 und 1 besitzt. Und zwar sind diese Zahlen aus den Kongruenzen

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &\equiv E(\lambda) + E(\lambda_1) + E(\nu_1) + E(1-\mu_1) \pmod 2,\\
\eta_1 &\equiv E(\mu) + E(\mu_1) + E(\lambda_1) + E(1-\nu_1) \pmod 2,\\
\xi_1 &\equiv E(\nu) + E(\nu_1) + E(\mu_1) + E(1-\lambda_1) \pmod 2
\end{aligned}$$

zu bestimmen.

Da $\mathfrak{G}(z)$ vom Grade $\varrho - 1$ ist, so folgt nun weiter:

Die Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden imaginären Nullstellen von y oder $\mathfrak{G}(z)$ beträgt

$$\frac{1}{2}[\varrho - 1 - \mathfrak{R}_{ab} - \mathfrak{R}_{bc} - \mathfrak{R}_{ca}].$$

II) λ_1 *besitzt einen positiven ganzzahligen Wert.*

Es ist dann nach (14′)

$$y = C \cdot y_\alpha = D \cdot y_{\beta'} = E \cdot y_{\gamma'} = (z-a)^\alpha\,(z-b)^{\beta'}\,(z-c)^{\gamma'}\,\mathfrak{G}(z),$$

wo $\mathfrak{G}(z)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade

$$-\alpha - \beta' - \gamma' = \alpha' + \beta + \gamma - 1 = \lambda_1 - 1$$

bezeichnet. Die Sätze des vorigen Paragraphen ergeben nun bei Anwendung entsprechender Bezeichnungen, wie im Fall I),

$$\mathfrak{R}_{ab} = 0, \quad \mathfrak{R}_{bc} = \lambda_1 - 1, \quad \mathfrak{R}_{ca} = 0.$$

Die Anzahl der imaginären Nullstellen von y ist daher Null, die Funktion $\mathfrak{G}(z)$ hat lauter reelle Nullstellen.

III) λ_1 *ist Null oder eine negative ganze Zahl.*

In diesem Falle ergibt sich

$$y = C \cdot y_{\alpha'} = D \cdot y_\beta = E \cdot y_\gamma = (z-a)^{\alpha'}\,(z-b)^{\beta}\,(z-c)^{\gamma}\,\mathfrak{G}(z),$$

wo $\mathfrak{G}(z)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade

$$-\alpha' - \beta - \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' - 1 = -\lambda_1$$

bezeichnet. Die Anzahlen der reellen Nullstellen von y betragen

$$\mathfrak{R}_{ab} = E(\nu_1), \quad \mathfrak{R}_{bc} = \varepsilon, \quad \mathfrak{R}_{ca} = E(\mu_1)$$

wo ε den Wert Null oder 1 besitzt, je nachdem

$$E(\mu) + E(\mu_1) + E(1-\nu_1)$$

gerade oder ungerade ist.

Die Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden imaginären Nullstellen von y beträgt

$$\frac{1}{2}[-\lambda_1 - E(\nu_1) - \varepsilon - E(\mu_1)].$$

Die in diesem Paragraphen erhaltenen Anzahlen sind auf ganz anderm Wege von Herrn Hilbert*) bestimmt worden.

§ 6.

Über die stetige Änderung des Logarithmus.

Nach einem bekannten Satze von Cauchy läßt sich die Anzahl der Nullstellen einer Funktion $\varphi(z)$ für einen Bereich, in welchem diese Funktion regulär ist, durch das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d \lg \varphi(z)$ ausdrücken. In manchen Fällen ist es möglich, den Wert dieses Integrales mit Hilfe eines Satzes zu bestimmen, den ich in diesem Paragraphen ableiten will.

Es seien u und v reelle eindeutige Funktionen der reellen Variabeln t, welche in dem Intervalle $a \leqq t \leqq b$ stetig sind und in diesem Intervalle niemals gleichzeitig verschwinden. Die Funktion v möge ferner an den Grenzen des Intervalles von Null verschieden sein und im Innern des Intervalls nur eine endliche Zahl von Nullstellen besitzen. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich der stetige Zuwachs, den der Logarithmus von $u + iv$ erfährt, wenn t von a bis b variiert und den ich mit

$$D_a^b \lg (u + iv) \tag{55}$$

bezeichnen will, durch den Index von $\frac{u}{v}$ für das Intervall $a \leqq t \leqq b$ ausdrücken.

Es gilt nämlich der folgende

Satz 6. *Es bezeichne $L(z)$, unter z irgend eine von Null verschiedene komplexe Zahl verstanden, den „Hauptwert" von $\lg z$, d. h. denjenigen Wert $r + is$ dieses Logarithmus, für welchen $-\pi < s \leqq \pi$ ist. Dann besteht die Gleichung:*

$$\frac{1}{2\pi i} D_a^b \lg (u+iv) = \frac{1}{2} J_a^b \left(\frac{u}{v}\right) - \frac{1}{4}[\operatorname{sgn} v_b - \operatorname{sgn} v_a] + \frac{1}{2\pi i}[L(u+iv)_b - L(u+iv)_a]. \tag{56}$$

Hierbei bedeuten v_a, v_b die Werte, welche v für $t = a$ bez. $t = b$ besitzt und $(u+iv)_a$, $(u+iv)_b$ diejenigen Werte, welche $u + iv$ für $t = a$ bez. $t = b$ besitzt.

*) Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. (Crelles Journal, Bd. 103, S. 337.)

Zum Beweise der Gleichung (56) führen die folgenden Betrachtungen.

Man erkennt zunächst, daß es genügt, die Gleichung (56) unter der Voraussetzung zu beweisen, daß v im Intervalle $a \leqq t \leqq b$ überhaupt nicht oder nur einmal verschwindet. Falls nämlich v mehr als einmal verschwindet, kann man das Intervall $a \cdots b$ durch geeignete, zwischen a und b eingeschaltete Werte so in Teilintervalle zerlegen, daß im Innern jedes Teilintervalles v ein und nur einmal verschwindet. Gilt nun die Gleichung (56) für jedes Teilintervall, so braucht man nur die für die einzelnen Teilintervalle gebildeten Gleichungen (56) zu addieren, um die Richtigkeit der Gleichung auch für das ganze Intervall $a \cdots b$ einzusehen. Man darf ferner in dem Falle, in welchem v nur *eine* Nullstelle zwischen a und b besitzt, beim Beweise der Gleichung (56) voraussetzen, daß an der Nullstelle von v der Wert von u positiv ist. Dies folgt daraus, daß die Gleichung für das Funktionenpaar u, v gilt, wenn sie für das Funktionenpaar $-u$, $-v$ richtig ist. In der Tat bleibt die linke Seite der Gleichung (56) ungeändert, wenn u und v durch $-u$ resp. $-v$ ersetzt werden. Aber auch die rechte Seite bleibt dabei ungeändert; denn diese geht über in

$$\frac{1}{2} J_a^b\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{4}[\operatorname{sgn} v_b - \operatorname{sgn} v_a] + \frac{1}{2\pi i}[L(-u-iv)_b - L(-u-iv)_a],$$

und es ist

$$L(-u-iv)_b = L(u+iv)_b - \pi i \operatorname{sgn} v_b,$$
$$L(-u-iv)_a = L(u+iv)_a - \pi i \operatorname{sgn} v_a.$$

Es bleibt demnach nur übrig, die Gleichung (56) in folgenden Fällen zu beweisen:

1) Die Funktion v hat keine Nullstelle im Intervalle $a \leqq t \leqq b$,
2) Die Funktion v hat *eine* Nullstelle im Intervalle $a \leqq t \leqq b$, und an dieser Nullstelle ist u positiv.

Im ersten Falle durchläuft der Punkt $z = u + iv$, während t von a bis b variiert, eine stetige Kurve, welche die Achse der reellen Zahlen nicht trifft. Daher ist

$$D_a^b \lg(u+iv) = L(u+iv)_b - L(u+iv)_a, \quad J_a^b\left(\frac{u}{v}\right) = 0, \quad \operatorname{sgn} v_b = \operatorname{sgn} v_a,$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar die Gültigkeit der Gleichung (56) erhellt.

Im zweiten Falle durchläuft $z = u + iv$ eine stetige Kurve, die mit der Achse der reellen Zahlen einen einzigen, auf der positiven Hälfte dieser Achse liegenden Punkt gemein hat. Wiederum ist

$$D_a^b \lg (u+iv) = L(u+iv)_b - L(u+iv)_a,$$

und man überzeugt sich sofort, daß

$$J_a^b\left(\frac{u}{v}\right) = 0, \quad +1 \quad \text{oder} \quad -1$$

ist, je nachdem resp.

$$\operatorname{sgn} v_b = \operatorname{sgn} v_a, \quad \operatorname{sgn} v_b = +1, \quad \operatorname{sgn} v_a = -1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{sgn} v_b = -1, \quad \operatorname{sgn} v_a = +1$$

ist. Die Gleichung (56) ist daher wieder erfüllt. Nach dem, was oben bemerkt wurde, ist hiermit die Allgemeingültigkeit der Gleichung (56) bewiesen.

Diese Gleichung läßt sich übrigens noch etwas kürzer, wie folgt, schreiben:

$$(57) \quad \frac{1}{2\pi i} D_a^b \lg (u+iv) = \frac{1}{2} J_a^b\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{1}{4} [\operatorname{sgn} v]_a^b + \frac{1}{2\pi i} [L(u+iv)]_a^b.$$

Dabei bedeutet das Symbol $[\varphi]_a^b$ allgemein die Differenz $\varphi_b - \varphi_a$ der Werte, welche eine Funktion φ der Variabeln t für $t = b$, resp. $t = a$ annimmt.

§ 7.

Anzahl der Nullstellen einer in einem Bereiche regulären Funktion.

Bei der folgenden Untersuchung werde ich mich einiger abkürzenden Bezeichnungen bedienen, die ich zunächst erklären will.

In der Ebene der komplexen Variabeln z sei gegeben ein einfacher stetiger Kurvenbogen mit dem Anfangspunkt z_1 und dem Endpunkt z_2. Die Koordinaten eines auf dem Bogen veränderlichen Punktes sind — gemäß dem Begriffe eines „einfachen stetigen Kurvenbogens“ — als stetige Funktionen einer reellen Variabeln t so darstellbar, daß der Punkt gerade den Kurvenbogen einfach beschreibt, wenn t ein bestimmtes endliches Intervall $a \leqq t \leqq b$ durchläuft. Sind nun u und v reelle stetige Funktionen des Ortes auf dem Kurvenbogen, die in keinem Punkte des letzteren gleichzeitig verschwinden, und ist v nur für endlich viele und zwar innere Punkte des Kurvenbogens Null, so kann man u und v auch als Funktionen von t ansehen, auf welche die Gleichung (57) Anwendung findet. Die einzelnen Glieder dieser Gleichung erhalten dann ersichtlich Werte, die nur von dem Kurvenbogen und den auf ihm gegebenen Größen u und v abhängen, nicht aber von der Wahl der zur analytischen Darstellung des Kurvenbogens dienenden Veränderlichen t. Die Gleichung (57) werde ich deshalb in diesem Falle in der Weise abändern, daß ich an Stelle von a und b die Werte z_1 resp. z_2 setze, welche den Anfangspunkt

resp. Endpunkt des Kurvenbogens bezeichnen. Die Gleichung erhält dadurch die Gestalt*)

$$(58)\quad \frac{1}{2\pi i} D_{z_1}^{z_2} \lg(u+iv) = \frac{1}{2} J_{z_1}^{z_2}\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{1}{4}[\operatorname{sgn} v]_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{2\pi i}[L(u+iv)]_{z_1}^{z_2}.$$

Ferner treffe ich folgende Festsetzung: Bezeichnen δ und ε infinitesimale positive Größen und nimmt t sukzessive alle Werte des Intervalles $a+\delta \cdots b-\varepsilon$ an, so beschreibt der Punkt z einen Teilbogen des ursprünglichen Kurvenbogens $z_1 z_2$. Anfangs- und Endpunkt dieses Teilbogens werde ich, wenn hieraus kein Mißverständnis entstehen kann, mit z_1+0 bez. z_2-0 bezeichnen.

Es sei nun B ein Bereich der komplexen Zahlenebene, der von einer einfachen, stetigen, geschlossenen Kurve begrenzt wird. Im Innern von B sei die Funktion $F(z)$ regulär, auf dem Rande sei sie — abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_r$ — überall regulär und von Null verschieden. Diejenigen unter diesen Punkten, welche für $F(z)$ singulär sind, sollen nicht Häufungsstellen von Nullstellen von $F(z)$ sein. Unter diesen Voraussetzungen besitzt $F(z)$ im Innern von B nur endlich viele Nullstellen, deren Anzahl N sich folgendermaßen ausdrücken läßt.

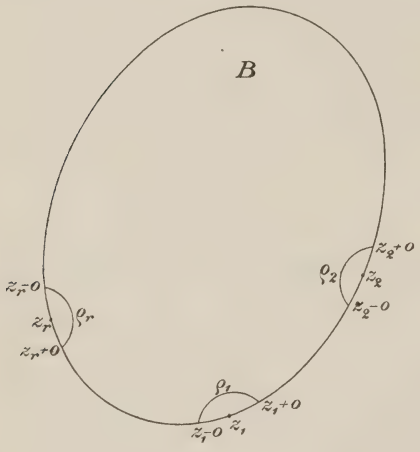


Fig. 1.

Man scheide aus dem Bereiche B durch infinitesimale Konturen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_r$ Umgebungen der Stellen $z_1, z_2, \cdots, z_r$ aus. Die Kontur ϱ_1 führe vom Punkte z_1-0 zum Punkte z_1+0, die Kontur ϱ_2 von z_2-0 nach z_2+0 u. s. f. Durch Ausscheidung der Umgebungen der Stellen $z_1, z_2, \cdots, z_r$ entstehe aus dem Bereiche B der Bereich B'. Dann ist $2\pi i N$ gleich der stetigen Änderung, die $\lg F(z)$ bei positiver Durchlaufung der Begrenzung von B' erfährt. Man hat also

$$(59)\quad N = \frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_1} \lg F(z) + \frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_2} \lg F(z) + \cdots + \frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_r} \lg F(z)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg F(z) + \cdots + \frac{1}{2\pi i} D_{z_r+0}^{z_1-0} \lg F(z),$$

*) Fallen z_1 und z_2 zusammen, handelt es sich also um eine geschlossene Kurve, so kommt $\frac{1}{2\pi i} D \lg(u+iv) = \frac{1}{2} J\left(\frac{u}{v}\right)$. Dieser spezielle Fall der Formel (58) findet sich schon bei Sturm in Liouvilles Journal Ser. I, Bd. I, S. 294.

wo die auf der rechten Seite dieser Gleichung gebrauchten Symbole nach dem Vorhergehenden keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Ich will nun annehmen, daß sich $F(z)$ an der Stelle z_k wie

$$\text{const. } (z - z_k)^{\alpha_k}$$

verhält, d. h. daß für alle genügend nahe bei z_k liegenden Werte von z der Unterschied zwischen

$$\frac{F(z)}{(z-z_k)^{\alpha_k}} \tag{60}$$

und einer bestimmten von Null verschiedenen Konstanten dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig kleine positive Größe. Der Punkt, welcher den Wert des Quotienten (60) geometrisch darstellt, wird dann eine in endlicher Entfernung vom Nullpunkt verlaufende infinitesimale Kontur beschreiben, wenn z die infinitesimale Kontur ϱ_k beschreibt. Daher kommt

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_k} \lg \frac{F(z)}{(z-z_k)^{\alpha_k}} = \frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_k} \lg F(z) - \frac{1}{2\pi i} \alpha_k D_{\varrho_k} \lg (z-z_k) = 0. \tag{61}$$

Wird nun die Kontur ϱ_k als ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt z_k angenommen und ferner vorausgesetzt, daß die Berandung des Bereiches B im Punkte z_k eine bestimmte Tangente besitzt, so ist

$$D_{\varrho_k} \lg (z-z_k) = -\pi i$$

und aus (61) folgt also

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_k} \lg F(z) = -\frac{1}{2} \alpha_k. \tag{62}$$

Finden die gemachten Voraussetzungen für alle Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_r$ statt, so läßt sich demnach die Gleichung (59) durch die folgende ersetzen:

$$N + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) = \frac{1}{2\pi i} D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg F(z) + \cdots + \frac{1}{2\pi i} D_{z_r+0}^{z_1-0} \lg F(z). \tag{63}$$

Zur Berechnung der einzelnen Glieder der rechten Seite kann man häufig die Gleichung (58) benutzen. Man fasse z. B. das erste Glied der rechten Seite ins Auge. Bezeichnet C eine von Null verschiedene, sonst aber beliebige Konstante, so ist

$$D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg F(z) = D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg (C \cdot F(z)) = D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg (u+iv), \tag{64}$$

wenn u den reellen, iv den imaginären Teil von $C \cdot F(z)$ bedeutet. Für die inneren Punkte des Teilbogens $z_1 \cdots z_2$ der Berandung von B sind u und v sicher niemals gleichzeitig Null, da $F(z)$ nach Voraussetzung, abgesehen von den Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_r$, überall längs der Berandung von B von Null verschieden ist. Man wird also die Gleichung (58) stets

dann zur Berechnung von (64) anwenden können, wenn es gelingt, die Konstante C so zu wählen, daß die zweite Komponente v von $C \cdot F(z)$ nur endlich oft für innere Punkte des Teilbogens $z_1 \cdots z_2$ verschwindet. In dem besonderen Falle, wo $C \cdot F(z)$ längs dieses Teilbogens $z_1 \cdots z_2$ rein imaginär, also $C \cdot F(z) = iv$, ist, wird v für innere Punkte des Bogens überhaupt nicht verschwinden können, also ein unveränderliches Vorzeichen bewahren. Dann folgt aus (58)

$$\frac{1}{2\pi i} D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg F(z) = \frac{1}{2\pi i} [L(iv)]_{z_1+0}^{z_2-0}.$$

Der reelle Teil dieses Ausdrucks verschwindet. Daher darf man in dem betrachteten Falle in der Gleichung (63) das Glied $\frac{1}{2\pi i} D_{z_1+0}^{z_2-0} \lg F(z)$ unterdrücken. Denn da N eine reelle Zahl bedeutet, genügt es zur Bestimmung von N in der Gleichung (63) nur die reellen Teile der einzelnen Glieder beizubehalten.

Bei den vorstehenden Betrachtungen hätte man statt der Zahlenebene auch die Zahlenkugel zugrunde legen können. Daraus ist ersichtlich, daß man die Formel (58) auch auf Kurven, die durch den unendlich fernen Punkt gehen, anwenden darf, und ebenso die Formel (63) auf Bereiche, welche den unendlich fernen Punkt im Innern oder auf der Begrenzung enthalten.

§ 8.

Anwendung auf die Riemannsche P-Funktion.

In bezug auf die P-Funktion behalte ich die früheren Voraussetzungen und Bezeichnungen bei. Wenn nun

$$y = Cy_\alpha + C'y_{\alpha'} = Dy_\beta + D'y_{\beta'} = Ey_\gamma + E'y_{\gamma'} \tag{65}$$

einen Zweig der P-Funktion bezeichnet, so kann man die Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen von y mit Hilfe der allgemeinen Formel (63) berechnen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Unter den Quotienten $C : C'$, $D : D'$, $E : E'$ ist kein reeller vorhanden.

Fall 2. Unter den Quotienten $C : C'$, $D : D'$, $E : E'$ ist mindestens einer reell.

Im ersten Falle, den ich zunächst betrachten will, kann y im Innern der Stücke ab, bc, ca der Achse der reellen Zahlen nicht verschwinden. Denn würde z. B. für ein reelles z zwischen a und b die Funktion y Null werden, so wäre für diesen Wert von z

$$C : C' = -y_{\alpha'} : y_\alpha,$$

und also $C : C'$ reell, entgegen der Voraussetzung.

An den Punkten a, b, c verhält sich y bezüglich wie

$$\text{const. } (z-a)^{\alpha}, \quad \text{const. } (z-b)^{\beta}, \quad \text{const. } (z-c)^{\gamma}.$$

Die Formel (63) wende ich nun auf den Fall an, wo der Bereich B die obere Halbebene ist, und $F(z)$ mit y zusammenfällt. Die Begrenzung von B wird von der Achse der reellen Zahlen gebildet und die Punkte a, b, c übernehmen die Rolle der Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_r$. Daher wird die Anzahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen von y durch die folgende Gleichung bestimmt

$$N + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = N + \frac{1}{2}(1-\varrho) \tag{66}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} D_{a+0}^{b-0} \lg y + \frac{1}{2\pi i} D_{b+0}^{c-0} \lg y + \frac{1}{2\pi i} D_{c+0}^{a-0} \lg y .$$

Indem ich zur Abkürzung

$$\varepsilon_{\lambda} = (-1)^{E(\lambda)}, \quad \varepsilon_{\mu} = (-1)^{E(\mu)}, \quad \varepsilon_{\nu} = (-1)^{E(\nu)} \tag{67}$$

setze, bringe ich nun die Ausdrücke (65) der Funktion y auf die Form

$$y = l(\varepsilon_{\lambda} y_{\alpha} + (c_1 + ic_2) y_{\alpha'}) = m(\varepsilon_{\mu} y_{\beta} + (d_1 + id_2) y_{\beta'}) = n(\varepsilon_{\nu} y_{\gamma} + (e_1 + ie_2) y_{\gamma'}), \tag{68}$$

wobei dann l, m, n von Null verschiedene und c_1, d_1, e_1, c_2, d_2, e_2 reelle Konstanten bezeichnen. Die Konstanten c_2, d_2, c_2 sind von Null verschieden.

Mit Hilfe von (58) kommt nun

$$\frac{1}{2\pi i} D_{a+0}^{b-0} \lg y = \frac{1}{2\pi i} D_{a+0}^{b-0} \lg\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$= \frac{1}{2} J_{a+0}^{b-0}\left(\frac{\varepsilon_{\lambda} y_{\alpha} + c_1 y_{\alpha'}}{c_2 y_{\alpha'}}\right) - \frac{1}{4}\left[\operatorname{sgn}(c_2 y_{\alpha'})\right]_{a+0}^{b-0} + \frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{l}\right)\right]_{a+0}^{b-0};$$

oder nach den Gleichungen (38), (49), (16) und (19)

$$\frac{1}{2\pi i} D_{a+0}^{b-0} \lg y = \operatorname{sgn} c_2 \cdot \left[\frac{1}{2} E(\nu_1) + \frac{1}{4}(1-(-1)^{E(\nu_1)})\right] \tag{69}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{l}\right)\right]_{a+0}^{b-0}.$$

Eine entsprechende Darstellung gilt für die beiden anderen Terme der rechten Seite der Gleichung (66). Die letztere läßt sich dementsprechend so schreiben:

$$N = \frac{1}{2}(\varrho-1) + G + \frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{l}\right)\right]_{a+0}^{b-0} + \frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{m}\right)\right]_{b+0}^{c-0} \tag{70}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{n}\right)\right]_{c+0}^{a-0},$$

wobei zur Abkürzung

$$(71)\qquad G = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} c_2\Big[E(\nu_1) + \frac{1}{2}\big(1-(-1)^{E(\nu_1)}\big)\Big] + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2\Big[E(\lambda_1) + \frac{1}{2}\big(1-(-1)^{E(\lambda_1)}\big)\Big] + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} e_2\Big[E(\mu_1) + \frac{1}{2}\big(1-(-1)^{E(\mu_1)}\big)\Big]$$

gesetzt ist. Die Zahl G ist, wie man sich leicht überzeugt, eine *ganze* Zahl.

Da N eine reelle (nicht negative, ganze) Zahl ist, so bleibt die Gleichung (70) richtig, wenn man die imaginären Bestandteile der einzelnen Terme der rechten Seite vernachlässigt. Deshalb werde ich bei der nun folgenden Berechnung von

$$\Big[L\Big(\frac{y}{l}\Big)\Big]_{a+0}^{b-0}$$

nur die imaginären Teile der auftretenden Größen berücksichtigen.

Für genügend kleine positive reelle Werte von $z-a$ ist nach (16)

$$\frac{y}{l} = \varepsilon_\lambda y_\alpha + (c_1 + ic_2)\, y_{\alpha'} = p_\alpha (z-a)^\alpha + \cdots,$$

und folglich

$$L\Big(\frac{y}{l}\Big) = L(p_\alpha) + \alpha L(z-a) + \mathfrak{P}(z-a),$$

wo $\mathfrak{P}(z-a)$ mit $z-a$ unendlich klein wird. Hieraus ist ersichtlich, daß der imaginäre Teil von $L\left(\frac{y}{l}\right)$ für $z = a+\delta$, wenn die positive Größe δ nach Null konvergiert, ebenfalls die Null zur Grenze hat.

Für genügend kleine positive reelle Werte von $b-z$ ist

$$y_\beta = \varepsilon_\mu p_\beta (z-b)^\beta + \cdots = \varepsilon_\mu e^{i\pi\beta} p_\beta (b-z)^\beta + \cdots,$$
$$y_{\beta'} = \quad p_{\beta'}(z-b)^{\beta'} + \cdots = \quad e^{i\pi\beta'} p_{\beta'}(b-z)^{\beta'} + \cdots,$$

und folglich, da

$$\frac{y}{l} = \frac{m}{l}\,\varepsilon_\mu\, y_\beta \Big(1 + \frac{(d_1 + id_2)\, y_{\beta'}}{\varepsilon_\mu\, y_\beta}\Big)$$

ist,

$$(72)\quad L\Big(\frac{y}{l}\Big) = L\Big(\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}\Big) + L(e^{-i\pi\beta}\varepsilon_\mu y_\beta) + L\Big(1 + \frac{p_{\beta'}}{p_\beta}\,(d+id_2)\, e^{i\pi\mu}(b-z)^\mu + \cdots\Big).$$

In der Tat ist der zweite Logarithmus der rechten Seite reell, und der dritte Logarithmus liegt nahe bei Null, so daß die zweite Komponente der rechten Seite zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, also wirklich durch (73) der Hauptwert des Logarithmus von $\frac{y}{l}$ dargestellt wird. Hierbei ist indessen vorausgesetzt, daß $\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}$ nicht eine negative reelle Größe ist, also die zweite Komponente von $L\left(\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}\right)$ *zwischen* $-\pi$ und $+\pi$ liegt. In dem Falle, wo $\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}$ reell und negativ ist, besitzt $L\left(\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}\right)$ den imaginären Teil $i\pi$.

Es wird dann die Gleichung (72) gültig bleiben, wenn die zweite Komponente von

$$(73)\quad L\Big(1+\frac{p_{\beta'}}{p_\beta}(d_1+id_2)\,e^{i\pi\mu}(b-z)^\mu+\cdots\Big)=\frac{p_{\beta'}}{p_\beta}(d_1+id_2)\,e^{i\pi\mu}(b-z)^\mu+\cdots$$

für alle genügend kleinen Werte von $b-z$ einen negativen Wert hat. Andernfalls muß die Gleichung (72) in der Weise abgeändert werden, daß der rechten Seite der Term $-2i\pi$ zugesetzt wird. Die zweite Komponente des Ausdrucks (73) wird aber für kleine Werte von $b-z$ negativ oder positiv sein, je nachdem

$$(74)\qquad (d_1+id_2)\,e^{i\pi\mu}$$

eine negative oder positive zweite Komponente besitzt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der reelle Teil von

$$\frac{1}{2\pi i}\Big[L\Big(\frac{y}{l}\Big)\Big]_{a+0}^{b-0}$$

übereinstimmt mit dem reellen Teile von

$$(75)\qquad \frac{1}{2\pi i}L\Big(\frac{m}{l}\,e^{i\pi\beta}\Big)-\varepsilon,$$

wo ε im allgemeinen Null und nur dann gleich 1 zu nehmen ist, wenn $\frac{m}{l}\,e^{i\pi\beta}$ einen reellen negativen Wert und zugleich die Größe (74) eine positive zweite Komponente besitzt. Unter welchen Bedingungen tritt dieser Ausnahmefall, in welchem $\varepsilon=1$ zu nehmen ist, ein? Um dieses zu untersuchen, setze ich in die Gleichung

$$m(\varepsilon_\mu y_\beta+(d_1+id_2)\,y_{\beta'})=l(\varepsilon_\lambda y_\alpha+(c_1+ic_2)\,y_{\alpha'})$$

für y_α, $y_{\alpha'}$ die aus (14′) folgenden Darstellungen dieser Funktionen durch y_β, $y_{\beta'}$ ein und vergleiche dann die Koeffizienten von y_β, $y_{\beta'}$ beiderseits. Auf diese Weise ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$(76)\quad\begin{cases}\dfrac{m}{l}\,e^{i\pi\beta}=\dfrac{\varepsilon_\mu\pi}{\sin\mu\pi}\Big[f(\mu_1)f(1-\lambda_1)\varepsilon_\lambda+f(\varrho)f(1-\nu_1)(c_1+ic_2)\Big],\\ (d_1+id_2)\,e^{i\pi\mu}\cdot\dfrac{m}{l}\,e^{i\pi\beta}=\dfrac{-\pi}{\sin\mu\pi}\Big[f(\nu_1)f(1-\varrho)\varepsilon_\lambda+f(\lambda_1)f(1-\mu_1)(c_1+ic_2)\Big].\end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ersieht man, daß $\frac{m}{l}\,e^{i\pi\beta}$ dann und nur dann eine negative reelle Größe ist, wenn erstens $f(1-\nu_1)=0$, also ν_1 eine positive ganze Zahl, und zugleich zweitens

$$(77)\quad \operatorname{sgn}\Big(\frac{\varepsilon_\mu\pi}{\sin\pi\mu}\cdot f(\mu_1)f(1-\lambda_1)\,\varepsilon_\lambda\Big)=(-1)^{E(1-\mu_1)+E(\lambda_1)+E(\lambda)}=-1$$

ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat die zweite Komponente von $(d_1+id_2)\,e^{i\pi\mu}$ das Vorzeichen

$$\operatorname{sgn}\Big(\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\cdot f(\lambda_1)f(1-\mu_1)\,c_2\Big)=(-1)^{E(\mu)+E(\mu_1)+E(1-\lambda_1)}\operatorname{sgn}c_2=(-1)^{\nu_1}\operatorname{sgn}c_2,$$

wobei (18′) berücksichtigt ist. Hat ν_1 einen positiven ganzzahligen Wert, so folgt aus

$$\lambda + \nu_1 = 1 - \mu_1, \quad \mu + \nu_1 = 1 - \lambda_1,$$

daß

$$E(1-\mu_1) = E(\lambda) + \nu_1, \quad E(\lambda_1) = 0$$

ist. Daher kann die Bedingung (77) durch

$$(-1)^{\nu_1} = -1$$

ersetzt werden. Demnach ist die in (75) auftretende Zahl ε nur dann gleich 1 zu nehmen, wenn ν_1 eine positive ungerade Zahl und zugleich $\operatorname{sgn} c_2 = -1$ ist. Es wird dann der Wert des reellen Teiles von (75)

$$\frac{1}{2\pi i}\pi i - 1 = -\frac{1}{2}.$$

In dem Falle, wo zwar ν_1 eine positive ungerade Zahl, aber $\operatorname{sgn} c_2 = +1$ ist, hat man $\varepsilon = 0$ zu nehmen und der reelle Teil von (75) ist dann also

$$\frac{1}{2\pi i}\pi i - 0 = +\frac{1}{2}.$$

Zusammenfassend kann man daher sagen:

Wenn ν_1 keine positive ungerade Zahl ist, so stimmt der reelle Teil von

$$\frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{l}\right)\right]_{\alpha+0}^{\beta-0}$$

mit demjenigen von

$$\frac{1}{2\pi i} L\left(\frac{m}{l}\, e^{i\pi\beta}\right)$$

überein. Wenn aber ν_1 eine positive ungerade Zahl ist, so ist der reelle Teil von $\frac{1}{2\pi i}\left[L\left(\frac{y}{l}\right)\right]_{\alpha+0}^{\beta-0}$ gleich $\frac{1}{2}\operatorname{sgn} c_2$.

Die entsprechenden Tatsachen gelten nun für die beiden anderen Klammerausdrücke, die in der Gleichung (70) auftreten. Bezeichnet man die zweite Komponente φ des Hauptwertes des Logarithmus einer beliebigen von Null verschiedenen komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ wie üblich mit $\operatorname{am} z$ (Amplitude von z), so gilt demnach folgender

Satz 6. *Um die Anzahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen eines Zweiges*

$$y = Cy_\alpha + C'y_{\alpha'} = Dy_\beta + D'y_{\beta'} = Ey_\gamma + E'y_{\gamma'}$$

der Riemannschen P-Funktion zu bestimmen, verfahre man im Falle, wo keiner der Quotienten $C:C'$, $D:D'$, $E:E'$ reell ist, folgendermaßen:

Man bringe die Ausdrücke von y durch die Elementarzweige der P-Funktion auf die Form (68) *und berechne sodann die ganze Zahl G gemäß* (71). *Dann ist*

$$N = \frac{1}{2}(\varrho - 1) + G + \eta, \tag{78}$$

wobei, falls keine der Zahlen ν_1, λ_1, μ_1 *eine positive, ungerade, ganze Zahl ist,* η *den Wert*

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{am}\left(\frac{m}{l} e^{i\pi\beta}\right) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{am}\left(\frac{n}{m} e^{i\pi\gamma}\right) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{am}\left(\frac{l}{n} e^{i\pi\alpha}\right) \tag{79}$$

besitzt. Die Gleichung (78) *bleibt auch in dem Falle, wo* ν_1 *oder* λ_1 *oder* μ_1 *eine positive ungerade ganze Zahl ist, gültig, wenn man dann nur in der Definitionsgleichung* (79) *von* η *das erste, bzw. zweite, bzw. dritte Glied der rechten Seite durch*

$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn} c_2, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \operatorname{sgn} d_2, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_2$$

ersetzt.

Wie schon in § 2 bemerkt wurde, kann von den Zahlen ν_1, λ_1, μ_1 höchstens eine ganzzahlig sein.

An den vorstehenden Satz knüpfe ich noch eine Reihe von Bemerkungen.

Da die Amplituden zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, so liegt η zwischen $-\frac{3}{2}$ und $+\frac{3}{2}$ und zwar, wie man leicht sieht, mit Ausschluß der Grenzen. Wenn daher die der Größe $G + \frac{1}{2}(\varrho - 1)$ zunächst liegende ganze Zahl mit H bezeichnet wird, so daß

$$H - \frac{1}{2} < G + \frac{1}{2}(\varrho - 1) \leqq H + \frac{1}{2}$$

ist, so wird N zwischen $H-2$ und $H+2$ liegen, und also

$$N = H, \quad \text{oder } H - 1, \quad \text{oder } H + 1$$

sein.

Daß durch die Gleichung (78) eine *ganze* Zahl definiert wird, erkennt man folgendermaßen:

Aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \operatorname{am}\left(\frac{m}{l} e^{i\pi\beta}\right) = \operatorname{am} m - \operatorname{am} l + \pi\beta + 2\pi g, \\ \operatorname{am}\left(\frac{n}{m} e^{i\pi\gamma}\right) = \operatorname{am} n - \operatorname{am} m + \pi\gamma + 2\pi h, \\ \operatorname{am}\left(\frac{l}{n} e^{i\pi\alpha}\right) = \operatorname{am} l - \operatorname{am} n + \pi\alpha + 2\pi k, \end{cases} \tag{80}$$

in denen g, h, k ganze Zahlen bedeuten, folgt für η der Wert

$$\eta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + g + h + k = -\frac{1}{2}(\varrho - 1) + g + h + k,$$

worauf (78) die Gestalt annimmt

$$N = G + g + h + k. \tag{81}$$

Aus der ersten Gleichung (76) und den analogen auf $\frac{n}{m} e^{i\pi\gamma}$ und $\frac{l}{n} e^{i\pi\alpha}$ bezüglichen Gleichungen entnimmt man noch folgende Darstellung der den Wert von η bestimmenden Amplituden:

$$(82)\quad \begin{cases} \operatorname{am}\left(\frac{m}{l} e^{i\pi\beta}\right) = \operatorname{am}\left(f(\mu_1) f(1-\lambda_1)\, \varepsilon_\lambda + f(\varrho) f(1-\nu_1)\,(c_1 + i c_2)\right), \\ \operatorname{am}\left(\frac{n}{m} e^{i\pi\gamma}\right) = \operatorname{am}\left(f(\nu_1) f(1-\mu_1)\, \varepsilon_\mu + f(\varrho) f(1-\lambda_1)\,(d_1 + i d_2)\right), \\ \operatorname{am}\left(\frac{l}{n} e^{i\pi\alpha}\right) = \operatorname{am}\left(f(\lambda_1) f(1-\nu_1)\, \varepsilon_\nu + f(\varrho) f(1-\mu_1)\,(e_1 + i e_2)\right). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen und von (71) erkennt man, daß vermöge (78) die Anzahl N durch die Größen

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ c_1 + i c_2,\ d_1 + i d_2,\ e_1 + i e_2$$

ausgedrückt ist. Da nun ferner nach (65) und (68)

$$(83)\qquad c_1 + i c_2 = \varepsilon_\lambda \frac{C'}{C},\quad d_1 + i d_2 = \varepsilon_\mu \frac{D'}{D},\quad e_1 + i e_2 = \varepsilon_\nu \frac{E'}{E},$$

so erscheint N dargestellt durch λ, μ, ν und die Quotienten $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$, $\frac{E'}{E}$. Jeder dieser Quotienten läßt sich aber nach (65) vermöge der Verwandlungsformeln (14′), (14″), (14‴) als linear gebrochene Funktion der beiden anderen darstellen, so daß sich in letzter Instanz die Zahl N nur von λ, μ, ν und irgend einem der Quotienten $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$, $\frac{E'}{E}$ abhängig erweist. Dies steht im Einklang mit der evidenten Tatsache, daß die Nullstellen von y außer von λ, μ, ν nur von dem Werte des Quotienten $\frac{C'}{C}$ $\left(\text{oder } \frac{D'}{D} \text{ oder } \frac{E'}{E}\right)$ abhängen. —

Ich wende mich nunmehr zur Betrachtung des Falles, in welchem unter den Quotienten $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$, $\frac{E'}{E}$ sich mindestens einer befindet, der reell ist. Wegen der Symmetrie der P-Funktion bezüglich der Verzweigungspunkte a, b, c genügt es, den Fall ins Auge zu fassen, wo $\frac{C'}{C}$ einen reellen Wert hat.

Aus den Verwandlungsformeln (14′) folgt nun

$$(84)\quad \begin{cases} \frac{D'}{D} = e^{i\pi(1-\mu)} \cdot \frac{C f(\nu_1) f(1-\varrho) + C' f(\lambda_1) f(1-\mu_1)}{C f(\mu_1) f(1-\lambda_1) + C' f(\varrho) f(1-\nu_1)}, \\ \frac{E'}{E} = -\frac{C f(\mu_1) f(1-\varrho) + C' e^{i\pi\lambda} f(\lambda_1) f(1-\nu_1)}{C f(\nu_1) f(1-\lambda_1) + C' e^{i\pi\lambda} f(\varrho) f(1-\mu_1)}. \end{cases}$$

Da nun μ und λ nicht ganzzahlig sind, so kann demnach $\frac{D'}{D}$ nicht anders

reell sein, als wenn $D=0$ oder $D'=0$ ist und $\frac{E'}{E}$ nicht anders, als wenn $C=0$ oder $C'=0$ ist. Diese Fälle will ich zunächst ausschließen, so daß unter den Quotienten $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$, $\frac{E'}{E}$ nur der erste reell ist. Auf der Achse der reellen Zahlen wird dann y zwischen b und c und zwischen c und a sicher nicht verschwinden. Die reellen, zwischen a und b liegenden Nullstellen von y seien nach aufsteigender Größe geordnet die folgenden:

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{N'}, \tag{85}$$

so daß N' ihre Anzahl bezeichnet. Zur Bestimmung der Anzahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen von y wende ich wiederum die Formel (63) an, wobei ich nur die reellen Teile der einzelnen Glieder der Formel beibehalte. Die Rolle der in der Formel auftretenden Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_r$ spielen hier die Punkte (85) zusammen mit den Punkten a, b, c. Es kommt nun ersichtlich

$$N+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+N')=\frac{1}{2\pi i}D_{b+0}^{c-0}\lg y+\frac{1}{2\pi i}D_{c+0}^{a-0}\lg y. \tag{86}$$

Denn die reellen Teile von

$$\frac{1}{2\pi i}D_{a+0}^{z_1-0}\lg y,\quad \frac{1}{2\pi i}D_{z_1+0}^{z_2-0}\lg y,\ \cdots$$

sind sämtlich Null, weil y längs des Stückes $a\cdots b$ der Achse der reellen Zahlen bis auf einen konstanten Faktor reell ist.

Die Berechnung der rechten Seite der Gleichung (86) vollzieht sich in derselben Weise, wie im Falle der Gleichung (66). Man übersieht sofort, daß man zu folgendem Ergebnis gelangt:

Satz 7. *Um die Anzahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen eines Zweiges*

$$y=Cy_\alpha+C'y_{\alpha'}=Dy_\beta+D'y_{\beta'}=Ey_\gamma+E'y_{\gamma'}$$

der Riemannschen P-Funktion zu bestimmen, verfahre man im Falle, wo der Quotient $C:C'$ reell, aber C, C', D und D' von Null verschieden sind, folgendermaßen:

Man bringe die Ausdrücke von y durch die Elementarzweige der P-Funktion auf die Form (68) *und berechne sodann die ganze Zahl G gemäß* (71). *Dann ist*

$$N+\frac{1}{2}N'=\frac{1}{2}(\varrho-1)+G+\eta, \tag{87}$$

wobei, falls keine der Zahlen λ_1, μ_1 eine positive ungerade ganze Zahl ist, η den Wert

$$\eta=\frac{1}{2\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)+\frac{1}{2\pi}\operatorname{am}\left(\frac{l}{n}e^{i\pi\alpha}\right) \tag{88}$$

besitzt. Die Gleichung (87) *bleibt auch in dem Falle, wo* λ_1 *oder* μ_1 *eine positive, ungerade, ganze Zahl ist, gültig, wenn man dann nur in der Definitionsgleichung* (88) *von* η *das erste bzw. zweite Glied der rechten Seite durch*

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\operatorname{sgn} e_2$$

ersetzt. Die Zahl N' *bedeutet die Anzahl der reellen Nullstellen von* y*, die zwischen* a *und* b *liegen.*

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken: In den Darstellungen (68) von y wird $c_2 = 0$ sein, während d_2 und e_2 von Null verschieden sind. Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (71) verschwindet dementsprechend, indem $\operatorname{sgn} c_2 = 0$ zu setzen ist. Die Anzahl N' ist nach § 4 zu berechnen. —

Es erübrigt, die Fälle $C = 0$, $C' = 0$, $D = 0$, $D' = 0$ zu betrachten. Es handelt sich in diesen Fällen nach (65) um die Nullstellen eines Elementarzweiges der P-Funktion. Wegen der Symmetrieeigenschaften der P-Funktion genügt es, die Nullstellen der Zweige y_α und $y_{\alpha'}$ zu betrachten.

Fällt zunächst y mit $y_{\alpha'}$ zusammen, so haben die Gleichungen (65) folgende Gestalt:

$$(89)\quad y = y_{\alpha'} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}\, e^{-i\pi\beta}\,(f(\varrho) f(1-\nu_1)\, y_\beta - f(\lambda_1) f(1-\mu_1)\, e^{-i\pi\mu}\, y_{\beta'})$$

$$= \frac{\pi}{\sin \nu\pi}\, e^{i\pi\alpha'}\,(f(\varrho) f(1-\mu_1)\, y_\gamma - f(\lambda_1) f(1-\nu_1)\, y_{\gamma'}).$$

Ich werde nun annehmen, daß keine der Zahlen μ_1, ν_1, $1-\lambda_1$ eine positive ganze Zahl ist, weil andernfalls einer der speziellen Fälle vorliegen würde, die im § 5 erledigt wurden. Die Funktion (89) kann dann wohl zwischen a und b, sowie zwischen c und a, nicht aber zwischen b und c reelle Nullstellen haben. Die Anzahl ihrer reellen Nullstellen zwischen a und b bzw. zwischen c und a beträgt nach den Sätzen von § 4 $E(\nu_1)$ bzw. $E(\mu_1)$. Die Formel (63) liefert nun für die Zahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen von $y_{\alpha'}$ die Gleichung

$$(90)\qquad N + \frac{1}{2}\,(\alpha' + \beta + \gamma + E(\nu_1) + E(\mu_1)) = \frac{1}{2\pi i}\, D_{b+0}^{c-0} \lg y_{\alpha'},$$

wobei nur der reelle Teil der rechten Seite beizubehalten ist. Dieser wird analog wie in den früheren Fällen bestimmt. Man bringe nämlich (89) auf die (68) entsprechende Form:

$$(91)\qquad y = y_{\alpha'} = m\,(\varepsilon_\mu y_\beta + (d_1 + i d_2)\, y_{\beta'}) = n\,(\varepsilon_\nu y_\gamma + (e_1 + i e_2)\, y_{\gamma'}).$$

Dann ist der Wert der rechten Seite in (90)

$$(92) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2\left[E(\lambda_1)+\frac{1}{2}(1-(-1)^{E(\lambda_1)})\right]+\frac{1}{2\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right),$$

wobei im Falle, wo λ_1 eine positive ungerade ganze Zahl ist, $\frac{1}{2\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)$ durch $\frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2$ zu ersetzen ist.

Der Vergleich von (89) und (91) ergibt nun

$$d_1+id_2=-\varepsilon_\mu e^{-i\pi\mu}\frac{f(\lambda_1)f(1-\mu_1)}{f(\varrho)f(1-\nu_1)}, \quad \frac{n}{m}=\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\frac{\sin\mu\pi}{\sin\nu\pi}e^{i\pi(\alpha'+\beta)}\cdot\frac{f(1-\mu_1)}{f(1-\nu_1)},$$

und hieraus

$$(93) \quad \operatorname{sgn} d_2=(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+E(1-\lambda_1)}, \quad \operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=\operatorname{am}\left((-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)}\cdot e^{i\pi\lambda_1}\right),$$

wobei berücksichtigt ist, daß $\alpha'+\beta+\gamma$ mit λ_1 zusammenfällt.

Zur Berechnung der Amplitude setze ich

$$\lambda_1=[\lambda_1]+\varepsilon \qquad (0\leqq\varepsilon<1),$$

unter $[\lambda_1]$ die größte ganze, in λ_1 enthaltene Zahl verstanden. Es kommt dann

$$(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)}e^{i\pi\lambda_1}=(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+[\lambda_1]}e^{i\pi\varepsilon}=\pm e^{i\pi\varepsilon}.$$

Gilt das obere Vorzeichen, so ist

$$\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=\pi\varepsilon=\pi(\lambda_1-[\lambda_1]);$$

dagegen, wenn das untere Vorzeichen gilt,

$$\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=\pi(\varepsilon-1)=\pi(\lambda_1-[\lambda_1]-1) \quad \text{bzw.} \quad =\pi,$$

je nachdem λ_1 keine ganze Zahl bzw. eine ganze Zahl ist.

Man hat daher

$$(94) \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=\lambda_1-[\lambda_1]-\frac{1}{2}(1-(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+[\lambda_1]})$$

im allgemeinen, jedoch

$$(94') \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=1$$

in dem einen Falle, wo λ_1 eine ganze Zahl und zugleich $E(\mu_1)+E(\nu_1)+\lambda_1$ ungerade ist.

Ist λ_1 ganzzahlig, so kann λ_1 nur einen positiven ganzzahligen Wert haben, weil nach Voraussetzung $1-\lambda_1$ keine positive ganze Zahl ist. Es ist also dann

$$\lambda_1>0, \quad \mu_1=1-\nu-\lambda_1<1, \quad \nu_1=1-\mu-\lambda_1<1,$$

und daher

$$E(\mu_1)+E(\nu_1)+\lambda_1=\lambda_1.$$

Der Ausnahmefall, in welchem (94′) gilt, tritt also nur ein, wenn λ_1 eine positive, ungerade, ganze Zahl ist. Es ist dies also gerade der Fall, in welchem das zweite Glied in (92) durch $\frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2$ zu ersetzen ist.

Aus (90), (92), (93), (94) ergibt sich nun

$$N+\tfrac{1}{2}(E(\nu_1)+E(\mu_1))$$
$$=\tfrac{1}{2}(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+E(1-\lambda_1)}\Big[E(\lambda_1)+\tfrac{1}{2}(1-(-1)^{E(\lambda_1)})\Big]+\eta,$$

wobei im allgemeinen

$$\eta=-\tfrac{1}{2}\Big([\lambda_1]+\tfrac{1}{2}(1-(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+[\lambda_1]})\Big),$$

dagegen im Falle, wo λ_1 eine positive, ungerade, ganze Zahl ist,

$$\eta=-\tfrac{1}{2}\lambda_1+\tfrac{1}{2}$$

zu nehmen ist. Für ein nicht ganzzahliges λ_1 ist nun ferner

$$[\lambda_1]=\operatorname{sgn}\lambda_1(E(\lambda_1)+E(1-\lambda_1)),$$

während für ein positives ganzzahliges λ_1

$$[\lambda_1]=\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_1(E(\lambda_1)+E(1-\lambda_1)+1)$$

ist. Hieraus folgt nach leichter Rechnung, daß in *jedem* Falle

$$\eta=-\tfrac{1}{2}\Big[\operatorname{sgn}\lambda_1(E(\lambda_1)+E(1-\lambda_1))+\tfrac{1}{2}(1-(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+E(\lambda_1)+E(1-\lambda_1)})\Big]$$

ist. So findet man schließlich:

Satz 8. *Es sei keine der Größen μ_1, ν_1, $1-\lambda_1$ eine positive ganze Zahl. Dann ist die Anzahl N der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen des zum größeren Exponenten gehörenden Fundamentalzweiges $y_{\alpha'}$ durch die Gleichung*

(95)
$$N+\tfrac{1}{2}(E(\mu_1)+E(\nu_1))$$
$$=\tfrac{1}{2}(-1)^{E(\mu_1)+E(\nu_1)+E(1-\lambda_1)}\Big(E(\lambda_1)+\tfrac{1}{2}\Big)-\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}\lambda_1(E(\lambda_1)+E(1-\lambda_1))-\tfrac{1}{4}$$

bestimmt.

Im Falle eines beliebigen positiven Wertes von λ_1 ist

$$E(1-\lambda_1)=0,\quad E(\mu_1)=E(1-\nu-\lambda_1)=0,\quad E(\nu_1)=E(1-\mu-\lambda_1)=0,$$
$$\operatorname{sgn}\lambda_1=+1$$

und die Gleichung (95) liefert dann also $N=0$. Der Fundamentalzweig $y_{\alpha'}$ besitzt also, wenn λ_1 positiv ist, überhaupt keine imaginäre Nullstelle.

Es bleibt nun endlich noch die Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen von

$$(96)\qquad y = y_\alpha = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}\, e^{-i\pi\beta}\,(f(\mu_1) f(1-\lambda_1)\, y_\beta - f(\nu_1) f(1-\varrho)\, e^{-i\pi\mu}\, y_{\beta'})$$

$$= \frac{\pi}{\sin \nu\pi}\, e^{i\pi\alpha}\,(f(\nu_1) f(1-\lambda_1)\, y_\gamma - f(\mu_1) f(1-\varrho)\, y_{\gamma'})$$

zu bestimmen. Dabei setze ich voraus, daß keine der Größen λ_1, $1-\mu_1$, $1-\nu_1$, ϱ eine positive ganze Zahl ist, weil andernfalls einer der Fälle vorliegen würde, die in § 5 erledigt worden sind.

Für die zu bestimmende Anzahl N ergibt sich nun zunächst die Gleichung

$$(97)\qquad N + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+N'+N'') = \frac{1}{2\pi i}\, D_{b+0}^{c-0} \lg y_\alpha,$$

wobei rechter Hand der imaginäre Teil fortzulassen ist, und N' bzw. N'' die Anzahl der reellen Nullstellen von y_α zwischen a und b, bzw. zwischen c und a bezeichnet.

Die Berechnung der rechten Seite von (97) geschieht wie in den früheren Fällen. Man setze (96) in die Form

$$(98)\qquad y = y_\alpha = m(\varepsilon_\mu y_\beta + (d_1 + i d_2)\, y_{\beta'}) = n(\varepsilon_\nu y_\gamma + (e_1 + i e_2)\, y_{\gamma'});$$

dann ist der Wert der rechten Seite von (97)

$$(99)\qquad \frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2 \left(E(\lambda_1) + \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{E(\lambda_1)}\right)\right) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}\, e^{i\pi\gamma}\right),$$

und zwar ausnahmslos, da der Fall, wo λ_1 eine positive ungerade Zahl ist und daher das zweite Glied in (99) durch $\frac{1}{2}\operatorname{sgn} d_2$ zu ersetzen wäre, nicht in Betracht kommt.

Nun findet man durch den Vergleich von (96) und (98)

$$d_1 + i d_2 = -\,\varepsilon_\mu e^{-i\pi\mu}\,\frac{f(\nu_1)\, f(1-\varrho)}{f(\mu_1)\, f(1-\lambda_1)}, \qquad \frac{n}{m} = \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \frac{\sin \mu\pi}{\sin \nu\pi}\, e^{i\pi(\alpha+\beta)}\,\frac{f(\nu_1)}{f(\mu_1)},$$

und daher

$$(100)\qquad \begin{aligned} \operatorname{sgn} d_2 &= (-1)^{E(\varrho)+E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)}, \\ \operatorname{am}\left(\frac{n}{m}\, e^{i\pi\gamma}\right) &= \operatorname{am}\left((-1)^{E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)} \cdot e^{i\pi(1-\varrho)}\right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Amplitude setze man

$$\varrho = E(\varrho) + \varepsilon \qquad (0<\varepsilon<1);$$

so kommt

$$\operatorname{am}\left(\frac{n}{m}\, e^{i\pi\gamma}\right) = \pi(1-\varepsilon) \quad \text{bzw.} \quad -\pi\varepsilon,$$

je nachdem $E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)+E(\varrho)$ gerade oder ungerade ist. Also allgemein

$$(101)\quad \operatorname{am}\left(\frac{n}{m}e^{i\pi\gamma}\right)=\pi\left(E(\varrho)-\varrho+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)+E(\varrho)}\right)\right).$$

Aus (97), (99), (100) und (101) folgt nun nach gehöriger Reduktion

$$(102)\quad N+\frac{1}{2}(N'+N'')$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^{E(\varrho)+E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)}\left(E(\lambda_1)+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}E(\varrho)-\frac{1}{4}.$$

Die Anzahlen N' und N'' sind den Sätzen 2 und 4 in § 4 zu entnehmen.

Man erhält so schließlich den folgenden

Satz 9. *Es sei keine der Größen* ϱ, λ_1, $1-\mu_1$, $1-\nu_1$ *eine positive ganze Zahl. Dann ist die Anzahl* N *der in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen des zum kleineren Exponenten gehörenden Fundamentalzweiges* y_α *durch die Gleichung*

$$(103)\quad N+\frac{1}{2}(E(\mu_1)+E(\nu_1)+\varepsilon+\eta)$$
$$=\frac{1}{2}\left(E(\varrho)-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(-1)^{E(\varrho)+E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(1-\nu_1)}\left(E(\lambda_1)+\frac{1}{2}\right)$$

bestimmt, wobei

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{E(\lambda)+E(\lambda_1)+E(\mu_1)+E(1-\nu_1)}\right),$$

$$\eta=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{E(\lambda)+E(\lambda_1)+E(1-\mu_1)+E(\nu_1)}\right)$$

ist.

Die in diesem Paragraphen bestimmten Zahlen gestatten eine einfache geometrische Deutung. An den Stellen der oberen Halbebene, an welchen

$$Cy_\alpha+C'y_{\alpha'}=0$$

ist, besitzt der Quotient $\frac{y_{\alpha'}}{y_\alpha}$ den Wert $-\frac{C}{C'}$, weil y_α und $y_{\alpha'}$ nirgends gleichzeitig verschwinden können. Nun bildet der Quotient $\frac{y_{\alpha'}}{y_\alpha}$ bekanntlich die obere Halbebene auf ein von drei Kreisbogen begrenztes Gebiet ab.*) Die oben bestimmten Zahlen N geben also an, wie vielfach sich dieses Gebiet über einen gegebenen Punkt $-\frac{C}{C'}$ hin erstreckt. Es bietet sich hier die Aufgabe, die von mir gefundenen Zahlen durch Betrachtungen

*) H. A. Schwarz, Über einige Abbildungsaufgaben, Crelles Journal Bd. 70 oder Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 80 (Berlin 1890).

zu bestätigen, die der Analysis situs angehören, was mit Hilfe der von Herrn Klein*) ausgebildeten Methoden keine größeren Schwierigkeiten haben dürfte.

§ 9.

Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Da sich die Riemannsche P-Funktion durch die Gaußsche Reihe darstellen läßt (vgl. die Formeln (13′)), so können die erhaltenen Resultate auch als Eigenschaften der Gaußschen Reihe ausgesprochen werden. Ich begnüge mich damit, dieses nur für die Sätze näher auszuführen, die sich auf die Elementarzweige der P-Funktion beziehen.

In der Ebene der komplexen Veränderlichen x werde ein geradliniger Schnitt ausgeführt, welcher längs der Achse der positiven reellen Zahlen vom Punkte 1 zum Punkte ∞ führt. Die mit diesem Schnitte versehene Ebene heiße E'; sie stellt alle endlichen komplexen Zahlen x dar, mit Ausschluß derjenigen, die reell und $\geqq 1$ sind.

Bekanntlich gibt es nun eine in der ganzen Ebene E' eindeutige reguläre analytische Funktion, welche für diejenigen Werte von x, deren absoluter Betrag < 1 ist, durch die Gaußsche Reihe

$$F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l\,m}{1 \cdot n}\,x + \frac{l(l+1)\,m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot n(n+1)}\,x^2 + \cdots \tag{104}$$

dargestellt wird. Diese Funktion will ich *„hypergeometrische Funktion mit den Parametern l, m, n“* nennen und auch für diejenigen Werte von x, für welche die Reihe (104) nicht konvergiert, mit $F(l, m, n, x)$ bezeichnen.

Setzt man nun

$$x = (z\,a\,b\,c) = \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c}, \tag{105}$$

wo $a < b < c$ drei reelle Größen bedeuten, so geht $F(l, m, n, x)$ in denjenigen Zweig der Riemannschen Funktion

$$P\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ 0, & 0, & l & z \\ 1-n, & n-l-m, & m & \end{pmatrix} \tag{106}$$

über, welcher zum Verzweigungswert a und zum Exponenten 0 gehört. Wenn l, m, n reell und

$$\lambda = |1-n|, \quad \mu = |n-l-m|, \quad \nu = |l-m| \tag{107}$$

als nicht ganzzahlig vorausgesetzt werden, so werden demnach die auf die

*) Vgl. namentlich die autographierte Vorlesung „Über die hypergeometrische Funktion“ (Göttingen 1894).

Zweige y_α und $y_{\alpha'}$ bezüglichen Sätze hier Anwendung finden und offenbar die Anzahlen der reellen Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ (welche $z = a$ und $z = b$ entsprechen), sowie zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = 0$ (welche $z = c$ und $z = a$ entsprechen), sowie endlich die Anzahl der imaginären Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ ergeben.

Hierbei ist nun zu unterscheiden, ob von den beiden zu $z = a$ gehörenden Exponenten 0 und $1 - n$ der erste oder der zweite der größere ist, mit anderen Worten, ob

$$1 - n < 0 \quad \text{oder} \quad 1 - n > 0$$

ist. Im ersten Falle handelt es sich um den zum größeren Exponenten $\alpha' = 0$, im zweiten Falle um den zum kleineren Exponenten $\alpha = 0$ gehörenden Fundamentalzweig der Funktion (106). Aus den Zahlen (107) sind noch die folgenden weiteren zu bilden:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}(1 + \lambda - \mu - \nu), \quad \mu_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \mu - \nu - \lambda), \\ \nu_1 &= \tfrac{1}{2}(1 + \nu - \lambda - \mu), \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(1 + \lambda + \mu + \nu), \end{aligned} \tag{108}$$

Ferner schicke ich noch die Bemerkung voraus, daß die Funktion $F(l, m, n, x)$ sich selbst konjugiert ist (d. h. für konjugierte Werte des Argumentes konjugierte Funktionswerte annimmt), und daß daher die Anzahl aller imaginären Nullstellen der Funktion doppelt so groß ist, wie die Anzahl der in der oberen Halbebene befindlichen Nullstellen.

Die Sätze 1—5, 8, 9 ergeben nun nachstehende Resultate:

1. Fall: $n > 1$.

Die Anzahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion $F(l, m, n, x)$ *beträgt*

$$\begin{aligned} E(\mu_1) &\text{ im Intervall } -\infty \cdots 0, \\ E(\nu_1) &\text{ im Intervall } \quad 0 \cdots 1. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß keine der Größen μ_1, ν_1, $1 - \lambda_1$ *eine positive ganze Zahl ist, beträgt die Anzahl der imaginären Nullstellen von* $F(l, m, n, x)$

$$\pm \left(E(\lambda_1) + \tfrac{1}{2}\right) - \operatorname{sgn} \lambda_1 \left(E(\lambda_1) + E(1 - \lambda_1)\right) - \tfrac{1}{2} - E(\mu_1) - E(\nu_1),$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem

$$E(\mu_1) + E(\nu_1) + E(1 - \lambda_1)$$

gerade oder ungerade ist.

Wenn eine der Größen μ_1, ν_1, $1-\lambda_1$ eine positive ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der imaginären Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ nach den Sätzen des § 5 zu bestimmen.

2. Fall: $n < 1$.

Die Anzahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion $F(l, m, n, x)$ *beträgt*

$$E(\mu_1) + \varepsilon \text{ im Intervall } -\infty \cdots 0,$$
$$E(\nu_1) + \eta \text{ im Intervall } \quad 0 \cdots 1,$$

wobei ε *den Wert* 0 *hat, wenn* λ_1 *oder* $1-\nu_1$ *eine positive ganze Zahl ist, in jedem anderen Falle aber* ε *den Wert* 0 *oder* 1 *hat, je nachdem*

$$E(\lambda) + E(\lambda_1) + E(\mu_1) + E(1-\nu_1)$$

gerade oder ungerade ist, wobei ferner η *den Wert* 0 *hat, wenn* λ_1 *oder* $1-\mu_1$ *eine positive ganze Zahl ist, in jedem anderen Falle aber* η *den Wert* 0 *oder* 1 *hat, je nachdem*

$$E(\lambda) + E(\lambda_1) + E(\nu_1) + E(1-\mu_1)$$

gerade oder ungerade ist.

Unter der Voraussetzung, daß keine der Größen ϱ, λ_1, $1-\mu_1$, $1-\nu_1$ *eine positive ganze Zahl ist, beträgt die Anzahl der imaginären Wurzeln von* $F(l, m, n, x)$

$$E(\varrho) - \tfrac{1}{2} \pm \left(E(\lambda_1) + \tfrac{1}{2}\right) - (E(\mu_1) + \varepsilon + E(\nu_1) + \eta),$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem

$$E(\varrho) + E(\lambda_1) + E(1-\mu_1) + E(1-\nu_1)$$

gerade oder ungerade ist.

Wenn eine der Größen ϱ, λ_1, $1-\mu_1$, $1-\nu_1$ eine positive ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der imaginären Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ nach den Sätzen des § 5 zu bestimmen.

Die durch die vorstehenden Sätze gegebenen Anzahlen habe ich (unter Ausschluß der Fälle, in welchen eine der Größen ϱ, λ_1, μ_1, ν_1 ganzzahlig ist) ohne Beweise in meiner Note*) „Über die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion“ mitgeteilt. Beim Vergleiche der dort gegebenen Anzahlen mit den hier gefundenen wolle man beachten, daß man μ mit ν und μ_1 mit ν_1 zu vertauschen hat, um die Bezeichnungen hier mit denen dort in Übereinstimmung zu bringen.

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Sitzung vom 5. Mai 1906.

§ 10.

Über die Lage der imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Setzt man, unter l, m, n zunächst beliebige Werte verstanden,

$$\varphi(x) = x^{\frac{n-1}{2}} (1-x)^{\frac{l+m-n+1}{2}} F(l, m, n, x), \tag{109}$$

so genügt $\varphi(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{(d \lg x)^2} = k(x) \cdot \varphi, \tag{110}$$

wobei

$$k(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(1-x)^2} \tag{111}$$

ist und A, B, C die Konstanten

$$A = \left(\frac{l-m}{2}\right)^2, \quad B = lm - \frac{n(l+m-1)+1}{2}, \quad C = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \tag{112}$$

bedeuten.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist in der Ebene der komplexen Variabeln x nach Ausschluß derjenigen reellen Werte, welche $\leqq 0$ oder $\geqq 1$ sind, eindeutig und regulär. Es sei nun r ein bestimmter, nicht reeller Zahlenwert, s zu r konjugiert imaginär. Die Funktionen

$$\varphi(r \cdot t), \quad \varphi(s \cdot t)$$

werden dann in der Ebene der komplexen Variabeln t beide gleichzeitig eindeutig und regulär sein, wenn man diejenigen Werte t ausschließt, für welche entweder rt oder st den oben erwähnten reellen Werten (die $\leqq 0$ oder $\geqq 1$ sind) angehört. Diese Werte von t werden durch vier Halbgerade repräsentiert, von denen zwei vom Nullpunkte, die beiden anderen von den Punkten $\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{s}$ nach dem unendlich fernen Punkte führen. Die Bestimmung über die Potenzen

$$x^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{n-1}{2} \lg x} \quad \text{und} \quad (1-x)^{\frac{l+m-n+1}{2}} = e^{\frac{l+m-n+1}{2} \lg(1-x)}$$

denke ich mir so getroffen, daß $\lg x$ und $\lg(1-x)$ für reelle, zwischen 0 und 1 liegende Werte von x selbst reell sind. Die Funktion $\varphi(x)$ ist dann sich selbst konjugiert, wenn l, m, n reelle Werte besitzen, wie ich von nun an voraussetzen will.

Nach (110) gelten nun die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi(rt)}{(d \lg t)^2} = k(rt) \cdot \varphi(rt), \\ \dfrac{d^2\varphi(st)}{(d \lg t)^2} = k(st) \cdot \varphi(st), \end{cases} \tag{113}$$

und aus diesen folgt:

$$(114)\quad \frac{d}{d\lg t}\left\{\varphi(rt)\frac{d\varphi(st)}{d\lg t}-\varphi(st)\frac{d\varphi(rt)}{d\lg t}\right\}=(k(st)-k(rt))\,\varphi(rt)\,\varphi(st).$$

Ich will nunmehr annehmen, daß r und folglich auch s eine Nullstelle der hypergeometrischen Funktion $F(l, m, n, x)$ sei und unter dieser Annahme die Gleichung (114) über das Intervall $1\cdots t$ der reellen Zahlenachse integrieren. Dabei bezeichne t einen *positiven* reellen Wert. Auf diese Weise kommt

$$\int_1^t (k(st)-k(rt))\,\varphi(rt)\,\varphi(st)\,d\lg t = st\,\varphi(rt)\,\varphi'(st)-rt\,\varphi(st)\,\varphi'(rt),$$

oder mit Rücksicht auf (111)

$$(115)\quad (s-r)\int_1^t [(2C+B)+(A-C)(r+s)t-(2A+B)rst^2]\frac{\varphi(rt)\,\varphi(st)}{(1-rt)^2(1-st)^2}\,dt = st\,\varphi(rt)\,\varphi'(st)-rt\,\varphi(st)\,\varphi'(rt).$$

In der Umgebung der Stelle $t=0$ ist die rechte Seite von (115) nach aufsteigenden Potenzen von t entwickelbar und zwar beginnt die betreffende Entwicklung, wie eine leichte Rechnung ergibt, mit einem Gliede der Form const. t^n.

Wenn daher $n>0$ ist, so wird die rechte Seite von (115) für $t=0$ verschwinden, so daß dann

$$(116)\quad \int_0^1 [(2C+B)+(A-C)(r+s)t-(2A+B)rst^2]\frac{\varphi(rt)\,\varphi(st)}{(1-rt)^2(1-st)^2}\,dt = 0$$

ist, wobei das Integral geradlinig zu nehmen ist.

Diese Gleichung kann nun, weil $\varphi(rt)\,\varphi(st)$ wesentlich positiv ist, nur dann bestehen, wenn

$$(2C+B)+(A-C)(r+s)t-(2A+B)rst^2$$

im Intervalle $0\leqq t\leqq 1$ sowohl positive, als auch negative Werte annimmt, oder aber beständig Null ist. Der letztere Fall tritt nur ein, wenn $C=A$, $B=-2A$, also $k(x)=C\cdot\frac{x^2-2x+1}{(1-x)^2}=C=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ ist. Wir dürfen ihn als interesselos ausschließen, weil $F(l, m, n, x)$ in diesem Falle einer Potenz von $1-x$ gleich ist.

Daß nun die Gleichung

$$(2C+B)+(A-C)(r+s)t-(2A+B)rst^2=0$$

oder, wenn

$$(117)\qquad r=\xi_0+i\eta_0,\quad s=\xi_0-i\eta_0$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(2C+B)+2(A-C)\xi_0 t-(2A+B)(\xi_0^2 t^2+\eta_0^2 t^2)=0$$

eine zwischen 0 und 1 liegende Wurzel t besitzen muß, läßt sich auch dahin aussprechen, daß in der Ebene der komplexen Variabeln

$$x=\xi+i\eta \tag{118}$$

die Verbindungsstrecke des Nullpunktes mit dem Punkte $r=\xi_0+i\eta_0$ den Kreis

$$(2C+B)+2(A-C)\xi-(2A+B)(\xi^2+\eta^2)=0 \tag{119}$$

treffen muß.

Führt man, wie im vorigen Paragraphen, die Größen

$$\lambda=|n-1|,\quad \mu=|n-l-m|,\quad \nu=|l-m| \tag{120}$$

ein, so wird

$$A=\frac{1}{4}\nu^2,\quad B=\frac{1}{4}(\mu^2-\nu^2-\lambda^2-1),\quad C=\frac{1}{4}\lambda^2, \tag{121}$$

und die Gleichung des Kreises (119) nimmt die Gestalt an:

$$(\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1)(\xi^2+\eta^2)+2(\lambda^2-\nu^2)\xi-(\mu^2+\lambda^2-\nu^2-1)=0. \tag{122}$$

Es gilt demnach der folgende Satz:

Die Parameter l, m, n der hypergeometrischen Funktion $F(l, m, n, x)$ seien reell und überdies $n>0$ vorausgesetzt. Jede imaginäre Nullstelle der Funktion hat dann eine solche Lage, daß die Verbindungsstrecke derselben mit dem Nullpunkt den Kreis (122) *trifft.*

Ist

$$\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1=0,$$

so geht die Gleichung (122) in die Gleichung $\xi-1=0$ über, und unser Satz besagt dann, daß jede imaginäre Wurzel der hypergeometrischen Funktion rechts von der Geraden $\xi=1$ liegt, oder daß imaginäre Wurzeln, deren reelle Teile kleiner als 1 sind, nicht existieren.

Ist aber

$$\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1\neq 0,$$

so stellt (122) denjenigen Kreis vor, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\xi=\frac{\nu^2-\lambda^2}{\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1},\quad \eta=0$$

hat und dessen Radius gleich dem absoluten Werte von

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+\nu^2-\lambda^2-1}$$

ist. Dieser Kreis umschließt den Nullpunkt oder nicht, je nachdem

$$|\mu^2-1|>|\nu^2-\lambda^2| \quad \text{oder} \quad |\mu^2-1|<|\nu^2-\lambda^2|.$$

Im ersten Falle besagt unser Satz, daß im Innern des in Rede stehenden Kreises sich keine imaginäre Nullstelle der hypergeometrischen Funktion befindet, im zweiten Falle aber, daß die vom Nullpunkt an den Kreis gehenden Tangenten zusammen mit dem zwischen ihren Berührungspunkten liegenden Kreisbogen ein Gebiet bestimmen, in welchem keine imaginäre Nullstelle der hypergeometrischen Funktion liegt.

Wenn $\nu = |l - m|$ nicht ganzzahlig ist, so beginnt die Entwicklung der rechten Seite der Gleichung (115) an der Stelle $t = \infty$ mit einem Gliede der Gestalt const. $t^{\nu-1}$. Unter der Voraussetzung $\nu < 1$ wird daher das in der Gleichung (115) auftretende Integral für $t = \infty$ verschwinden. Daraus ergibt sich ersichtlich der folgende weitere Satz:

Die Parameter l, m, n der hypergeometrischen Funktion $F(l, m, n, x)$ seien reell und überdies $\nu = |l - m|$ nicht ganzzahlig und < 1 vorausgesetzt. Jede imaginäre Nullstelle der Funktion hat dann eine solche Lage, daß diejenige von ihr ausgehende Halbgerade, deren Verlängerung durch den Nullpunkt geht, den Kreis (122) *trifft.*

Schließlich will ich noch bemerken, daß die in diesem Paragraphen angestellten Betrachtungen sich weiter vertiefen und auch auf die imaginären Nullstellen beliebiger sich selbst konjugierter Zweige der Riemannschen P-Funktion verallgemeinern lassen.

Den Zitaten, die ich oben gegeben habe, füge ich hier noch einige weitere hinzu. Hermite hat in seiner Arbeit „Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce“ (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohème, VII$^{\text{me}}$ série, tome 4, Prague 1890) mehrere Sätze über die imaginären Nullstellen der Kugelfunktion zweiter Art bewiesen. Diese Sätze beziehen sich also auf einen Zweig der speziellen P-Funktion, die zu den Exponentendifferenzen $\lambda = 2n + 1 \pm \frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ gehört, unter n eine positive ganze Zahl verstanden. Für die auf die reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion bezüglichen Sätze von Herrn Klein haben sich Hermite und Stieltjes lebhaft interessiert, wie dies aus der „Correspondance d'Hermite et de Stieltjes“ (t. II, p. 132, 134, 142, Paris 1905) hervorgeht. In seinem Briefe vom 9. Februar 1891 schreibt Stieltjes: „M. Hurwitz a remarqué comme moi (et avant moi) que le théorème de M. Klein sur les racines de $F(a, b, c, x) = 0$ s'obtient aisément à l'aide de la méthode de Sturm. Son travail est à l'impression, et j'attendrai donc pour voir s'il s'est occupé aussi des racines imaginaires. C'est à l'aide de la méthode de M. Klein elle-même que je crois voir comment il faudra préciser cette question des racines imaginaires. Mais

je suis bien convaincu que tout ce qu'on pourra obtenir sera accessible aussi par la méthode qui consiste à calculer le nombre des racines à l'aide de la variation de l'argument. Il faudra recourir aux formules qui donnent la continuation de la fonction dans les diverses parties du plan etc." Man sieht, daß Stieltjes damals mit der Absicht umging, Sätze aufzusuchen, wie ich sie in § 9 der vorstehenden Arbeit bewiesen habe. Soviel ich weiß, hat er indessen diese Absicht nicht verwirklicht.

In einem engen Zusammenhange mit diesen Sätzen stehen auch die Ergebnisse meiner Arbeit über die Nullstellen der Besselschen Funktion (diese Annalen, Bd. 33, S. 246). Bekanntlich läßt sich die Besselsche Funktion als ein Grenzfall der hypergeometrischen ansehen. Daher wird es möglich sein, die auf die Nullstellen der letzteren Funktion bezüglichen Sätze durch einen Grenzübergang in entsprechende Sätze für die Besselsche Funktion überzuführen.

Zürich, im Juli 1907.

Während des Druckes dieser Arbeit hatte Herr F. Klein die Freundlichkeit, mich auf die Abhandlung von Herrn Van Vleck aufmerksam zu machen, die unter dem Titel „A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series" in den Transactions of the American Mathematical Society (vol. 3, January 1902) erschienen ist. Auf Grund der geometrischen Methoden des Herrn Klein bestimmt Herr Van Vleck außer den Anzahlen reeller Wurzeln auch diejenigen Anzahlen imaginärer Wurzeln, welche ich im § 9 betrachtet habe. Herrn Van Vleck gebührt also das Verdienst, zuerst fertige Formeln für diese Anzahlen aufgestellt und bewiesen zu haben. Der Form nach sind Herrn Van Vlecks Resultate nicht so einfach wie die meinigen, und es leuchtet nicht ohne weiteres ein, daß die von uns auf verschiedenen Wegen gefundenen Zahlen miteinander übereinstimmen. Bei einigen von mir angestellten Stichproben hat sich indessen wirklich völlige Übereinstimmung ergeben. Die Anzahlen der imaginären Nullstellen *beliebiger* Zweige der Riemannschen P-Funktion, die ich im § 8 bestimmt habe, hat Herr Van Vleck nicht in Betracht gezogen. Wie ich schon am Schlusse jenes Paragraphen bemerkt habe, dürfte es wohl nicht schwierig sein, diese Anzahlen auch mit Hilfe der Methoden des Herrn Klein zu erhalten. [September 1907.]

Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen.

Von

Albert Fleck in Berlin.

Bekanntlich ist jede ganze positive Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar (Lagrange). Eine Verkleinerung der Höchstzahl vier ist unmöglich, da es Zahlen gibt, welche zu ihrer summatorischen Darstellung nicht weniger als vier Quadrate erfordern.

Während hier die Feststellung der Anzahl exakt geglückt ist, bietet die Zerlegung einer Zahl in (positive) Kuben oder Biquadrate oder fünfte Potenzen insofern bisher unüberwindliche Schwierigkeiten, als man nur dazu gelangt ist, festzustellen, *daß für die Höchstzahl der betreffenden Potenzen, die zur Darstellung jeder, noch so großen, Zahl sicher ausreichen, eine absolute angebbare Grenze vorhanden ist.* An die Erreichung des exakten Resultates ist aber hier noch gar nicht zu denken. *Für noch höhere als fünfte Potenzen war bisher noch nicht einmal bekannt, ob eine solche Grenze existiert.*

Für die *dritten Potenzen* ist es Herrn Maillet*) gelungen, nachzuweisen, daß jede ganze Zahl sich in eine bestimmte — für alle Zahlen gleiche — Höchstzahl von positiven Kuben zerlegen läßt. Maillet hat diese Grenze auf 17 bestimmt. Verfasser**) dieses hat sie als leicht auf 13 reduzierbar nachgewiesen. Mehr als 13 Kuben sind also zur Darstellung irgend einer Zahl nie erforderlich. Doch gibt es bis 40000 keine

*) Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes d'entiers positifs (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux 1895, S. 242—247). — Eine Reproduktion des Mailletschen Beweises siehe in der folgenden Abhandlung Note **).

**) Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen (Sitzungsberichte der Berliner mathem. Gesellsch. Jahrg. V, S. 2, 1906).

Zahl, die zu ihrer Darstellung mehr als neun Kuben benötigte (v. Sterneck).*)

Für die *vierten Potenzen* zeigte Liouville**) aus der Identität:

$$6(x^2+y^2+z^2+u^2)^2=(x+y)^4+(x+z)^4+(x+u)^4+(y+z)^4+(y+u)^4+(z+u)^4 \\ +(x-y)^4+(x-z)^4+(x-u)^4+(y-z)^4+(y-u)^4+(z-u)^4,$$

daß jede ganze positive Zahl N die Summe von höchstens 53 Biquadraten ist. Denn, da links das sechsfache Quadrat einer beliebigen Zahl n_1 steht, so ist jedes Sechsfache einer beliebigen Zahl N,

$$6N=6(n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2),$$

durch 48, also jede beliebige Zahl

$$Z=6N+\alpha \qquad (\alpha=0,1,2,3,4,5)$$

durch höchstens 53 Biquadrate ausdrückbar.

Die Zahl 53 erfuhr Reduktionen durch Realis***) auf 47, durch Lucas†) auf 45 und später††) auf 41, durch den Verfasser (s. S. 561 Note**)) dieses auf 39 und zuletzt durch Herrn Landau†††) auf 38. Doch ist keine Zahl bekannt, welche nicht durch höchstens 19 Biquadrate darstellbar wäre.

Für die *fünften Potenzen* ist durch Maillet*†) bewiesen worden, daß 192 solcher zur Darstellung jeder Zahl genügen. Diese Anzahl läßt sich leicht noch um ca. 36 Einheiten reduzieren. Doch ist diese Verringerung zwecklos, weil auch die dann resultierende Anzahl noch zu sehr von der vermutlichen idealen Grenzzahl (37) differiert.

Über die fünften Potenzen hinaus ist die Mailletsche Methode nicht anwendbar. Aber schon Waring**†) hat die Vermutung ausgesprochen, *daß zur Darstellung jeder noch so großen Zahl höchstens eine bestimmte Anzahl n^{ter} Potenzen erforderlich ist.*

*) Über die kleinste Anzahl Kuben, aus welchen jede Zahl bis 40000 zusammengesetzt werden kann. Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. in Wien. Math.-naturwissenschaftliche Klasse Bd. 112, Abt. II^a, Dez. 1903, S. 1627—1666.

**) Der Liouvillesche Beweis findet sich in Lebesgue, Exercices d'Analyse numérique. Paris 1859 (Leiber et Faraguet), S. 113—115.

***) Note sur un théorème d'Arithmétique (Nouv. Corresp. mathématique Bd. IV, 1878, S. 209—210).

†) Sur la décomposition des nombres en bicarrés (ebenda p. 323—325).

††) Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés (Nouv. Ann. de Math. Ser. 2, Bd. 17, S. 536—537).

†††) Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. XXIII, 1907, S. 91—96).

*†) Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones (Journ. de mathématiques Ser. 5, Bd. II, 1896, S. 363—380).

**†) Meditationes algebraicae, ed. III, Cambridge 1782, S. 349—350.

Dies ist nicht schon a priori klar, und es gibt Zahlenreihen, von welchen — zur Darstellung gewisser Zahlen — immer mehr Glieder erforderlich werden, je größer jene Zahlen werden. Ein Beispiel bildet die Reihe mit dem allgemeinen Glied $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$, denn es sind z. B. zur Darstellung der Zahl $n \cdot n!$ *genau* die n Zahlen $n!$ erforderlich. Die obere Grenze ist daher hier unendlich groß. Auch geometrische Reihen gehören hierher.

Für sechste Potenzen stand bisher nicht fest, ob eine endliche Höchstzahl überhaupt existiert. *Im folgenden soll für die Darstellung ganzer Zahlen durch sechste Potenzen gezeigt werden, daß eine gewisse endliche Anzahl solcher zur Darstellung aller Zahlen sicher genügt.*

Auch in dieser Richtung ist bereits ein — allerdings mißglückter — Versuch gemacht worden. Bei Laisant*) befindet sich folgende von Lucas**) aufgestellte Identität:

$$\begin{aligned} 10(x^2+y^2+z^2+u^2)^3 = {} & (x+y)^6+(x+z)^6+(x+u)^6+(y+z)^6+(y+u)^6+(z+u)^6 \\ & +(x-y)^6+(x-z)^6+(x-u)^6+(y-z)^6+(y-u)^6+(z-u)^6 \\ & +4x^6+4y^6+4z^6+4u^6. \end{aligned}$$

Diese ist offensichtlich falsch! Sie lautet im Original**) ebenso und ist auch später nicht richtig gestellt worden.

Die Methode, welche ich zur Auffindung einer passenden Identität verwandte, beruht auf folgender einfachen Überlegung.

Es ist $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ darzustellen oder ein Vielfaches davon. Die Entwicklung dieses Ausdrucks enthält nur quadratische Summanden, und derselbe ist in eine Summe von sechsten Potenzen der Form

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d)^6$$

zu verwandeln. Also müssen zunächst die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so beschaffen sein, daß in der entwickelten Summe alle Glieder, welche ungerade Potenzen von a, b, c, d enthalten, sich aufheben.

Dies ist z. B. bereits der Fall bei $(a+b)^6+(a-b)^6$, also auch bei der Summe

$$\begin{aligned} B = {} & (a+b)^6+(a-b)^6+(a+c)^6+(a-c)^6+(a+d)^6+(a-d)^6+(b+c)^6+(b-c)^6 \\ & +(b+d)^6+(b-d)^6+(c+d)^6+(c-d)^6 = \sum_{a \cdots d}^{(12)} [a \pm b]^6. \end{aligned}$$

---

*) Laisant, Recueil de problèmes de mathématiques. Algèbre. Théorie des nombres. Probabilités. Géométrie de situation. S. 125, No. 407.

**) Journ. de Mathématiques élémentaires et spéciales (Bourget), Bd. I, 1877, S. 127, Aufgabe 38.

Die (12) über dem rechts stehenden Ausdruck zeigt die Anzahl der Summanden an.

Diese Summe B reicht aber nicht aus, denn wenn auch hier die Glieder mit ungeraden Potenzen fehlen, so können wir doch nicht die Koeffizienten mit denen von $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ in Übereinstimmung bringen.

Dies gelingt aber, wenn wir noch einige Summen von ähnlichen Eigenschaften ausfindig machen. Dazu gehört zunächst

$$C = a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = \sum_{a \cdots d}^{(4)} [a]^6.$$

Da aber in $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ auch Glieder der Form $6\,a^2b^2c^2$ erscheinen, so müssen wir auch noch eine ähnliche Summe finden, in der die a, b, c, d zu dreien kombiniert vorkommen. Nun ist leicht zu sehen, daß

$$(a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6$$

die verlangte Eigenschaft hat, und um auch d zu seinem Rechte kommen zu lassen, müssen wir mehrere derartige Summen zu folgendem Ausdruck vereinigen:

$$\begin{aligned} A = {} & (a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6 \\ & + (a+b+d)^6 + (-a+b+d)^6 + (a-b+d)^6 + (a+b-d)^6 \\ & + (a+c+d)^6 + (-a+c+d)^6 + (a-c+d)^6 + (a+c-d)^6 \\ & + (b+c+d)^6 + (-b+c+d)^6 + (b-c+d)^6 + (b+c-d)^6 \\ = {} & \sum_{a \cdots d}^{(16)} [a \pm b \pm c]^6. \end{aligned}$$

Nunmehr können wir vier ganze positive Zahlen

$$m,\ n,\ p,\ r$$

so finden, daß

(1) $$mA + nB + pC = r(a^2+b^2+c^2+d^2)^3.$$

Es wird, wenn wir entwickeln, bei Anwendung leicht verständlicher Abkürzungen,

$$A = 12 \sum_{a \cdots d} a^6 + 120 \sum_{a \cdots d} a^4b^2 + 360 \sum_{a \cdots d} a^2b^2c^2,$$

$$B = \ 6 \sum_{a \cdots d} a^6 + \ 30 \sum_{a \cdots d} a^4b^2,$$

$$C = \ \sum_{a \cdots d} a^6,$$

und andererseits:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 = \sum_{a \cdots d} a^6 + 3 \sum_{a \cdots d} a^4b^2 + 6 \sum_{a \cdots d} a^2b^2c^2,$$

eine Formel, deren Einsetzung in (1) bei Koeffizientenvergleichung folgende Beziehungen ergibt:

$$\left.\begin{aligned} 12m + 6n + p &= r \\ 120m + 30n &= 3r \\ 360m &= 6r \end{aligned}\right\} \text{ oder } \begin{cases} r = 60m, \\ n = 2m, \\ p = 36m. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir z. B. für $m = 1$ das Wertsystem:

$$m = 1; \quad n = 2; \quad p = 36; \quad r = 60,$$

woraus sofort die gewünschte Identität folgt:

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^6 + (-a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6 \\ &+ (a+b+d)^6 + (-a+b+d)^6 + (a-b+d)^6 + (a+b-d)^6 \\ &+ (a+c+d)^6 + (-a+c+d)^6 + (a-c+d)^6 + (a+c-d)^6 \\ &+ (b+c+d)^6 + (-b+c+d)^6 + (b-c+d)^6 + (b+c-d)^6 \\ &+ 2(a+b)^6 + 2(a-b)^6 + 2(a+c)^6 + 2(a-c)^6 + 2(a+d)^6 + 2(a-d)^6 \\ &+ 2(b+c)^6 + 2(b-c)^6 + 2(b+d)^6 + 2(b-d)^6 + 2(c+d)^6 + 2(c-d)^6 \\ &+ 36a^6 + 36b^6 + 36c^6 + 36d^6 = 60(a^2+b^2+c^2+d^2)^3, \end{aligned}$$

oder mit der oben eingeführten Abkürzung geschrieben:

$$\sum_{a\cdots d}^{(16)} [a \pm b \pm c]^6 + 2\sum_{a\cdots d}^{(12)} [a \pm b]^6 + 36\sum_{a\cdots d}^{(4)} [a]^6 = 60(a^2+b^2+c^2+d^2)^3. \text{*)}$$

Hier steht links eine Summe von $1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 36 \cdot 4 = 184$ sechsten Potenzen, rechts aber der sechzigfache Kubus *irgendeiner* Zahl n_1. Nun läßt sich aber jede Zahl N als Summe von höchstens 13 Kuben (etwa der Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_{13}$) ausdrücken, also wird das Sechzigfache jeder ganzen Zahl N eine Summe von höchstens $13 \cdot 184 = 2392$ sechsten Potenzen und daher jede beliebige Zahl $Z = 60N + \alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 59$) eine Summe von höchstens $2392 + 59 = 2451$ sechsten Potenzen. — Die Reduktion dieser Anzahl wäre zwar leicht, aber ohne besonderen Nutzen. Sie mag daher hier unterbleiben.

Die Methode versagt bei den achten Potenzen, wie man leicht findet, deshalb, weil hier zum Unterschied gegen oben bereits zwei Arten von Gliedern aus zwei Faktoren erscheinen, nämlich a^6b^2 und a^4b^4, und, gleichviel wie wir die m, n, p usw. wählen, sich hier stets ein bestimmtes Verhältnis der Koeffizienten herausstellt, das nicht mit dem anderswertigen Verhältnis der entsprechenden Koeffizienten der anderen Seite in Einklang gebracht werden kann.

---

*) Die obige Identität mit der aus ihr gezogenen Folgerung betr. die Zerlegung einer Zahl in sechste Potenzen habe ich am 28. Nov. 1906 in der Berliner mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

Es ist ersichtlich, daß auf ähnliche Weise wie oben eine große Anzahl von Identitäten abgeleitet und für ähnliche oder andere Zwecke nutzbar gemacht werden kann.)*

Berlin, Dez. 1906.

---

*) Hier könnten noch die höheren Kombinationen und Potenzen eine Rolle spielen; ein Beispiel ist die Summe

$$\sum_{a\cdots d}^{(8)}[a\pm b\pm c\pm d]^{2m}=(a+b+c+d)^{2m}+(-a-b+c+d)^{2m}+(-a+b-c+d)^{2m}+(-a+b+c-d)^{2m}$$
$$+(-a+b+c+d)^{2m}+(\ a-b+c+d)^{2m}+(\ a+b-c+d)^{2m}+(\ a+b+c-d)^{2m}$$

deren Entwicklung nur Glieder mit geraden Potenzen enthält.

(Dagegen ergibt z. B. die obere Hälfte der rechten Seite allein den Wegfall aller Glieder mit ungeraden Potenzen der a, b, c, d, ausgenommen diejenigen Glieder, die ungerade Potenzen *aller vier* Größen zugleich enthalten. Die untere Hälfte verhält sich ebenso.)

Ähnliches ergibt die allgemeine Betrachtung der Summe

$$\sum_{a_1\cdots a_n}^{\left(\binom{n}{k}2^{k-1}\right)}[a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_k]^{2m}. \qquad (k\leqq n)$$

Zur Erklärung sei erwähnt, daß, wenn die $\pm$ Zeichen der a_i in *jeder* Weise bei allen a_i, auch bei a_1 variiert würden, wir 2^k Ausdrücke der in der eckigen Klammer stehenden Art erhalten würden. Da dann aber zu jedem Ausdruck auch der entgegengesetzt gleiche gehören würde, so brauchen wir nur die Hälfte der 2^k Ausdrücke, also nur 2^{k-1}, was dadurch angedeutet ist, daß vor a_1 das $\pm$ Zeichen fehlt. — Sind nun n Zahlen, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, gegeben, so deuten die $a_1, \cdots, a_k$ der eckigen Klammer irgend eine Kombination der n Zahlen zur k^{ten} Klasse an, deren es $\binom{n}{k}$ gibt. Also deutet das Σ im Ganzen die Summe von $\binom{n}{k}2^{k-1}$ $2m^{\text{ten}}$ Potenzen an.

Die Auswertung dieser Summe ergibt nur Glieder mit geraden Exponenten der a_i, und zwar wird:

$$\sum_{a_1\cdots a_n}^{\left(\binom{n}{k}2^{k-1}\right)}[a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_k]^{2m}=2^{k-1}\sum_{a_1\cdots a_k}\sum_{\alpha}\binom{n-i}{k-i}\frac{(2m)!}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\cdots!\,(2\alpha_k)}a_1^{2\alpha_1}a_2^{2\alpha_2}\cdots a_k^{2\alpha_k},$$

wo

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=m, \qquad k\leqq n,$$

i die Anzahl der Exponenten α_ν von a_ν, welche nicht Null sind. Die innere Summe bezieht sich auf alle α, die der obigen Gleichung genügen, die äußere Summe auf alle Kombinationen zur k^{ten} Klasse der $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Über die Darstellung gewisser ganzer rationalzahliger definiter Funktionen als Summen von vierten resp. sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen.

Von

Albert Fleck in Berlin.

Herr Landau*) hat zuerst nachgewiesen, daß jede definite Funktion einer Variablen mit rationalzahligen Koeffizienten sich als Summe von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen ausdrücken läßt. Im Höchstfalle genügen dazu sicher $4k + 4$ Quadrate, wenn die definite Funktion vom Grade $2k$ ist. Die Höchstzahl der Quadrate ist also nur von k, nicht von der Art der definiten Funktion abhängig.

Speziell zeigte Herr Landau**), daß jede definite Funktion zweiten Grades sich als Summe von höchstens fünf Quadraten darstellen läßt, und daß es solche Funktionen gibt, die durch weniger als fünf Quadrate nicht ausdrückbar sind. Das gleiche ist auch für definite Funktionen vierten Grades der Fall.***)

Schließlich hat Herr Landau†) gezeigt, daß unter Voraussetzung eines von Herrn Hilbert††) ausgesprochenen Satzes, daß nämlich jede total positive Zahl eines algebraischen Zahlkörpers sich als Summe von vier Quadraten gewisser Zahlen des Körpers darstellen läßt, sich jede definite ganze rationalzahlige Funktion n^{ten} Grades als Summe von acht Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen ergibt. Dadurch ist die Höchstzahl sogar von n unabhängig geworden.

*) Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate (Math. Annalen Bd. 57, 1903, S. 53—64).

**) Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate (Arch. der Mathem. (3) Bd. VII, 1904, S. 271—275).

***) Vorhergehende Arbeit S. 275—277 und die Arbeit des Verfassers dieses: Zur Darstellung definiter binärer Formen etc. (Archiv (3) Bd. X, 1906, S. 23—38).

†) Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate (Math. Annalen Bd. 62, 1906, S. 272—281).

††) Encyklopädie der math. Wissensch. Bd. I, S. 696, Leipzig 1900.

Im folgenden soll für gewisse definite Funktionen gezeigt werden, daß sie eine additive Darstellung durch eine endliche, für alle diese Funktionen gleiche, angebbare Höchstzahl vierter resp. sechster Potenzen zulassen.

Es ist klar, daß nicht jede definite Funktion vierten resp. sechsten Grades als Summe von vierten resp. sechsten Potenzen darstellbar ist.

So wird man vergeblich

$$x^4 + x + 1 \quad \text{oder} \quad x^6 + x + 1$$

in der Form

$$\Sigma(\alpha x + \beta)^4 \quad \text{resp.} \quad \Sigma(\alpha x + \beta)^6$$

darzustellen versuchen, da in letzteren Ausdrücken das Glied mit x^2 nicht in Wegfall kommen kann.

Ich benutze für meinen oben ausgesprochenen Zweck von obigen Sätzen zunächst nur den Landauschen über die Zerlegbarkeit *quadratischer* definiter Funktionen. Ferner sind nötig folgende zwei Identitäten, welche leicht bestätigt werden können und welche auf dem in meiner hier vorangehenden Arbeit (S. 563ff.) beschriebenen Wege gefunden wurden.

Es ist nämlich für irgend welche fünf Zahlen a, b, c, d, e:

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^4 + (-a+b+c)^4 + (a-b+c)^4 + (a+b-c)^4 \\
&+ (a+b+d)^4 + (-a+b+d)^4 + (a-b+d)^4 + (a+b-d)^4 \\
&+ (a+b+e)^4 + (-a+b+e)^4 + (a-b+e)^4 + (a+b-e)^4 \\
&+ (a+c+d)^4 + (-a+c+d)^4 + (a-c+d)^4 + (a+c-d)^4 \\
&+ (a+c+e)^4 + (-a+c+e)^4 + (a-c+e)^4 + (a+c-e)^4 \\
&+ (a+d+e)^4 + (-a+d+e)^4 + (a-d+e)^4 + (a+d-e)^4 \\
&+ (b+c+d)^4 + (-b+c+d)^4 + (b-c+d)^4 + (b+c-d)^4 \\
&+ (b+c+e)^4 + (-b+c+e)^4 + (b-c+e)^4 + (b+c-e)^4 \\
&+ (b+d+e)^4 + (-b+d+e)^4 + (b-d+e)^4 + (b+d-e)^4 \\
&+ (c+d+e)^4 + (-c+d+e)^4 + (c-d+e)^4 + (c+d-e)^4 \\
&+ 6(a+b)^4 + 6(a-b)^4 + 6(a+c)^4 + 6(a-c)^4 \\
&+ 6(a+d)^4 + 6(a-d)^4 + 6(a+e)^4 + 6(a-e)^4 \\
&+ 6(b+c)^4 + 6(b-c)^4 + 6(b+d)^4 + 6(b-d)^4 \\
&+ 6(b+e)^4 + 6(b-e)^4 + 6(c+d)^4 + 6(c-d)^4 \\
&+ 6(c+e)^4 + 6(c-e)^4 + 6(d+e)^4 + 6(d-e)^4 \\
&= 72(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)^2.
\end{aligned} \tag{A'}$$

Oder mit der in der vorigen Arbeit verwendeten Abkürzung geschrieben:

$$\text{(A')} \quad \sum_{a\cdots e}^{(40)} [a \pm b \pm c]^4 + 6 \sum_{a\cdots e}^{(20)} [a \pm b]^4 = 72(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)^2.$$

Und ebenso ist

$$(B') \qquad \sum_{a\cdots e}^{(40)} [a \pm b \pm c]^6 + 36 \sum_{a\cdots e}^{(5)} [a]^6 = 60(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)^3.$$

Seien nun a, b, c, d, e irgendwelche ganze rationalzahlige Funktionen von x vom Grade 0 oder 1, dann ist jede quadratische definite Funktion in der Form

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

darstellbar. Rechts steht also, abgesehen von den Koeffizienten 72 resp. 60, in (A′) das Quadrat *einer beliebigen* quadratischen definiten Funktion, in (B′) der Kubus einer solchen.

Die Koeffizienten 72 resp. 60 können wir auf folgende Weise ausschalten. Wir ergänzen sie durch Multiplikation zum Quadrat resp. zum Kubus, multiplizieren also (A′) mit 2, dann wird rechts

$$12^2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)^2 = (A^2+B^2+C^2+D^2+E^2)^2$$

stehen, denn hier läßt sich die definite Funktion

$$12(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$$

aufs neue durch fünf Quadrate ausdrücken. Wegen der Zulässigkeit rationalzahliger Koeffizienten kann dann offenbar auch

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$$

jede beliebige quadratische definite Funktion sein.

Ebenso verfahren wir in (B′). Wir multiplizieren mit

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

und gewinnen so rechts den Kubus *jeder beliebigen* quadratischen definiten Funktion.

Links aber stehen im Falle (A′): $2(40+6\cdot 20) =$ 320 Biquadrate.
im Falle (B′): $450(40+180) =$ 99000 sechste Potenzen.

Damit sind folgende Sätze bewiesen:

Satz A′: *Jedes Quadrat einer definiten ganzen, rationalzahligen quadratischen Funktion von x ist die Summe einer endlichen, bestimmbaren, von den Koeffizienten der Funktion unabhängigen Höchstzahl von Biquadraten ganzer rationalzahliger, höchstens linearer Funktionen.*

Satz B′: *Jeder Kubus einer definiten ganzen, rationalzahligen quadratischen Funktion von x ist die Summe einer endlichen, bestimmbaren, von den Koeffizienten der Funktion unabhängigen Höchstzahl von sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger, höchstens linearer Funktionen.*

Gleiches gilt auch für definite Funktionen vierten resp. sechsten Grades, die sich als Summe von Quadraten resp. Kuben definiter quadra-

tischer Funktionen darstellen lassen. Auch sie sind Summen endlich vieler vierter resp. sechster Potenzen.

Endlich läßt sich auch jede definite quadratische Funktion einer definiten quadratischen Funktion durch Biquadrate ausdrücken. Denn es ist:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = ay^2 + b' \qquad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b' > 0 \end{pmatrix}$$

und eine definite Funktion hiervon:

$$A(ay^2 + b')^2 + B. \qquad \begin{pmatrix} A > 0 \\ B > 0 \end{pmatrix}$$

Da aber sowohl A wie B als auch $(ay^2 + b')^2$ Summen endlich vieler Biquadrate sind, so gilt das auch für den aus ihnen zusammengesetzten Ausdruck.

Es ist in (A′) und (B′) ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Sätze abgeleitet worden, weil wegen der Anzahl fünf der notwendigen Funktionen a, b, c, d, e die Identitäten sich leichter deutlich machen ließen.

Im folgenden sollen die beiden allgemeineren Sätze bewiesen werden:

Satz A: *Das Quadrat jeder definiten ganzen rationalzahligen Funktion von x ist die Summe einer endlichen, bestimmbaren, vom Grade und den Koeffizienten der Funktion unabhängigen Höchstzahl von vierten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen.*

Satz B: *Der Kubus jeder definiten ganzen rationalzahligen Funktion von x ist die Summe einer endlichen, bestimmbaren, vom Grade und den Koeffizienten der Funktion unabhängigen Höchstzahl von sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen.*

Zum Beweise dieser Sätze dient der anfangs erwähnte aus dem Hilbertschen abgeleitete Landausche Satz, daß jede definite Funktion die Summe von höchstens *acht* Quadraten ist.*)

Die notwendigen Identitäten nehmen hier einen so großen Umfang ein, daß wir nur die abgekürzte Form hier anführen können. In dieser Form aber können sie mit Hilfe der in der Schlußanmerkung der vorigen Arbeit gegebenen allgemeinen Formel (S. 566) leicht abgeleitet werden.

Seien a, b, c, d, e, f, g, h acht Zahlen, so folgt:

*) Es ist jedoch zu bemerken, daß die Endlichkeit der Anzahl der vierten resp. sechsten Potenzen auch schon — wenn auch schwieriger — aus dem Landauschen Satze folgt, daß jede definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades durch höchstens $4k + 4$ Quadrate dargestellt werden kann. In letzterem Falle wird aber als Höchstzahl der vierten resp. sechsten Potenzen ein *von k abhängiger* Ausdruck erhalten, während die obige Höchstzahl von k unabhängig ist.

$$\sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^4 = 280 \sum a^4 + 720 \sum a^2 b^2,$$

$$\sum_{a\cdots h}^{(56)} [a \pm b]^4 = 14 \sum a^4 + 12 \sum a^2 b^2.$$

Ferner ist:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^2 = \sum a^4 + 2 \sum a^2 b^2.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit m, n, r, so folgt durch Addition und Koeffizientenvergleichung

$$\left.\begin{aligned} 280m + 14n &= r \\ 720m + 12n &= 2r \end{aligned}\right\} \text{ woraus } \begin{aligned} n &= 10m, \\ r &= 420m. \end{aligned}$$

Also z. B. für $m = 1$

(A) $$\sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^4 + 10 \sum_{a\cdots h}^{(56)} [a \pm b]^4 = 420(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^2.$$ *)

Für sechste Potenzen folgt entsprechend:

$$\sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^6 = 280 \sum a^6 + 1800 \sum a^4 b^2 + 3600 \sum a^2 b^2 c^2,$$

$$\sum_{a\cdots h}^{(8)} [a]^6 = \sum a^6,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^3 = \sum a^6 + 3 \sum a^4 b^2 + 6 \sum a^2 b^2 c^2,$$

woraus:

(B) $$\sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^6 + 320 \sum_{a\cdots h}^{(8)} [a]^6 = 600\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^3.$$

Rechts stehen in den Formeln (A) und (B) das 420- resp. 600-fache des Quadrates resp. des Kubus einer Summe von acht Quadraten. Sind

*) Ebenso leicht gewinnt man folgende Identitäten, die man auch für den Beweis verwenden könnte:

$$\sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^4 + 80 \sum_{a\cdots h}^{(8)} [a]^4 = 360(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^2$$

$$3 \sum_{a\cdots h}^{(560)} [a \pm b \pm c \pm d]^4 + 20 \sum_{a\cdots h}^{(224)} [a \pm b \pm c]^4 = 2520(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^2.$$

die $a, b, \cdots, h$ also acht Funktionen höchstens k^{ten} Grades von x, so stellt die Quadratsumme *jede beliebige definite Funktion* $2k^{\text{ten}}$ *Grades* dar.

Links aber stehen im Falle (A): $560 + 10 \cdot 56 = 1120$ Biquadrate von Funktionen höchstens k^{ten} Grades,

im Falle (B): $560 + 8 \cdot 320 = 3120$ sechste Potenzen solcher Funktionen. Multiplizieren wir jetzt noch (A) resp. (B) mit 105 resp. 45, so erhalten wir das *ein*fache Quadrat resp. den *ein*fachen Kubus einer definiten Funktion, ausgedrückt durch höchstens $105 \cdot 1120 = 117600$ Biquadrate resp. durch $45 \cdot 3120 = 140400$ sechste Potenzen, womit die Sätze (A) und (B) bewiesen sind.

Auch hier folgt noch: Jede definite Funktion $4k^{\text{ten}}$ resp. $6k^{\text{ten}}$ Grades, die sich als Summe von endlich vielen Quadraten resp. Kuben *definiter* Funktionen (höchstens $2k^{\text{ten}}$ Grades) darstellen läßt, ist zugleich eine Summe einer endlichen, vom Grade und den Koeffizienten der Funktion unabhängigen Höchstzahl von vierten resp. sechsten Potenzen.

Berlin, Dez. 1906.

Über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler einer Gattung.

Von

Michael Bauer in Budapest.

1. Die Begründung einer allgemeinen Idealtheorie der algebraischen Zahlen wurde durch die Tatsache erschwert, daß die Diskriminanten der zur Gattung gehörigen ganzen Zahlen auch *„außerwesentliche Teiler“* besitzen können. Diese Tatsache wurde zum ersten Male von Herrn Dedekind an einem einfachen Beispiele festgestellt.*) Derselbe hat auch a. a. O. die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz außerwesentlicher Teiler abgeleitet. Später beschäftigte sich Herr Hensel**), durch Kronecker angeregt, mit derselben Frage; er wies vorerst durch spezielle Untersuchungen nach, daß die fraglichen Teiler sehr häufig auftreten; dann aber gab er auch seinerseits eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein außerwesentlicher Teiler, welche formell von der Dedekindschen ganz verschieden ist.

2. Im folgenden möchte ich darauf hinweisen, daß der Satz über die Puiseuxschen Zahlen***) das häufige Auftreten der außerwesentlichen Teiler recht anschaulich macht. Übrigens wäre dies nur von methodischem Interesse, wenn auf diese Weise nicht auch solche Tatsachen festgestellt werden könnten, welche aus den Untersuchungen der Herren Dedekind und Hensel nicht folgen.

3. Die Zahl w, welche die Gattung (Γ) bestimmt, genüge der ganzzahligen Gleichung:

$$(I) \qquad z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \qquad n \geqq 3.$$

*) Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen. Göttinger Abhandlungen 1878.

**) Arithmetische Untersuchungen über die Diskriminanten und ihre außerwesentlichen Teiler. Berliner Diss. 1884. Von den späteren Publikationen bes. Crelle 113. Hensel hat auch bewiesen, daß die außerwesentlichen Teiler durch Adjunktion beseitigt werden können.

***) Crelle 132, S. 21—35.

Wir wollen nun zeigen, wie man durch die geeignete Wahl der Koeffizienten c_i der Gattung (Γ) gewisse Eigenschaften vorschreiben kann.

4. Es sei

$$p < n$$

eine Primzahl und wir fordern, daß dieselbe ein außerwesentlicher Teiler der Gattung sei. Das wird nach Herrn Dedekind sicher erfüllt, wenn die Zahl p in (Γ) eine Zerlegung:

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \tag{1}$$

besitzt, wo die Primideale voneinander verschieden sind. Eine solche Zerlegung wird aber statthaben, wenn die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung (I) z. B. in der folgenden Weise gewählt werden:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{1}, \frac{\alpha_2}{1}, \cdots, \frac{\alpha_n}{1} \text{ für die Primzahl } p, \\ \frac{\alpha}{n};\ (\alpha, n) = 1 \text{ für eine andere Primzahl } r. \end{cases} \tag{2}$$

5. Es wird gefordert, daß die Primzahl

$$p < n - 1$$

ein außerwesentlicher Teiler und ferner auch ein Teiler der Gattungsdiskriminante sein soll.*) Das wird sicher erreicht, wenn

$$p = \mathfrak{p}_1^{\,2} \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{n-1}$$

ist; was wieder eintritt, wenn die Puiseuxschen Zahlen in folgender Weise gewählt werden:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{1}, \cdots, \frac{\alpha_{n-1}}{1};\ \alpha_1 \equiv 1 \pmod 2 \text{ für die Pr. } p, \\ \frac{\alpha}{n};\ (\alpha, n) = 1 \qquad\qquad \text{für eine andere Pr. } r. \end{cases} \tag{3}$$

6. Die Gattung (Γ) besitze keinen außerwesentlichen Teiler. Es seien

$$q_1, q_2, \cdots, q_i, \cdots \tag{4}$$

sämtliche Primzahlen, welche kleiner als n sind. Da überhaupt nur diese Zahlen als außerwesentliche Teiler auftreten können, wird die Forderung erfüllt, wenn die Gleichung (I) in bezug auf jede Zahl q_i die einzige Puiseuxsche Zahl

$$\frac{\alpha_i}{n};\quad (\alpha_i, n) = 1 \tag{5}$$

*) Es ist evident, daß ein außerwesentlicher Teiler nur dann in der Gattungsdiskriminante auftreten kann, wenn $n \geqq 4$ ist. Herr Hensel hat in seiner Dissertation zum ersten Male festgestellt, daß ein außerwesentlicher Teiler auch in der Gattungsdiskriminante auftreten kann.

besitzt. Die Zahlen q_i sind dann Primidealpotenzen und können folglich keine außerwesentlichen Teiler sein.

7. Die Gattung besitze nur solche außerwesentlichen Teiler, welche in der Gattungsdiskriminante auftreten ($n \geqq 4$). Man wähle die Puiseuxschen Zahlen z. B. in bezug auf q_1 gleich

$$\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{1}, \cdots, \frac{\alpha_{n-1}}{1}; \quad \alpha_1 \equiv 1 \pmod 2,$$

in bezug auf q_i ($i > 1$) gleich den Zahlen (5).

8. Die außerwesentlichen Teiler sollen nicht in der Gattungsdiskriminante auftreten. Man sorge dafür, daß alle Primzahlen, welche kleiner als n sind, eine Zerlegung von der Gestalt (1) besitzen.

9. Die Gattung soll von den gegebenen Gattungen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$$

verschieden sein. Sei r eine solche Primzahl, welche relativ prim zu den Diskriminanten der gegebenen Gattungen ist. Die Puiseuxschen Zahlen in bezug auf dieselbe sollen noch frei sein. Wenn wir jetzt für die Gleichung in bezug auf r z. B. die einzige Puiseuxsche Zahl

$$\frac{\alpha}{n}, \quad (\alpha, n) = 1$$

vorschreiben, dann tritt r in die Diskriminante der Gattung (Γ) ein, wodurch die Forderung erfüllt wird.

10. Die Gattung soll eine allgemeine d. h. affektlose sein.*) Diese Forderung wird erfüllt, wenn die Puiseuxschen Zahlen in bezug auf höchstens drei beliebige Primzahlen geeignet gewählt werden.

11. Aus dem Vorhergehenden folgen die Sätze:

Zu jedem Grade $n \geqq 3$ gehören unendlich viele verschiedene Gattungen, welche außerwesentliche Teiler besitzen (nicht besitzen).

Zu jedem Grade $n \geqq 4$ gehören unendlich viele verschiedene Gattungen, deren außerwesentliche Teiler eine der folgenden Eigenschaften aufweisen:

I) keiner tritt in der Gattungsdiskriminante auf,

II) einige treten in der Gattungsdiskriminante auf,

III) alle treten in der Gattungsdiskriminante auf.

Beide Sätze bleiben auch dann gültig, wenn gefordert wird, daß die Gattung eine affektlose sei.**) —

*) Crelle 132, S. 21—35.

**) Mit der Dichtigkeit der Gleichungen

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

c_i rational ganz,

welche Gattungen mit außerwesentlichen Teilern liefern, steht es genau so, wie mit der Dichtigkeit der affektlosen Gleichungen. Vgl. die Note: Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. Math. Annalen Bd. 64, S. 325.

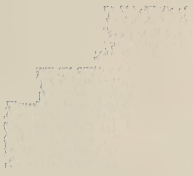
12. Zum Schlusse behandeln wir das Dedekindsche Beispiel. Die Zahl α genüge der Gleichung:

$$F(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0.$$

Die Gleichung ist eine irreduzible, weil sie keine rationale ganze Wurzel besitzt. Die Puiseuxschen Zahlen in bezug auf 2 sind

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1},$$

infolgedessen ist die Zahl 2 im untersuchten Bereiche ein Produkt von drei verschiedenen Primidealen.



UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5MH C001
MATHEMATISCHE ANNALEN BER
64 1907
3 0112 016820463